Construcción de la Medida y el Proceso de Wiener*

Airam Aseret Blancas Benítez
Universidad Autónoma de Sinaloa

Agosto de 2009

Contenido

Resumen

El objetivo del presente trabajo es mostrar una aplicación del Teorema de Carathéodory a la construcción de la medida de Wiener, a partir de lo cual construimos de manera natural el proceso de Wiener mediante un procedimiento canónico.

1 Introducción

Recordemos que el teorema de extensión Carathéodory establece que dada una medida μ definida en una álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto Ω, existe una σ-álgebra $\mathcal{F}$ y una única medida $\mathbb{P}$ definida en $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ y $\mathbb{P}(A) = \mu(A)$ si $A \in \mathcal{A}$.

*Trabajo realizado en el Verano del 2008 en el CIMAT, bajo la dirección de Víctor Pérez-Abreu, y con el apoyo del Programa del Verano de la Ciencia de la Academia Mexicana de Ciencias

En este trabajo tomaremos Ω como el espacio de las funciones continuas con la topología de la norma del supremo y la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathcal{C})$.
En la Sección 2 consideramos el álgebra de cilindros de $\mathcal{C}=\mathcal{C}[0,1]$, la cual demostramos genera a $\mathcal{B}(\mathcal{C})$, para lo cual usamos el hecho de que $\mathcal{C}$ es un espacio métrico separable. En la Sección 3 construimos la medida de Wiener μ sobre el álgebra de cilindros, teniendo como herramienta principal a las distribuciones Gaussianas multivariadas. En la Sección 4 usamos el Teorema de Carathéodory para extender la medida μ a σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{C})$, siendo posible dicha extensión gracias al Teorema de Ascoli-Arzela.
Dado el espacio de probabilidad $(\mathcal{C},\mathcal{B}(\mathcal{C}),\mu)$, en la Sección 5 construimos el proceso de Wiener y estudiamos sus principales propiedades distribucionales, mientras que en la Sección 6 se analizan las propiedades de sus trayectorias. En particular damos la prueba de la no diferenciabilidad de las trayectorias del proceso de Wiener. Finalmente, en la Sección 7 concluimos con consecuencias sobre soporte de la medida de Wiener, mostrando en particular el subconjunto de las funciones diