# El algoritmo del mapa de caminos en planeación de movimientos Proyecto Final Robótica I

Jaime Zirate Arzate

Junio, 2023

# 1 Resumen

El problema de planificación de movimientos para un robot en un espacio con obstáculos es el problema fundamental en robótica.

Una algoritmo completo que resuelva este problema en tiempo computacionalmente razonable (polinomial o menor) sigue siendo un problema abierto. La complejidad de este problema es tan grande que resulta intratable tratar de resolverlo con exactitud. En lugar de esto, se tratan de buscar simplificaciones al problema reduciendo el número de grados de libertad del robot, utilizando la información disponible sobre el espacio ambiente o empleando métodos probabilísticos que permitan encontrar una solución (si ésta existe) con alta probabilidad.

El problema de decidir en tiempo finito si una solución existe o no es muy difícil, y la mayoría de los algoritmos modernos en planeación de movimientos han abandonado la tarea de resolver este problema.

El algoritmo del mapa de caminos, el cual se desarrolla en este trabajo, es un algoritmo completo que resuelve el problema de planificación de movimientos. Es capaz de construir una solución o reportar que no existe solucuón en tiempo finito.

Este algoritmo es exponencial en el número de grados de libertad, lo que lo vuelve computacionalmente inviable.

Se consideran también posibles mejoras al algoritmo que reducen el tiempo computacional. En ciertos casos particulares, el tiempo de ejecución puede reducirse a un tiempo polinomial. Si es posible para el problema en cuestión reducir considerablemente el número de grados de libertad, este algoritmo puede implementarse en tiempo razonable.

# 2 Introducción.

El algoritmo del mapa de caminos, presentado por primera vez por John Canny en 1987 en una disertación de su tesis doctoral, presenta tal vez el único algoritmo completo que resuelve el problema de encontrar un mapa de caminos para un robot en un espacio de configuraciones de cualquier dimensión.

La construcción del mapa de caminos requiere herramientas de variedades diferenciables, topología diferencial y geometría algebraica. El concepto fundamental es el de *estratificación* de variedades, la cual es una partición de una variedad en variedades de dimensión menor, llamados *estratos*.

El algoritmo, conocido también como el *método silueta*, construye recursivamente el mapa de caminos considerando la cerradura del espacio libre  $cl(\mathcal{C}_{free})$  en el espacio de configuraciones  $\mathcal{C}$  como una hipersuperficie. Se consideran los puntos críticos de las proyecciones a un eje. Tomando cortes con un plano perpendicular a la superficie, el algoritmo trata de conectar estos puntos críticos con el mapa de caminos en el plano, el cual es menor en uno a la dimensión de  $\mathcal{C}$ . Recursivamente llamando el algoritmo en dimensiones menores, se construye el mapa de caminos.

Para ilustrar el método silueta, sea  $S = cl(\mathcal{C}_{free})$  un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^m$ , donde m es la dimensión de  $\mathcal{C}$ . El primer paso en el método silueta es construir un mapa de caminos  $\mathcal{R}$  de S. El algoritmo es aplicado recursivamente en dimensiones menores. En el nivel 0 de la recursión, un hiperplano de dimensión m-1 forma cortes a través de S. Este plano se toma perpendicular a uno de los ejes (la elección es arbitraria), digamos al eje x, y se traslada a lo largo del eje x. Denotamos por  $P_c$  al plano correspondiente a x = c. Elegimos uno de los ejes convenientemente, digamos el eje y, y calculamos los extremos en  $S \cap P_c$  de la proyección al eje y.  $\mathcal{R}$ todos los extremos locales (máximos, mínimos y puntos de inflección) en esta dirección. La elección de estos ejes se toma de tal forma que existan un número finito de puntos extremos en cada corte  $S \cap P_c$ . Ya que  $S \cap P_c$  es compacto, existen los extremos en cada componente conexa de  $S \cap P_c$ . Por tanto cualquier punto en  $S \cap P_c$  puede conectarse mediante una curva a  $\mathcal{R}$ que esté totalmente contenida en  $S \cap P_c$ .

Cuando c varía, es decir, cuando el plano es "barrido" a través de S, los

puntos extremos trazan curvas algebraicas llamadas las curvas silueta. Estas curvas están contenidas en el contorno de S. La curvas silueta sólo son



Figure 1: El conjunto tridimensional S es un elipsoide con un agujero cilíndrico. El plano  $P_c$  se desliza a través del eje x. Se muestran las curvas silueta obtenidas de los puntos extremos de  $S \cap P_c$  en la dirección y durante el deslizamiento

una parte del mapa de caminos. Queremos que el mapa final  $\mathcal{R}$  sea conexo en cada componente conexa de S. En la figura anterior, podemos ver que la unión de las curvas silueta no es conexa.

El proceso comienza en una abscisa  $x = c_0$  tal que  $S \subset \{x > c_0\}$ . De aquí, c se incrementa continuamente. Para la mayoría de valores de c, si la silueta trazada hasta  $x \leq c$  es conexa, permanecerá conexa para  $x = c + \delta$  para  $\delta$  pequeño, excepto en un número finito de valores  $c_i$  de c donde cambia la conectividad. Estos valores se llaman valores críticos, y los correspondientes extremos se denominan puntos críticos. Cuando el plano pasa a través de un punto crítico  $q_i$  en  $c = c_i$ , conectamos  $q_i$  al resto de la silueta por un conjunto de curvas contenidas en  $S \cap P_{c_i}$ . Esto siempre se puede hacer ya que cualquier componente conexa de  $S \cap P_{c_i}$  contiene al memos un punto



Figure 2: Durante el deslizamiento del plano, nuevos extremos aparecen, llamados puntos críticos. En la figura se muestran los puntos críticos y los valores criticos correspondientes cuando un plano se desliza a través del eje x y los puntos extremos se calculan en la dirección y

de la silueta. La forma de concectarlo es llamar al algoritmo en dimensión m-1, donde un hiperplano de dimensión m-2 (una línea en el ejemplo de la figura) se desliza a través de un eje, digamos el eje y, y se calculan los extremos respecto a una dirección, digamos z. Por tanto, el algoritmo reduce el problema de calcular el mapa de caminos de S a varios subproblemas de calcular los mapas de caminos en dimensión m-1. La recursión termina cuando no hay puntos críticos que conectar a las siluetas en el actual conjunto, o cuando este conjunto tiene dimensión 2. De hecho, en dimensión 2, si la linea de barrido pasa a través de un punto crítico, unimos este punto crítico a la silueta mediante una línea recta. Esta es otra forma de decir que el mapa de caminos en dimensión 1 es el conjunto mismo.



Figure 3: Las curvas (líneas oscuras) construidas por el llamado recursivo al mapa de caminos cuando el plano  $P_c$  pasa a través de los valores críticos  $c_1 - c_4$ , los correspondientes puntos críticos se denotan por  $q_1 - q_4$ 

Para el problema de conectar una configuración inicial  $q_{init}$  con una configuración final  $q_{goal}$ , simplemente tratamos a estas configuraciones como puntos críticos y los conectamos llamando al algoritmo cuando el plano de deslizamiento pasa a través de estos puntos.

El mapa de caminos puede representarse como un grafo cuyas aristas son segmentos de curvas algebraicas y cuyos nodos son los puntos finales de estas curvas.

# 3 Preliminares

Podemos considerar a  $S = cl(\mathcal{C}_{free})$  como un *conjunto semi-algebraico* definido por polinomios con coeficientes racionales. Si el espacio de configuraciones es de dimensión r, entonces está definido por r valores reales, y los polinomios que definen este conjunto provienen del anillo de polinomios en r variables



Figure 4: El mapa completo de caminos del ejemplo estudiado y las curvas de conexión de  $q_{init}$  y  $q_{goal}$ 

con coeficientes racionales, esto es,

$$\mathbf{Q}_r = \mathbf{Q}[x_1, \dots, x_r]$$

#### 3.1 Definición

Un conjunto algebraico en  $\mathbb{R}^r$  es el conjunto de ceros simultáneos de un sistema de polinomios en  $\mathbb{Q}_r$ .

# 3.2 Definición

Un conjunto semi-algebraico  $S \subset \mathbb{R}^r$  definido por los polinomios  $F_1, ..., F_r \in \mathbb{Q}_r$  es un conjunto obtenido de los conjuntos

$$S_i = \{x \in \mathbf{R}^r | F_i(x) > 0\}$$

mediante unión e intersección finitas y complementos.

# 3.3 Ejemplo

El conjunto algebraico en  $\mathbf{R}^3$  definido por la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1$$

es un cilindro. Para definir el interior del cilindro necesitamos la desigualdad

$$x^2 + y^2 < 1.$$

Un cilindro finito cerrado está definido como el conjunto algebraico

$$\{F_1 \le 0, F_2 \le 1, F_2 \ge -1\}$$

donde  $F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1, F_2(x, y, z) = z$ . Escribimos este conjunto en forma sintáctica como

$$(x^2 + y^2 \le 1) \land (z \le 1) \land (z \ge -1).$$

Para ganar intuición geométrica sobre los conjuntos semi-algebraicos, usaremos particiones de estos conjuntos en objetos geométricos simples llamados *variedades*.

Recordemos que un mapeo

$$f: U \subset \mathbf{R}^r \longrightarrow V \subset \mathbf{R}^m$$

se llama un difeomorfismo si f es diferenciable e invertible con inversa diferenciable. Decimos que  $U \ge V$  son difeomorfos.

#### 3.4 Definición.

Un subconjunto  $M \subset \mathbb{R}^r$  es una variedad diferenciable de dimensión m (una m-variedad), si cada punto en M tiene una vecindad difeomorfa a  $\mathbb{R}^m$ 

Intuitivamente, una variedad es lo que corresponde a la noción de superficie *m*-dimensional suave. Por ejemplo, un cubo o un cilindro cerrado no son variedades debido a las "esquinas". En este caso, los puntos en la frontera tienen vecindades difeomorfas *sólo* a un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}^m$ . El cilindro no acotado definido por

$$x^2 + y^2 = 1$$

en  $\mathbb{R}^3$  es una variedad.

Los difeomorfismos locales en cada punto de la variedad nos permiten definir coordenadas locales en una vecindad de cada punto.

Se<br/>aMuna  $m\mbox{-variedad},\,x\in M,\,U\subset M$ una vecindad d<br/>exy

$$\phi_x: U \longrightarrow V$$

un difeomorfismo, donde  $V \subset \mathbb{R}^m$  es abierto. Los mapeos

$$\{\phi_x : x \in M\}$$

son llamados *cartas de coordenadas*. Asumimos que las cartas están adaptados de tal forma que  $\phi_x(x) = 0$ . Las coordenadas locales alrededor de un punto  $x \in M$  son las m funcines coordenadas de  $\phi_x$ .

#### 3.5 Definición

Sea  $f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$  un mapeo. La diferencial de f en x, denotada por  $df_x$  está dada por el jacobiano

$$df_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix} \quad (*)$$

# 3.6 Definición (espacio tangente)

Sea  $M \subset \mathbb{R}^r$  una *m*-variedad,  $x \in M$ . Sea  $\psi$  la inversa de la carta de coordenadas  $\phi_x$ . Definimos el *espacio tangente a* M *en* x, denotado por  $T_x M$ , como  $d\psi_0(\mathbb{R}^m)$ 

Observemos que el espacio tangente  $T_x M$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^r$ Podemos ahora extender la definición de diferencial a mapeos entre var-



Figure 5: Espacio tangente y su imagen bajo f

iedades. Se<br/>a $f:M\longrightarrow N$ un mapeo suave de variedades. Definimos la diferencial d<br/>ef en  $x\in M,$ como el mapeo inducido

$$df_x: T_x M \longrightarrow T_{f(x)} N.$$

Usando coordenadas locales alrededor de x y de f(x), la diferencial está dada por el jacobiano (\*)

Podemos extender la noción de punto crítico de un mapeo entre variedades.

#### 3.7 Definición.

Un punto  $x \in M$  es un punto crítico de  $f : M \longrightarrow N$  si su diferencial  $df_x$ no es sobreyectiva en x, es decir, si el jacobiano (\*) tiene rango menor que dim(N) en x. El conjuto de puntos críticos de f lo llamamos su conjunto crítico, y lo denotamos por  $\Sigma(f)$ . Los puntos donde  $df_x$  es sobreyectiva son llamados puntos regulares.

La imagen de un punto crítico  $x \in M$  se llama un valor crítico de f. Los valores  $v \in \mathbb{R}^n$  que no son valores críticos son llamados valores regulares. Por tanto un valor v es regular si y sólo si  $f^{-1}(v)$  consta de puntos regulares. En particular, v es regular si  $f^{-1}(v)$  es vacío.

#### 3.8 Ejemplo

Se<br/>aMla esfera unitaria en  $\mathbf{R}^3$  definida por

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

y  $N = \mathbb{R}^2$ . Sea

$$f = \pi_{12} : M \longrightarrow N$$

la proyección en las coordenadas x y y restringida a M, esto es,

$$f(x, y, z) = (x, y)$$
 para  $(x, y, z) \in M$ 

Para casi todo  $x \in M$ , la imagen del espacio tangente  $T_{f(x)}N$  es todo el plano xy, excepto en los puntos del ecuador, donde el plano tangente contiene un vector vertical, y la imagen del plano tangente  $T_{f(x)}$  es una línea en el plano xy.

Por tanto los puntos en el ecuador son puntos críticos, y se proyectan a un círculo de valores críticos.

Observemos que la proyección no restringida  $\pi_{12} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  no tiene puntos críticos. La regularidad de un mapeo es la condición que se necesita para garantizar que la preimagen de un punto sea una variedad. Resumimos esto en el siguiente



Figure 6: Puntos críticos de la proyección de la esfera a  ${\rm R}^2$ 

#### 3.9 Teorema (Preimagen)

Sea v un valor regular del mapa  $f: M \longrightarrow N$ . Entonces  $L = f^{-1}(v)$  es vacío o una sub-variedad de M de dimensión dim(M) - dim(N). Además, tenemos

$$T_x L = \ker(df_x)$$

ya que localmente el espacio tangente a L es el espacio de desplazamientos diferenciales que no cambian el valor de f.

Nos preguntamos ahora cuándo la preimagen de una variedad  $V \subset N$  es una variedad. Esto nos lleva al concepto de *transversalidad*, el cual es fundamental en este trabajo.

#### 3.10 Definición

Se<br/>a $f:M\longrightarrow N$ un mapeo suave, yVuna sub-variedad d<br/>eN. Decimos que f es transveral <br/>aVsi

$$df_x(T_xM) + T_{f(x)}V = T_{f(x)}N\tag{1}$$

en cada punto  $x\in f^{-1}(V).$  Denotamos esta relación como  $f\pitchfork V$ 

Esta noción la podemos interpretar como una generalización del complemento ortogonal en álgebra lineal. Recordemos que, si (V, <>) es un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno <, > y W es un subespacio de V entonces

$$V = W \oplus W^{\perp},$$

donde

$$W^{\perp} = \{ u \in V | < u, w >= 0 \ \forall w \in W \}$$

La transversalidad entonces significa que  $df_x(T_xM)$  y  $T_{f(x)}V$  no son paralelos.

La transversalidad es una condición más débil que la regularidad. Si  $x \in M$  es regular, entonces  $T_{f(x)}V = N$ . Por tanto, si  $v \in V$  es un valor regular, entonces  $f \pitchfork V$ .

#### 3.11 Teorema (Preimagen generalizada)

Si  $f \Leftrightarrow V$ , entonces  $f^{-1}(V)$  es vacío, o es una variedad de codimensión codim(V).

#### 3.12 Ejemplo

Sea M el cilindro en  $\mathbb{R}^3$  definido por  $x^2 + z^2 = 1$  y sea  $f = \pi_{12}|_M : M \longrightarrow N$ la proyección al plano xy restringida a M. Sea  $V \subset N$  la línea y = 0. Tenemos que df es sobreyeciva excepto en los valores críticos. Sea  $y \in N$ es un valor crítico. El plano tangente a y en N es la recta y = 0, es decir,  $T_yN = V$ . Asimismo, la imagen del plano tangente a  $T_{f^{-1}(y)}M$  es una recta ortogonal a V. Por tanto estos dos supespacios generan el plano xy, de modo que  $f \pitchfork V$ .

Por tanto la preimagen  $f^{-1}V$  es una variedad, en este caso un círculo.

#### 3.13 Ejemplo

Sean  $M, N \ge f$  como en el ejemplo anterior,  $\ge V$  el círculo unitario en el plano xy. Existen dos valores críticos de f en V. En estos puntos, el plano tangente a M bajo df es una recta paralela a la recta tangente en V,  $\ge$  por tanto f no es transversal a V. La preimagen  $f^{-1}(V)$  son un par de elipses que se intersectan en dos puntos,  $\ge f^{-1}(V)$  no es una variedad.



Figure 7: Ejemplo de un mapa f transversal a una sub-variedad V del plano xy. La preimagen de V es un círculo.

#### 3.14 Definición

Un mapeo suave  $f: M \longrightarrow N$  se llama una *inmersión* si cada  $V \in N$  es un valor regular de f.

# 3.15 Teorema

Sea  $f: M \longrightarrow N$  un mapeo suave y  $U = f^{-1}(v)$  para algún  $v \in N$ . Las siguientes propiedades son equivalentes.

- (i) v es un valor regular de f.
- (ii)  $f \pitchfork \{v\}$
- (iii)  $f|_U$  es una inmersión.



Figure 8: f no es transversal a V. La tangente en V y la imagen del plano tangente en M son paralelos

**Demostración**. Se sigue directamente de la definición y de que el plano tangente a una variedad que consiste en un solo punto es el subespacio  $\mathbf{0}$ .  $\diamond$ .

Cualquiera de estas condiciones implica que U es una variedad de codimensión  $\dim(N)$ .

Uno de los teoremas importantes del Análisis nos dice que casi todos los valores de una función suave son regulares. Este resultado será utilizado para evitar condiciones singulares.

# 3.16 Teorema (Sard)

Sea  $f: M \longrightarrow N$  un mapeo suave de variedades, y sea C el conjunto de puntos críticos de f en M. Entonces f(C) tiene medida 0 en N.

#### 3.17 Corolario

Sea  $f: \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^n$  un mapeo suave y  $r \ge n$ . Entonces para casi todo  $v \in \mathbb{R}^n$ el conjunto  $f^{-1}(v)$  es vacío o una variedad de dimensión r - n

En el presente trabajo consideraremos sólo conjunto semi-algebraicos y mapeos polinomiales, de esta forma el conjunto de puntos críticos será siempre semialgebraico. En este caso, un subconjunto de medida 0 será un subconjunto de dimensión menor.

Una prueba del teorema de Sard y del siguiente resultado puede encontrarse en [3].

#### 3.18 Lema (Mapa genérico)

Sean M, N y B variedades diferenciables, y V una sub-variedad de N. Supongamos que

 $\Phi: M \times B \longrightarrow N$ 

un mapeo suave tal que para todo  $b \in B, \Phi_b : M \longrightarrow N$  es suave, donde

 $\Phi_b(x) = \Phi(x, b)$ 

Si  $\Phi \pitchfork V$ , entonces  $\Phi_b \pitchfork V$  para casi todo  $b \in N$ 

# 4 Estratificaciones

Las variedades diferenciabñes se ven localmente como espacios ecuclidianos de dimensión fija. Existen ejemplos de conjuntos importantes que tienen vecindades euclidianas en casi todo punto, pero que no son variedades. En particular, los conjuntos algebraicos pueden tener conjuntos singulares de menor dimensión. Whitney [4] demostró que un conjunto algebraico o semialgebraico de dimensión d puede ser particionado en un número finito de variedades de dimensiones en el rango [0, d]. Estas particiones, llamadas *estratificaciones*, poseen muchas de las propiedades de las variedades suaves.

#### 4.1 Definición

Una estratificación <u>S</u> de un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^r$  es una partición de S en un número finito de subconjuntos disjuntos  $S_i$  llamados estratos tales que cada  $S_i$  es una variedad.

#### 4.2 Definición

Una estratificación <u>S</u> satisface la Condición de Frontera si, siempre que  $U \cap \overline{V} \neq \emptyset$  con  $U, V \in \underline{S}$  se tiene que  $U \subset \overline{V}$ . Decimos que U es adherente a V.

La relación de adherencia es transitiva, y define un orden parcial en los estratos de S. Los teoremas en estratificaciones requieren las siguientes condiciones para los estratos adherentes.

#### 4.3 Las condiciones de Whitney

Sean U, V estratos de una estratificación <u>S</u> tales que  $U \subset \overline{V}$ . Sea  $x \in U$ y  $\{x_i\}, \{y_i\}$  sucesiones en U y V respectivamente que convergen a x. Las condiciones de Whitney son las siguientes

- (A) Si  $\{T_{y_i}\}V \to \tau$ , entonces  $T_x$  entonces  $T_xU \to \tau$ .
- (B) Si  $\{T_{y_i}V \to \}\tau$  y  $\{\overline{x_iy_i}\} \to l$  entonces  $l \subset \tau$ ,

donde  $\overline{x_i y_i}$  es la línea que pasa a través de  $x_i y y_i$ .

Observemos que (B) implica (A). Una estratificación que cumple con estas condiciones se llama una *estratificación de Whitney* o *estratificación regular*. La noción de convergencia de subespacios vectoriales es intuitiva geométricamente. Una definición precisa la podemos encontrar en [5].

#### 4.4 Ejemplo (La sombrilla de cartón)

Sea  $A \subset \mathbb{R}^3$  el conjunto algebraico definido por  $y^2 = zx^2$ . Podemos estratificar A en los conjuntos  $A_0$ , el eje z, y  $A_1 = A \setminus A_0$ . Esta estratificación no satisface la condición de frontera, ya que  $A_0 \cap \overline{A_1} \neq \emptyset$  pero  $A_0 \subsetneq \overline{A_1}$ . Tampoco es una estratificación de Whitney. Consideremos una sucesión de puntos en  $A_1$  en el eje x que convergen al origen. Los planos tangentes a esos puntos convergen al plano x - y. Pero el plano tangente a  $A_0$  en el origen es el eje z, el cual no está contenido en el plano xy. Por tanto no se satisface la condición (A).

Podemos dar una estratificación de Whitney de A como sigue: dividimos  $A_0$ en los conjuntos z > 0, z = 0 y z < 0. El espacio tangente al origen es **0**, el cual está trivialmente contenido en el límite de cualquier sucesión de planos tangentes. A continuación veremos que la estratificación inducida por los conjuntos *invariantes de signo* de una colección de polinomios satisface la condición de frontera y las condiciones de Whitney.



Figure 9: La sombrilla de cartón  $y^2 = zx^2$ 

Definimos  $R^- = (-\infty, 0), R^+ = (0, \infty)$ . Entonces la estratificación

 $\underline{\mathbf{R}} = \{\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^-, \{\mathbf{0}\}\}$ 

es una estratificación regular de Whitney de la recta real. Es fácil probar que el producto de estratificaciones de Whitney es una estratificación de Whitney (ver [5]). Así,

$$\underline{R^n} = (\underline{R})^n$$

es una estratificación de Whitney de  $\mathbb{R}^n$ .

#### 4.5 Definición

Sea  $F : \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^n$  un mapa polinomial. Una secuencia de signo es un elemento  $\sigma \in \underline{\mathbb{R}^n}$ . El conjunto  $F^{-1}(\sigma)$  es llamado un conjunto signo-invariante de F. Se dice que el mapeo F define el conjunto semi-algebraico S si Spuede escribirse como la unión de conjuntos signo-invariantes de F.

Podemos generalizar la noción de transversal a una estratificación  $\underline{A}$  como

$$F \pitchfork \underline{A} \iff F \pitchfork U$$
 para todo  $U \in \underline{A}$ 

El siguiente lema establece que casi toda perturbación en los términos constantes de todos los polinomios que definen S causa que los conjuntos signoinvariantes sean una estratificación de Whitney de  $\mathbb{R}^r$ .



Figure 10: Estratificación de la sombrilla de cartón. (a) Estratificación no regular, (b) Estratificación regular

#### 4.6 Lema (Posición general 1)

Se<br/>a $F:\mathbf{R}^r\longrightarrow\mathbf{R}^n$  un mapa polinomial y $\epsilon\in\mathbf{R}^n$  un parámetro. Definimos<br/>  $F_\epsilon:\mathbf{R}^r\longrightarrow\mathbf{R}^n$  por

$$F_{\epsilon}(x) = F(x) + \epsilon$$

Entonces para casi todo  $\epsilon \in \mathbb{R}^n$ ,  $F_{\epsilon} \pitchfork \underline{\mathbb{R}}^n$  y  $F_{\epsilon}^{-1}(\underline{\mathbb{R}}^n)$  es una estratificación de Whitney de  $\mathbb{R}^r$ .

**Demostración.** Aplicamos el lema del mapa genérico a  $\Phi : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$\Phi(x,\epsilon) = F(x) + \epsilon$$

para concluir que el conjunto

$$\{\epsilon \in \mathbb{R}^n | F_\epsilon \text{ no es transversal a } \sigma\}$$

tiene medida 0 para cada  $\sigma$ . Como hay un número finito de  $\sigma$ 's, se tiene que  $F_{\epsilon} \oplus \underline{\mathbf{R}}^n$  para casi todo  $\epsilon$ .

En [5] se muestra que la imagen inversa de una estratificación de Whitney es una estratificación de Whitney bajo un mapa transversal. Como  $\underline{\mathbf{R}}^n$  es una estratificación de Whitney entonces  $F_{\epsilon}^{-1}(\underline{\mathbf{R}}^n)$  es una estratificación de Whitney  $\diamondsuit$ 

Observemos que, si el conjunto semi-algebraico S está definido por un mapa polinomial F, y  $F \pitchfork \underline{\mathbb{R}}^n$ , entonces los conjuntos signo-invariantes contenidos en S consitutyen una estratificación de Whitney de S. Asumiremos que S puede estratificarse de esta forma, y  $\underline{S}$  denota la estratificación de S en conjuntos signo-invariantes.

# 4.7 Lema

Si  $F : \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^n$  define  $S \neq F \oplus \underline{\mathbb{R}}^n$ , entonces  $F^{-1}(\underline{\mathbb{R}}^n)$  satisface la condición de frontera.

#### 4.8 Ejemplo

Consideremos el cilindro cerrado definido por

$$(f_1 \le 0) \land (f_2 \ge 0) \land (f_3 \le 0),$$

donde  $f_1 = x^2 + y^2 - 1$ ,  $f_2 = y + 1$ ,  $f_3 = y - 1$ .

El conjunto puede particionarse en estratos suaves, cada uno de los cuales es un conjunto signo-invariante. Indexamos estos conjuntos por un triple

$$\langle sgn(f_1, sgn(f_2), sgn(f_3) \rangle$$

En este caso el mapa polinomial  $F = (f_1, f_2, f_3)$  es transversal a  $\underline{\mathbf{R}}^3$  así que esta estratificación es regular. Observemos que la codimensión de cada estrato es el número de polinomios que son 0 en su triple de signos. Esto es cierto en general. Sea  $\underline{S}$  la estratificación descrita de un conjunto semialgebraico, para cada mapeo  $f : \mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R}^k$ , definimos el *conjunto crítico* de  $f|_{\underline{S}}$  como la unión de los conjuntos críticos de  $f|_U$  para todo  $U \in \underline{S}$ . Asimismo, los valores críticos de  $R^k$  son valores regulares.

Si f toma valores en R y S es semi-algebraico,  $f|_{\underline{S}}$  tiene un número finito de valores críticos.

Una propiedad crucial de las estratificaciones es que el tipo topológico de las secciones  $f|_{S}^{-1}(v)$  cambia sólo en los valores críticos de  $f|_{\underline{S}}$ .

#### 4.9 Definición

Una *isotopía* es una homotopía tal que cada mapeo es un difeomorfismo. Una *retracción* de una variedad M en una sub-variedad N de M es un mapeo suave  $f: M \longrightarrow N$  tal que  $f|_N : N \longrightarrow N$  es la identidad. Decimos que Nes un *retracto de deformación* de M.



Figure 11: Cilindro del ejemplo anterior y su estratificación en conjuntos signo-invariantes

# 4.10 Teorema (Isotopía)

Sea  $f: \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}$  una función suave, S un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^r$  con estratificación de Whitney  $\underline{S}$ . Sea (c, d) es un intervalo abierto en  $\mathbb{R}$  que no contiene valores críticos de  $f|\underline{S}$ . Entonces todas las secciones  $f|_S^{-1}(v)$  con  $v \in (c, d)$  son isotópicas, y  $f|_S^{-1}(v)$  es homeomorfo a  $f|_S^{-1}(v) \times (c, d)$ .

Este resultado fue probado primero por Thom [6] y puede ser inferido de [5], sección II, teorema 5.2. Se usa la notación de cortes  $S|^B = f|_S^{-1}(B)$  para  $B \subset \mathbb{R}$ . La prueba hace uso del siguiente

#### 4.11 Lema (Retracción)

Sea  $(c,d) \subset \mathbb{R}$  un intervalo que no contiene puntos críticos de  $f|_{\underline{S}}$ . Entonces  $S|^{(-\infty,c]}$  es un retracto de deformación de  $S|^{(-\infty,d]}$ 

# 5 La silueta

En la construcción de la silueta, necesitamos calcular los puntos extremos de un estrato con respecto a alguna coordenada, digamos  $x_i$ . Estos puntos extremos son los puntos críticos de la proyección en la *i*-ésima coordenada  $\pi_i : \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}$ . Generalizamos esta notación para definir

$$\pi_{i_1,\ldots,i_k}: \mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R}^k$$

como la proyección en las coordenadas  $i_1, ..., i_k$ . Entonces los puntos extremos de U con respecto a  $x_i$  son los puntos críticos de  $\pi_i|_U$ . En nuestro caso, cada estrato  $U \in \underline{S}$  es un subconjunto abierto del kernel de un mapa  $f: \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^n$ . El siguiente lema es una prueba simple para determionar los puntos críticos de cualquier mapa  $g|_U$ .

#### 5.1 Lema

Sea U un sibconjunto abierto del kernel de un mapa  $f : \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , y supongamos que  $f \pitchfork \{0\}$ . Sea  $g : \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^m$  un mapeo. Entonces  $x \in U$  es un punto crítico de  $g|_U$  si y sólo si la matriz

$$d(f,g)_{x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{1}}{\partial x_{1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_{1}}{\partial x_{r}}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n}}{\partial x_{1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_{n}}{\partial x_{r}}(x) \\ \frac{\partial g_{1}}{\partial x_{1}}(x) & \cdots & \frac{\partial g_{1}}{\partial x_{r}}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_{m}}{\partial x_{1}}(x) & \cdots & \frac{\partial g_{m}}{\partial x_{r}}(x) \end{pmatrix}$$
(\*\*)

tiene rango menor que m + n en x.

**Demostración**. Observemos que las primeras n filas de  $d(f,g)_x$  son las filas de  $df_x$ , y las siguientes m filas son las filas de  $dg_x$ . Tenemos que x es punto crítico de  $g|_U$  si y sólo si  $d(g|_U)_x$  no es sobreyectiva, es decir, si y sólo si dim $(dg_x(T_xU)) < m$ . Esto es cierto si y sólo si existe un vector distinto de  $0 \ u \in T_xU$  tal que  $dg_x(u) = 0$ . Esto implica que u es ortogonal a todas las filas de  $dg_x$ .

Como  $T_x U = \ker(df_x)$  entonces u debe ser ortogonal a todas las filas de  $df_x$ . Tal u existe si y sólo si  $d(f,g)_x$  tiene rango menor que m + n en x.

#### 5.2 Corolario

El conjunto crítico  $\Sigma(g|U)$  es un subconjunto cerrado de U ya que se define como el conjunto de ceros de un número finito de determinantes de  $d(f,g)_x$ . Si U es semi-algebraico y g es mapa polinomial, entonces  $\Sigma(g|U)$  es semialgebraico.

#### 5.3 Ejemplo

Sea f el polinomio  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ . Entonces  $U = \ker(f)$  es la esfera unitaria en R<sup>3</sup>. Sea  $g = \pi_1$ . Entonces los puntos críticos de  $g|_U$  son los puntos en U en los que la matriz

$$d(f,g)_x = \left(\begin{array}{rrr} 2x & 2y & 2z\\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

es singular. La matriz tiene rango menor que 2 si y sólo si y = z = 0 y los puntos en U que satisfacen esta condición son (-1,0,0) y (1,0,0). Estos son los puntos en los que  $g|_U$  alcanza sus valores extremos -1 y 1.

#### 5.4 Lema (Cortes)

Sea  $M \subset \mathbb{R}^r$  una variedad que es el kernel de un mapa  $f : \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^n$  con  $f \pitchfork \{0\}$ . Entonces el conjunto crítico  $\Sigma(\pi_{12}|_M)$  es la unión del conjunto crítico  $\Sigma(\pi_1|_M)$  y todos los conjuntos críticos  $\Sigma(\pi_2|_N)$ , donde N es un corte de la forma

$$N = \pi_1|_M^{-1}(v) \setminus \Sigma(\pi_1|_M)$$

para algún  $v \in \mathbf{R}$ .

**Demostración.** Formamos una matriz de la forma (\*\*), cuyas filas son el jacobiano de f seguido por  $\pi_1$ , seguido por  $\pi_2$ . Entonces  $\Sigma(\pi_{12}|_M)$  es el conjunto de puntos de M donde la matriz es singular. Existen dos posibilidades para que esto suceda,

- (i) Las primeras n + 1 filas son linealmente dependientes, lo cual ocurre si y sólo si x es un punto crítico de  $\pi_1|_M$ .
- (ii) La última fila es dependiente en las primeras n+1 filas, lo cual ocurre si y sólo si x es un punto crítico de  $\pi_2|_N$  para algún corte  $N = \pi_1^{-1}|_M(v)$  de M.  $\diamondsuit$

#### 5.5 Ejemplo

Sea M la esfera unitaria definida por  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ . Para la función  $g = pi_{12}|_M$ , la matriz g tiene la forma

$$d(f,g) = \left(\begin{array}{rrr} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

la cual es singular  $\iff z = 0$ . Entonces  $C = \Sigma(\pi_{12}|_M)$  es el círculo unitario en  $\mathbb{R}^2$ . Los puntos críticos de  $\pi_1|_M$  son los puntos (-1, 0, 0) y (1, 0, 0). Cada conjunto  $\pi_1^{-1}(v)$  es un corte a través de M en x = v. Los puntos críticos de  $\pi_2|_N$  en cada corte

$$N = \pi_1^{-1}(v) \setminus \Sigma(\pi_1|_M)$$

son los puntos extremos de y en N, sujetos a la restricción z = 0. La unión de los puntos críticos de todos los cortes junto con los puntos críticos de  $\pi_1|_M$  es la curva C.

#### 5.6 Lema

Sea  $f : \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^k$  un mapeo, y supongamos que S es cerrado con estratificación de Whitney <u>S</u>. Entonces el conjunto crítico  $\Sigma(f|_S)$  es cerrado.

Queremos escoger una proyección a de tal forma que  $\Sigma(a|_U)$  sea una variedad 1-dimensional para todo  $U \in \underline{S}$ . Para formalizar los conceptos necesarios, debemos introducir el concepto de *jets*.

Sean M y N variedades de dimensiones m y n, respectivamente. Definimos una relación de equivalencia  $\sim_k$  en pares (f, x) de la forma

$$(f, x) \sim_k (f', x') \iff x = x', f(x) = f(x')$$

y en coordenadas locales en M y N alrededor de x y f(x), respectivamente, las derivadas parciales en x en f y f' son iguales hasta orden k.

#### 5.7 Definición

Sea  $[f, x]_k$  la clase de equivalencia de (f, x) bajo  $\sim_k$ . Entonces  $[f, x]_k$  es llamado un k- jet de mapeos de M a N con fuente x y objetivo f(x). El conjunto de todos los k-jets de M a N se denota por  $J^k(M, N)$ .

 $J^k(M, N)$  tiene una estructura de variedad, y es isomorfo a  $M \times N$ . Por ejemplo, si  $N = \mathbb{R}^n$  y m = dim(M) entonces  $J^1(M, N)$  es isomorfo a

$$\mathbf{R}^{mn} \simeq \mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n),$$

el conjunto de transformaciones lineales de  $\mathbb{R}^m$  en  $\mathbb{R}^n$ .

Para cada  $f: M \longrightarrow N$  existe un mapeo canónico

$$j^k f: M \longrightarrow J^k(M, N)$$

dado por  $j^k f(x) = [f, x]_k$  y es llamado el k-jet de f. Asumimos que  $m \ge n$ . Para s = 1, ..., n definimos

$$\Sigma^{s} = \{ [f, x]_{1} \in J^{1}(M, N) | \dim \ker(df_{x}) = s \}$$

Si  $\Sigma^{s}(f)$  denota el subsconjunto de  $\Sigma(s)$  donde df tiene kernel s, entonces

$$\Sigma^s(f) = (j^1 f)^{-1} (\Sigma^s)$$

Entonces  $\Sigma^s$  es una variedad isomorfa a  $\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ , el conjunto de transformaciones lineales de  $\mathbb{R}^m$  a  $\mathbb{R}^n$  que tienen corango s, y tiene codimensión  $(m-n)s + s^2$ . Por tanto

#### 5.8 Lema

Sea  $f: M \longrightarrow N$  un mapeo suave con dim(M) = m, dim(N) = n y  $m \ge n$ . Si  $j^1 f \pitchfork \Sigma^s$ , entonces  $\Sigma^s(f) = (j^1 f)^{-1}(\Sigma^s)$  es una sub-variedad de M de codimensión  $(m - n)s + s^2$ .

La condición de transversalidad del lema anterior recibe un nombre especial. Decimos que f es *uno-genérica* si  $j^1 f \pitchfork \Sigma^s$  para todo s. Si se satisface esta condición, se simplificarpa considerablemente la forma de los conjuntos críticos  $\Sigma(f)$ .

Observemos que un mapeo lineal  $a : \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^n$  puede ser especificado por rn valores, y podemos escribir sin confusión  $a \in \mathbb{R}^{rn}$ . Tenemos el siguiente

#### 5.9 Lema

Sea  $a : \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^n$  un mapeo lineal,  $M \subset \mathbb{R}^r$  una variedad de dimensión  $m \ge n$ . Entonces para casi todo  $a \in \mathbb{R}^{rn}$ ,  $a|_M$  es uno-genérica.

#### 5.10 Lema (Posición general 2)

Sea  $a : \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^2$  un mapeo lineal y  $M \subset \mathbb{R}^r$  una variedad con dim $(M) \ge 1$ . Entonces para casi todo  $a \in \mathbb{R}^{2r}$ , el conjunto crítico  $\Sigma(a|_M)$  es una variedad unidimensional.

**Demostración.** Si dim(M) = 1 entonces  $\Sigma(a|_M) = M$  y el resultado es trivial. Si dim(M) > 1 aplicamos el lema anterior para concluir que  $j^1(a|_M) \pitchfork \Sigma^s$  para casi todo  $a \in \mathbb{R}^{2r}$ . Los mapeos con codominio  $\mathbb{R}^2$  tienen corango a lo más 2, por tanto

$$\Sigma(a|_M) = \Sigma^1(a|_M) + \Sigma^2(a|_M).$$

Aplicando el lema (5.8), tenemos que n = 2 y, para s = 1 tenemos que  $\Sigma^1(a|_M)$  es una variedad de codimensión  $(m-2)1 + 1^2 = m - 1$  en M, por tanto es unidimensional. Aplicando el mismo lema para s = 2 tenemos que  $\Sigma^2(a|_M)$  tiene codimensión  $(m-2)2 + 2^2 = 2m$ , es decir, es vacía, y

$$\Sigma(a|_M) = \Sigma^1(a|_M)$$

es una variedad unidimensional para casi todo  $a \in \mathbb{R}^{2r}$ .

#### 5.11 Ejemplo (La silueta del toro)

Consideremos un toro con si eje proncipal normal al plano xy. Para la proyección en el plano xy, el conjunto crítico consiste de dos círculos concéntricos.

# 6 Tubos alrededor de variedades

Podemos reducir el problema de calcular los puntos críticos en variedades de dimensión arbitraria a encontrar puntos críticos en ciertas hipersuperficies. Supongamos que queremos encontrar los puntos críticos de un mapa restringido al conjunto algebraico M definido por  $f_1 = 0, f_2 = 0, ..., f_n = 0$ . Definimos el polinomio

$$g = \sum_{i=1}^{n} f_i^2 \tag{2}$$

Observemos que  $x \in M \iff g(x) = 0$ . El resultado que se presenta a continuación nos permite encontrar puntos críticos de variedades arbitrarias usando sólo hipersuperficies. Se muestra que, si p es un punto crítico no degenerado de  $a|_M$ , entonces para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, existe un



Figure 12: La silueta del toro

punto crítico de  $a|_{g^{-1}(\epsilon)}$  "cerca" de p. La prueba de este resultado ocupa varios lemas que se prueban en [1]. Aquí solamente enunciaremos el resultado.

Un punto crítico de un mapeo suave  $f: M \longrightarrow N$  es no degenerado si el Hessiano (es decir, la matriz de segundas derivadas parciales en coordenadas locales) es no singular.

Otro concepto importante a considerar en lo subsecuente es el concepto de *índice* de un punto crítico no degenerado. Intuitivamente, el índice corresponde al número de direcciones en los que f disminuye. Formalmente

#### 6.1 Definición

Sea  $f: M \longrightarrow N$  un mape<br/>o suave entre variedades y  $p \in M$  un punto crítico d<br/>efno degenerado. El *índice* de p es la dimensión del subespacio más grande del espaci<br/>o tangente  $T_pM$  en la cual el Hessiano es negativo definido.

Observemos que el índice de p es el número de valores propios negativos del

Hessiano de f.

#### 6.2 Teorema

Sea p un punto crítico no degenerado de  $a|_M$ . Entonces, para cualquier  $\rho > 0$  y  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, existe un punto crítico q de  $a|_{g^{-1}(\epsilon)}$  tal que  $d(p,q) < \rho$ , donde  $d(\cdot, \cdot)$  es la distancia euclidiana en  $\mathbb{R}^r$ .

# 7 El mapa de caminos

Ahora tenemos las herramientas para construir un subconjunto semi-algebraico de S que será el mapa de caminos de S, denotado por R(D). Este mapa nos da candidatos para encontrar un camino entre dos configuraciones en planeación de movimientos. El mapa de caminos deberá de satisfacer la siguiente condición:

#### 7.1 Definición

Un subconjunto  $R \subset S$  satsiface la *condición de mapa de caminos* si vualquier componente conexa de S contiene una sola componente conexa de R.

Dada una estrtificación <u>S</u> de S, definimos un refinamiento que es una estratificación de Whitney <u>S'</u>, llamada la *estratificación compatible con la silueta* de S. Esta estratificación incluye como subonjunto una estratificación de la silueta  $\Sigma = \Sigma(\pi_{12}|\underline{S})$ .

Sea  $\underline{\Sigma} = \{\Sigma(\pi_{12}|_U) | U \in \underline{S}\}$  una estratificación de  $\Sigma$ . Esta no es una estratificación de Whitney, ya que los puntos las frontera de las curvas pueden intersectarse. Definimos  $B = \{\partial C | C \in \underline{\Sigma}.$  Sea <u>B</u> la estratificación de B en conjuntos de un punto. Entonces

$$\underline{\Sigma'} = \underline{B} \cup \{U \setminus B | U \in \underline{\Sigma}\}$$

es una estratificación de Whitney de  $\Sigma$ . Definimos ahora

$$\underline{S}' = \underline{\Sigma}' \cup \{U \setminus \Sigma | U \in \underline{S}\}.$$

Entonces  $\underline{S}'$  es una estratificación de Whitney de S, e incluye a  $\underline{\Sigma}'$  como subconjunto.

# 8 El mapa de caminos básico

Usamos la notación

$$\underline{A} \cap V = \{A \cap V | A \in \underline{A}$$

y la notación de cortes

$$\underline{A}|^B = \underline{A} \cap \pi_1^{-1}(B)$$
 para  $B \subset \mathbf{R}$ 

#### 8.1 Definición

Sea <u>S</u> una estratificación de Whitney de un compacto. El mapa de caminos  $R_0(S)$  es definido inductivamente como

- 1. Si dim( $\underline{S}$ ) = 1 entonces  $R_0(\underline{S}) = S$ .
- 2. De otro modo sea  $\Sigma = \Sigma(\pi_{12}|\underline{S})$  la sileta de  $S \ge \underline{S'}$  la estratificación compatible con la silueta de S.

El mapa de caminos de un conjunto dimensional es el conjunto mismo. De otra forma, el mapa de camninos es la unión de la silueta  $\Sigma$  y los mapas de cortes a través de <u>S'</u> en valores críticos de  $\pi_1|_{\underline{S'}}$ . Si la dimensión de <u>S</u> es k entonces la dimensión de <u>S'</u> $|^v$  es a lo más k - 1.

#### 8.2 Ejemplo (El mapa de caminos del toro)

Consideremos el toro con eje normal al plano xy. La silueta del toro no es conexa. El mapa de caminos consiste en la silueta y los mapas de caminos calculados recursivamente en los cortes x = c a través de puntos críticos de  $\pi_1|_{\Sigma}$ . En este caso hay cuatro puntos críticos. En dos de ellos, el corte consiste de un solo punto. Para los otros dos, los cortes son unidimensionales, y consisten de pares de curvas que se intersectan en los puntos críticos. Para demostrar qie  $R_0(\underline{S})$  satisface la condición del mapa de caminos, necesitamos el siguiente

#### 8.3 Lema

Si para cada corte  $S|^v$  a través de un valor crítico  $v \in P_c$ ,  $R_0(\underline{S'}|^v)$  satisface la condición del mapa de caminos, entonces  $R_0(\underline{S})$  satisface la condición del mapa de caminos.



Figure 13: El mapa de caminos del toro, mostrando los mapas calculados recursivamente a través de cortes

**Demostración.** Sean  $v_1, ..., v_m$  los puntos críticos de  $\pi_1|_{\underline{S'}}$  en orden ascendente y definimos los puntos  $u_0, ..., u_m$  como

$$u_{i} = \begin{cases} v_{1}, & i = 0\\ \frac{v_{i} + v_{i+1}}{2}, & 1 \le i \le m - 1\\ v_{m}, & i = m \end{cases}$$

Entonces, aplicando el lema de retracción dos veces, obtenemos que  $S|^{[u_{i-1},v_i]}$ es un retracto de  $S|^{[u_{i-1},u_i]}$ , y  $S|^{v_i}$  es un retracto de deformación de  $S|^{[u_{i-1},v_i]}$ . Esta retracción es compatible con la estratificación  $\underline{S'}$ . Por hipótesis, el retracto satisface la condición del mapa de caminos, de modo que si  $C_i$  es una componente conexa de  $S|^{u_{i-1},u_i}$ , entonces  $R_0(\underline{S}) \cap C_i$  es conexa. Sea ahora U una componente conexa de S. Entonces U es la unión de un número finito de  $C_i$ 's, que denotamos por  $U_1, ..., U_n$  y los ordenamos de tal forma que todo  $U_j$  intersecta algún  $U_k$  para k < j. Los  $U_i$ 's son cerrados, de modo que si  $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ , su intersección es compacta y  $\pi_2$  alcanzará su extremos en la intersección, y este punto está en la silueta. Por tanto si  $U_j$  y  $U_k$  se intersectan, también lo harán sus mapas de caminos. Así,  $R_0(\underline{S}) \cap U_1, ..., R_0(\underline{S}) \cap U_n$  es una secuencia ordenada de conjuntos cada uno de los cuales intersecta un conjunto anterior. Por tanto su unión  $R_0(\underline{S}) \cap U$ es conexa.  $\diamondsuit$ 

#### 8.4 Teorema

 $R_0(\underline{S})$  satisface la condición del mapa de caminos.

**Demostración**. Si  $\underline{S}$  es una estratificación de Whitney de S y U es una componente conexa de S, podemos ordenar los conjuntos  $U \cap \underline{S}$  como  $V_1, ..., V_n$  de tal forma que  $V_j$  intersecte a  $V_k$  para todo j y algún k < j. Entonces  $R_0(\underline{S}) \cap V_1, ..., R_0(\underline{S}) \cap V_n$  es una secuencia ordenada de conjuntos con la propiedad de intersección, y de esta forma  $R_0 \cap U = R_0 \cap \bigcup_{i=1}^n V_i$  es conexa. La demostración concluye aplicando el lema anterior y demostrando que  $\underline{S'}|^v$  es una estratificación de Whitney para puntos críticos v.  $\diamondsuit$ 

#### 8.5 Corolario

Para cada estrato  $U \in \underline{S}, \overline{U} \cap S$  satisface la condición del mapa de caminos como un subconjunto de  $\overline{U}$ .

**Demostración**  $\overline{U}$  hereda una estratificación de Whitney compatible con la silueta de <u>S'</u>, y los cortesse toman de los puntos críticos de la silueta de  $\overline{U}$ .

# 9 Curvas de conexión

Queremos encontrar un conjunto unidimensional que satisface la condición de mapa de caminos dentro de la cerradura de cada estrato en  $\underline{S}$ . El primer paso es definir una curva de conexión para un estrato U que conecte cualquier punto en  $p \in \overline{U}$  a otro punto q en la silueta de  $\overline{U}$ . Esta curva debe estar contendida enteramente en  $\overline{U}|^v$ .

U está contenido en el kernel de conjunto de n polinomios, con n = codim(U). Similarmente,  $U|^v$  está contenido en  $\hat{U}$ , que es la intersección de este kernel con  $\pi_1^{-1}(v)$ .  $\hat{U} \setminus \{p\}$  es una variedad de codimensión n + 1. Entonces

$$\underline{\hat{U}} = \{ \hat{U} \setminus \{p\}, \{p\} \}$$

es una est ratificación de Whitney de  $\ddot{U}.$ 

#### 9.1 Definición

Definimos  $L_0(p, U)$  como la componente conexa de  $R_0(\hat{U}) \cap \overline{U}$  que contiene a p, donde la silueta es calculada usando la proyección  $\pi_{23}$ .

La curva  $L_0$  contiene un punto  $p_1$  extremo con respecto a  $\pi_2$ . Si este punto no está en la silueta de U, o está en un estrato  $U_1$  adherente a U. Asimismo, la curva  $L_0(p_1, U_1)$  contiene un punto en la silueta de  $U_1$  o está en un estrato  $U_2$  adherente a  $U_1$ . Observemos que

$$\dim_U > \dim_{U_1} > \dim(U_2)$$

Recursivamente definimos  $(p_i, U_i)$ . Sea k el mínimo valor tal que  $p_k \in \Sigma(\overline{U})$ , el cual existe por argumentos de dimensionalidad. Sea

$$L_1(p,U) = L_0(p,U) \cup \bigcup_{i \le k} L_0(p_i,U_i)$$

Entonces  $L_1(p, U)$  es una curva continua que une p con un punto de la silueta de  $\overline{U}$ .

En el caso de que varias componentes conexas se intersecten en p, que es precisamente el caso en que p es un punto crítico de  $\pi_1|_U$  de *índice* distinto de 0, necesitamos conectar p a la silueta de cualquier componente conexa de  $C \setminus \{p\}$ , donde C es la componente conexa de  $U|^v$  que contiene p. Para esto necesitamos conectar cualquier componente conexa de  $L_0(p,U) \setminus \{p\}$  a la silueta. Sea  $q_i$  un punto extremo de  $\pi_2$  en la *i*-ésima componente conexa de  $L_0(p,U) \setminus \{p\}$  y sea  $V_i$  el estrato que contiene  $q_i$ . Definimos

$$L_2(p,U) = L_0(p,U) \cup \bigcup_i L_1(q_i, V_i),$$

donde  $L_1(q_i, V_i)$  es vacío si  $q_i$  está ya en la silueta.

Otro tercer caso es cuando p es un punto crítico de  $\pi_1|_U$  de índice 0 (ver [7]). En este caso  $U|^v$  consiste sólo del punto p. En este caso no tiene sentido conectar a p a la silueta de U, ya que ésta consiste de un solo punto. Entonces conectamos p a los estratos en los que p es aherente en  $\pi_1^{-1}(v)$ . Es suficiente hacer esto para estratos de dimensión dim(U) + 1. Sean  $W_i$  tales estratos. Definimos entonces

$$L_3(p,\underline{S}) = \bigcup_i L_1(p_i, W_i).$$

Dado un punto arbitrario p definimos

$$L(p,\underline{S}) = \begin{cases} L_1(p,U), & p \text{ es un punto regular de } \pi_1|_U \\ L_2(p,U), & p \text{ es un punto critico de indice } \neq 0 \\ L_3(p,U), & p \text{ es un punto critico de indice } \neq 0 \end{cases}$$

# 10 El mapa de completo de caminos

Se<br/>a $\Sigma=\Sigma(\pi_{12}|\underline{S})$  la silueta de S, y<br/>  $\underline{S'}$  la estratificación de S compatible con la silueta. Se<br/>a

$$P_c = \Sigma(\pi_1|_{\underline{S'}}) \setminus \{\partial C | C \in \underline{\Sigma}\}$$

entonces el mapa completo de caminos  $R_1(\underline{S})$  está definido por

$$R_1(\underline{S}) = \Sigma \cup \bigcup_{p \in P_c} L(p, \underline{S})$$
(3)

#### 10.1 Teorema

 $R_1(\underline{S})$  satisface la condición del mapa de caminos.

**Demostración**. Sean  $p_1, ..., p_k$  los puntos críticos de  $\pi_1|_{\underline{S'}}$  y  $v_1, ..., v_k$  los correspondientes valores críticos. La prueba es por inducción sobre i = 1, ..., k. Asumimos que  $R_1(\underline{S})|^{[-\infty, v_{i-1})}$  satisface la condición del mapa de caminos, así como la restricción del mapa a la cerradura de un estrato  $\overline{U}|^{[-\infty, v_{i-1})}$  también satisface la condición del mapa de caminos para todo  $U \in \underline{S}$ . Será suficiene probar entonces que esta condición se satisface para cortes  $(-\infty, v_i]$ .

Observemos primero que la condición es válida para estratos U que no "rodeen"  $p_i$ , es decir, tales que  $p_i \notin \overline{U}$  ya que estos estratos, junto con sus siluetas, pueden ser retraídos a  $\overline{S}|^{-\infty,v_{i-1}}$ , por el lema de retracción. Para los otros estratos tenemos las siguientes posibilidades

- (i)  $p_i \in B = \{\partial C | C \in \underline{\Sigma}\}$ . Por el lema de posición general,  $p_i$  no es un punto crítico de  $\underline{\Sigma}$ . Cualquier estrato que rodee  $p_i$  también rodee parte de la silueta que rodea  $p_i$ . Como  $d_{\pi_1}(T_x C) \neq 0$  en la curva C, deben existir puntos en las curvas que estén en  $pi_1^{-1}(v_i - \epsilon)$  para  $\epsilon$  suficientemente pequeño. Se sigue que estas curvas conectan  $p_i$  al corte  $\underline{S}|^{(-\infty,v_{i-1}]}$ .
- (ii)  $p_i$  es un punto regular de  $\pi_1|_U$ . En este caso  $p_i$  está ligado a un punto en la silueta de U o a un estrato en la frontera de U. Por tanto los mapas de caminos de los estratos que rodean U permanecen conexos, ya que estos estratos también tienen el punto de la silueta en la frontera (esto se sigue de la transitividad de la relación de adherencia).
- (iii)  $p_i \in U$  es un punto crítico de  $\pi_1|_U$  de índice  $\neq 0$ . En este caso pueden existir varias componentes conexas de  $U|^{(-\infty,v_i]} \setminus \{p_i\}$  que rodean  $p_i$ .

Sin embargo, cada una de estas componentes debe contener una componente de  $L_0(p, U)$  que conecta  $p_i$  a un punto  $q_i$  en la silueta de esa componente. Por tanto el mapa de caminos de  $\overline{U}|^{(-\infty,v_i]}$  satisface la condición de mapa de caminos, y lo mismo suede para cada estrato que rodea U, por la transitividad de la relación de adherencia.

(iv)  $p_i \in U$  es un punto crítico de índice 0. En este caso el mapa de caminos de  $\overline{U}$  es el punto  $\{p_i\}$ . Conectamos  $p_i$  a los estratos que lo rodean mediante  $L_3(p, S)$ . Por tanto estos estratos  $W_i$  cumplen la condición del mapa de caminos y también los estratos que rodean a los  $W_i$ , por la relación de adherencia.  $\diamondsuit$ 

# 11 El algoritmo del mapa de caminos

El algoritmo se compone en varias partes. El primer algoritmo encuentra las proyecciones de los puntos críticos de  $\pi_{12}$  al plano xy. El segundo algoritmo nos da los puntos de intersección de los puntos críticos de la proyección con una hipersuperficie definida por los ceros de un polinomio. El tercer algoritmo nos da la gráfica de adyacencias de los puntos críticos de la proyección, así como los puntos de intersección de esta curva con hipersuperficies definidas por los ceros de un conjunto de polinomios.

El cuarto algoritmo construye el mapa de caminos básico y tiene una complejidad

$$T_{R_0} = O(n^{1/2r(r-1)}(2d)^{r(r+1)}), \tag{4}$$

donde la variedad M está definida por n polinomios de grado d en r variables. Observemos que r es la dimensión de S.

El quinto algoritmo describe la complejidad de las conexiones de los puntos críticos a la silueta, es decir, construye las curvas de conexión descritas en la sección 9. La complejidad de calcular estas curvas para puntos críticos de índice 0 es

$$T_L = O(nr^4 r^{1/2r(r-1)} (2d)^{r(r+3)} \log^2 dw)$$
(5)

Las curvas para los otros tipos de puntos críticos y regulares requieren menos tiempo que esto.

Finalmente, el sexto algoritmo construye el mapa completo de caminos de la estratificación  $\underline{S}$  de S en conjuntos signo-invariantes.

#### 11.1 Algoritmo 1

**Input** Polinomios  $f_1, ..., f_n$  en r variables  $x_1, ..., x_r$  de grado d que definen una variedad M, y un mapeo lineal  $\pi_{12} : \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^2$ . **Output** Un polinomio  $h(x_1, x_2)$  tal que

$$\pi_{12}(\Sigma(\pi_{12}|_M)) \subset \ker(h)$$

#### Descripción

Utilizando el lema de cortes concluimos que el conjunto crítico de  $\pi_{12}|_M$  es la unión de los conjuntos críticos de  $\pi_2|_{M_c}$  para todos los cortes

$$M_c = \pi_1^{-1}(c) \cap M$$

Aplicamos el teorema del tubo (6.2) y definimos el polinomio

$$g = \sum_{i=1}^{n} f_i^2 \tag{6}$$

Si definimos  $K_c = g^{-1}(\epsilon) \cap \pi_1^{-1}(c)$  entonces en cualquier corte, para  $\epsilon$  suficientemente pequeño, habrá un punto crítico de  $\pi_2|_{K_c}$  cerca de cada punto crítico no degenerado de  $\pi_2|_{M_c}$ . La unión de los puntos críticos de  $\pi_2|_{K_c}$  para todos los cortes es el conjunto crítico  $\pi_{12}|_{g^{-1}(\epsilon)}$ . Por tanto para  $\epsilon$  suficientemente pequeño, existe un punto crítico de  $\pi_{12}|_{g^{-1}}(\epsilon)$  arbitrariamente cercano a todo punto crítico no degenerado de  $\pi_{12}|_M$ .

Por tanto queremos calcular el conjunto crítico de  $\pi_{12}|_{g^{-1}(\epsilon)}$ . Este conjunto está caracterizado por el sistema de ecuaciones

$$g = \epsilon, \frac{\partial g}{\partial x_3} = 0, ..., \frac{\partial g}{\partial x_r} = 0$$
(7)

La solución a este problema se conoce como la *reultante*, descrita en [8] y en el capítulo 3 de [1], donde encontramos que la proyección de los puntos críticos como los ceros de un polinomio  $R(x_1, x_2, \epsilon)$  y estamos interesados en la curva R = 0 en el plano  $x_1 x_2$  cuando  $\epsilon \to 0$ .

Escribiendo a R como un polinomio en  $\epsilon$ , el término constante es un poliniomio  $h(x_1, x_2)$ . Este es el polinomio que buscamos.

Para calcular la complejidad del algoritmo, requerimos calcular la resutante de un sistema de r-2 polinomios de grado 2d-1 y uno de grado 2d. Cada matriz en el cálculo tiene tamaño  $O((6d)^r)$  y necesitamos calcular sólo los  $(2d)^r$  coeficientes de la matriz como polinomios en  $\epsilon$ . El orden de complejidad del algoritmo es

$$O(r^2 (12d^2)^{3r} \log d) \tag{8}$$

operaciones binarias.

#### 11.2 Algoritmo 2

**Input** Un mapeo lineal  $a : \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^2$  y polinomios  $f_1, ..., f_n$  y  $f_k$  en las variables  $x_1, ..., x_r$  de grado d.

**Output** Los puntos de intersección de la curva  $C = \Sigma(a|_M)$  con la hipersuperficie  $f_k = 0$ .

**Descripción** Formamos el polinomio g de  $f_1, ..., f_n$  como en (6), y encontramos la resultante del sistema (7) usando el algoritmo 3.2 de [1]. La resultante es una curva suave unidimensional. La intersección de esta curva con la hipersuperficie  $f_k = 0$  consiste genéricamente de un número finito de puntos y, conforme  $\epsilon \to 0$  estos puntos convergen a los puntos solución que buscamos.

Encontrar los polinomios intermedios en el cálculo de la resultante requiere de  $O(r^3(12d^2)^{3r} \log d)$  operaciones binarias. Aplicando el análisis de este algoritmo al presente algoritmo, el grado de los polinomios es el doble, y esto nos da

$$O(r^3 (2d^2)^{5r} \log^2 d) \tag{9}$$

operaciones binarias.

El tercer algoritmo, que calcula la gráfica de adyacencias de los puntos críticos de  $\Sigma a|_M$  y las intersecciones con las hiperxuperficies  $f_k = 0$  hace uso de la noción de secuencia de Sturm de un polinomio.

#### 11.3 Definición

La secuencia de Sturm de un polinomio p(x) es la secuencia de polinomios

- 1.  $p_0 = p$ ,
- 2.  $p_1 = p'$ ,
- 3.  $p_{i+1} = res(p_{i-1}, p_i),$

donde res(f,g) es el residuo en el algoritmo de la división de f/g.

#### 11.4 Algoritmo 4.3

**Input** Un mapeo lineal  $a : \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^2$  y polinomios  $f_1, ..., f_n$  en r variables  $x_1, ..., x_r$  de grado d que definen un conjunto semi-algebraico S, tales que los primeros m < r polinomios definen una variedad M.

**Output** La gráfica de adyacencias de una curva suave  $C = \Sigma(a|_M)$  y todos

los puntos de intersección de esta curva con las hipersuperficies  $f_i = 0$  para i = m + 1, ..., n. Cada punto y segmento de curva está etiquetado con los signos de todos los  $f_i$ .

**Descripción** Primeramente hacemos uso del algoritmo (11.1) para caclular la proyección de la curva C. Este algoritmo regresa un polinomio h en dos variables  $x_1$  y  $x_2$ . Calculamos la secuencia de tSurm de h como un polinomio en  $x_1$ . El término constante de este polinomio es un polinomio en  $D(x_2)$  en la variable  $x_2$ , llamado el discriminante de h. El discriminante es un poliniomio con un número finito de ceros. Para  $x_2$  en un intervalo entre dos ceros, nos fijamos en las soluciones de la curva h = 0 en  $x_1$ , las cuales forman curvas suaves conforme  $x_2$  varía. Por tanto pueden ser ordenados por la coordenada  $x_1$  en este rango de  $x_2$ .

Dado  $p = (x_1, x_2)$  un punto de intersección de C con alguna hipersuperficie, calculado mediante el algoritmo (11.2), podemos determinar a partir de los signos de la secuencia de Sturm en p si la proyección está en una curva, y el número de curva correspondiente al orden en  $x_1$ -

De esta forma construimos la gráfica de adyacencias, y podemos determinar el signo correspondiente a cada curva mediante la secuencia de Sturm.

Dado que la gráfica tiene grado 2, existe un orden lineal de los puntos a lo largo de cada componente de la gráfica. Exactamente un polinomio cambia de signo en cada punto, por tanto, usando una estructura de datos persistente, podemos almacenar los signos de los n polinomios en cada punto con costo  $O(\log n)$  por punto.

Se necesitan n-m llamadas al algoritmo (11.2) para calcular los puntos de intersección con las superficies, a un costo

$$O(nr^3(2d)^{2r}\log^2 d)$$

Podemos usar aritmética aproximada para calcular las secuencias de Sturm a un costo de  $O(r(2d)^{2r} \log d)$ . La evaluación de toda la secuencia en un punto toma un tiempo del orden

$$O(r^2(2d)^{4r}\log^2 d),$$

y existen menos de  $n(2d)^r$  puntos. Por tanto el costo total del algoritmo es del orden

$$O(n\log nr^3(2d)^{5r}\log^2 d) \tag{10}$$

#### 11.5 Algoritmo 4 (Mapa de caminos básico)

**Input** Polinomios  $f_1, ..., f_n$  en r variables de grado d que definen un conjunto semi-algebraico S. Los  $f_i$  se asume que están en posición general, de

tal forma que la estratificación  $\underline{S}$  de S en conjuntos signo-invariantes es una estratificación de Whitney.

**Output** La gráfica de adyecencias y coordenadas de los puntos del mapa de caminos básico  $R_0(\underline{S})$ 

**Descripción** Primeramente escogemos una proyección uno-genérica a. El mapa de caminos básico consiste en la silueta  $\Sigma(a|\underline{s})$  y los mapas de caminos básicos a través de cortes en los puntos críticos de la silueta.

Para calcular la silueta, llamamos al algoritmo (11.4) en todos los subconjuntos de m < r polinomios. El grafo de la silueta se construye de los grafos de curvas individuales en dos pasos:

- (i) Identificar puntos correspondientes en curvas en estratos de la misma dimensión.
- (ii) Encontrar la posición de puntos en curvas en estratos de menor dimensión.

El paso (i) puede llevarse a cabo en tiempo lineal en r si ordenamos los puntos lexicográficamente.

El paso (ii) puede llevarse a cabo considerando los puntos en la curva en estratos de menor dimensión como puntos de intersección con alguna hipersuperficie  $f_k = 0$ . Por tanto usando la expresión (9) y añadiendo el término lineal en r y el número de subconjuntos de m en n, la gráfica de adyacencias de la silueta puede ser computada en

$$O(\binom{n}{r-1}n\log nr^4(2d)^{5r}\log^3 d) \tag{11}$$

operaciones binarias.

Para el paso recursivo, observemos que hay  $\binom{n}{r-1}$  curvas cada una de las cuales tiene a lo más $(2d)^{2r}$  puntos críticos (el máximo grado de las curvas). Si denotamos por  $T_{R_0}(k)$  como el número de operaciones binarias necesarias en el cómputo del mapa de caminos básico en k dimensiones, entonces tenemos la relación recursiva

$$T_{R_0}(k) = \binom{n}{k-1} (2d)^{2k} T_{R_0}(k-1) + O(n^k \log n \frac{k^4}{k!} (2d)^{2k} \log^3 d).$$
(12)

Resolviendo (12), encontramos que el paso recursivo domina, y que el mapa de caminos básico en r dimensiones requiere

$$T_{R_0} = O(n^{\frac{1}{2}r(r-1)}(2d)^r(r+1))$$
(13)

operaciones binarias.

#### 11.6 Algoritmo 5 (Curvas de conexión)

**Input** Las coordenadas de un punto  $p \in \mathbb{R}^r$ , polinomios  $f_1, ..., f_n$  de grado d en r variables, un mapeo lineal a y la silueta de <u>S</u> (incluyendo la gráfica de adyacencias).

**Output** La curva de conexión L(p, S) definida en la sección 9 y una gráfica modificada de adyacencias que incluya a esta curva.

**Descripción**. Debemos determinar primero si p es un punto crítico. Testeamos los signos de los  $f_i$  en p, y aquellos que sean 0 (digamos m de ellos), definen la geometría local del estrato U que contiene a p. Si la proyección del espacio tangente a este estrato no es sobreyectiva, entonces p es un punto crítico. A continuación, si p es un punto crítico, determinamos su índice. Para hacer esto, básicamente calculamos la dirección del flujo inducido por un campo vectorial en la dirección x. Formamos una matriz H' de tamaño  $(r-m) \times (r-m)$  usando una base local para el espacio tangente de U en p. Entonces el punto crítico p será de índice 0si y sólo si todos los eigenvalores de H' son positivos.

Podemos determinar qué tipo de curva de conexión se necesita. Analizamos el caso más complicado y el que requiere más tiempo, cuando p es un punto crítico de índice 0, en este caso el mapa de caminos de  $\overline{U}$  consiste en el punto  $\{p\}$ , y debemos conectar p a la silueta de todos los estratos adherentes a U de dimensión dim(U) + 1. Primeramente llamamos al algoritmo (11.5) en todos los subconjuntos de tamaño m-1 de los m polinomios que definen U. Para cada gráfica de adyacencias que regresa cada una de estas llamadas, debemos añadir las intersecciones con todas las hipersuperficies  $f_k = 0$ . Nos quedamos solamente con aquellos puntos intermedios en la curva con algún  $f_k = 0$ , terminamos con la gráfica, y la añadimos a la gráfica principal. De otro modo, calculamos el mapa de caminos de algún estrato de menor dimensión. Repetimos esto a lo más r - m veces hasta que obtenemos un punto en la silueta.

Por tanto hay m(r-m) llamadas al algoritmo del mapa básico de caminos en dimensión r-1, cada uno de los cuales en a lo más m polinomios. Del algoritmo (11.5), estas llamadas tienen un costo de

$$O(r^2 r^{\frac{1}{2}(r-1)(r-2)}(2d)^{r(r-1)})$$

El otro paso es añadir una nueva intersección más cercana de alguna hipersuperficie  $f_k = 0$ . La descripción del algoritmo (11.4) establece un tiempo de  $O(r^2(2d)^{4r} \log^2 d)$  operaciones por punto. Considerando el número de puntos de intersección usando la relación de recurrencia (12), encontramos que hay a lo más

$$O(nr^2r^{\frac{1}{2}(r-1)(r-2)}(2d)^{r(r-1)})$$

puntos de intersección. De esta forma el costo total de conectar puntos críticos de orden 0 es

$$T_L = O(nr^4 r^{\frac{1}{2}r(r-1)} (2d)^{r(r+3)} \log^2 d)$$

operaciones binarias. Los otros tipos de curvas de conexión requieren menos tiempo que esto.

### 11.7 Mapa de caminos completo

Input Una fórmula que define un conjunto semi-algebraico S, cuyos polinomios que lo definen están en posición general.

**Output** El mapa completo de caminos  $R_1(\underline{S})$  de la estratificación  $\underline{S}$  de S en conjutos signo-invariantes.

**Descripción.** El algoritmo consta de dos fases. Primero escogemos un mapa lineal uno-genérico a y calculamos la silueta  $\Sigma$  de <u>S</u>. De la descripción del algoritmo (11.5), esto requiere de

$$O(n^r \log n \frac{r^4}{r!} (2d)^{5r} \log^3 d)$$

operaciones binarias.

En la segunda fase, llamamos al algoritmo de conexión (11.6) en todos los puntos críticos de  $a_1|_{\Sigma}$ . Existen  $\binom{n}{r-1}$  curvas silueta, y cada una delas cuales tiene a lo más  $(2d)^{2r}$  puntos críticos. Por tanto el tiempo total en la fase de conexión es del orden

$$O(n^r \frac{r^4}{r!} r^{\frac{1}{2}r(r+1)} \log^2 d)$$

operaciones binarias. Por tanto el algoritmo del mapa completo de caminos requiere

$$T_{R_1} = O[n^r \frac{r^4}{r!} \log n(2d)^{5r} \log^3 d + r^{\frac{1}{2}r(r-1)(2d)^{r(r+3)} \log^3 d}]$$
(14)

operaciones binarias.

# 12 El algoritmo es exponencial en el número de grados de libertad

Como vimos en la sección anterior, el algoritmo completo del mapa de caminos tiene un orden exponencial en el número de grados de libertad. En esta sección daremos un argumento sencillo para justificar que el orden exponencial del algoritmo es irreducible e intrínseco del algoritmo.

#### 12.1 Afirmación

Sea  $m = \dim(\mathcal{C})$ . Supongamos que, para cada k = 2, ..., m, existen por lo menos dos puntos críticos en la hipersuperficie correspondiente en dimensión k. Entonces el algoritmo es exponencial en m.

#### Demostración

El algoritmo funciona recursivamente. Por lo menos hay dos llamadas al algoritmo en dimensión m. Cada una de estas llamadas implica por lo menos dos llamadas al algoritmo en dimensión m-1. Por tanto, hasta dimensión m-1, hay  $2^2$  llamadas al algoritmo. Recursivamente, reduciendo en uno la dimensionalidad en cada nivel, encontramos que hay por lo menos  $2^r$  llamadas al algoritmo para la construcción del mapa completo de caminos.  $\diamondsuit$ 

#### Observaciones

- Esta suposición es muy conservadora, ya que en general hay más de dos puntos críticos en cada dimensión, y el algoritmo también involucra la conexión de los puntos críticos con las curvas silueta, lo cual se resuelve por el método de *resultantes*, como vimos en la sección anterior.
- Esto involucra muchas más operaciones binarias, de forma que  $2^r$  es un orden muy conservador para el costo total del algoritmo.
- De esta forma, la exponencialidad del tiempo del algoritmo es irreducible e intrínseca de la naturaleza del algoritmo.

# 13 Conclusiones

• Se ha descrito un algoritmo para planeación de movimientos en espacios de configuraciones en cualquier dimensión que es exponencial en la dimensión de este espacio.

- El algoritmo supone que la cerradura del espacio libre es un conjunto semi-algebraico definido por polinomios con coeficientes racionales en m variables, donde  $m = \dim(\mathcal{C})$ .
- Las estratificaciones parecen una natural abstracción para representar conjuntos algebraicos y semi-algebraicos geométricamente, más que por las ecuaciones que los definen.
- Algunas de las ideas del algoritmo del mapa de caminos pueden aplicarse a planeación de movimientos de una mano robótica.
- Las manos robóticas sofisticadas tienen un número grande de grados de libertad ( $\geq 12$ ), lo cual parece fuera del alcance de la implementación del algoritmo del mapa de caminos. Sin embargo, el espacio de configuraciones de una mano robótica tiene una estructura muy especial.
- Específicamente, si la mano tiene k dedos, el espacio de configuraciones es un producto tensorial del espacio de un dedo. Si la complejidad del espacio de configuraciones de un solo dedo es baja, el espacio de configuraciones de la mano tiene una representación eficiente sobre éste.
- Si el espacio de configuraciones tiene pocos grados de libertad, el algoritmo puede implementarse. Así que una posible dirección de investigación es encontrar modos eficientes de reducir el número de grados de libertad.
- En robots del tipo drones y naves en los que el número de grados de libertad es alrededor de 24, y cada uno de estos grados tiene más o menos el mismo peso o importancia, no hay mucho que pueda hacerse para reducir el número de grados de libertad.
- Sin embargo, esto nos da una idea. Podemos asignar pesos probabilísticamente a los grados de libertad  $p_{w_i}$  y seleccionar con esta distribución de probabilidad un número fijo de grados de libertad, digamos 5.
- Construimos el mapa de caminos para los grados de libertad elegidos. Repitiendo este proceso un número razonable de veces, podemos escoger el "mejor camino" y planear movimientos en espacios de configuraciones de dimensión alta.

- Esta idea puede aplicarse a robots en los que hay pocos grados de libertad que tienen mucho peso y, esencialmente determinan el movimiento del robot, por ejemplo un robot del tipo humanoide, donde existe un cerebro central que determina el movimiento del robot, o en robots en los que el espacio de configuraciones pueda representarse equivalentemente a un espacio de dimensión mucho más baja, como la mano robótica.
- Esto es sólo es una idea y una conjetura de cómo podría utilizarse el algoritmo. La filosofía es no decepcionarse por el resultado negativo de la exponencialidad en el tiempo de cómputo, sino tomar ventaja de la completez del algoritmo para encontrar representaciones de espacios de configuraciones de alta dimensión en espacios de dimensión mucho menor.

# 14 Bibliografía

[1] CANNY, John F. "The Complexity of Robot Motion Planning". MIT Press. Cambridge, Massachusetts. 1988.

[2] GUILLERMIN, Victor, POLLACK, Allan. "Differential Topology". Massachusetts Institute of Technology. Prentice Hall, 1974.

[3] M., Golubitsky, V. Guillerman. "Stable Mappings and their Singularities". GTM-14,Springer Verlag, New York, 1973.

[4] H, Whitney. "Elementary Structure of Real Algebraic Varities". Annals of Math, Vol. 66, No.3. 1957.

[5] C.G Gibson, K Whirtmuller, A.A Duplessis, E.J.N Looijenga. "Topological Stability of Smooth Mappings". Lecture Notes in Mathematics, No. 552. Springer-Verlag, New York. 1976.

[6] R., Thom. "Ensembles et Morphismes Stratifies". Bull. AMS, Vol. 75, 1969. pp.240-284.

[7] J., Milnor. "Morse Theory". Annals of Math. series, No. 51. Princeton University Press. Princeton, New Jersey. 1963.

[8] CANNY, J.F. "Generalized Characteristic Polynomials". Submitted to ISAAC-88/AECC-6. Rome, Julio de 1988.

[9] https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema\_de\_Sturm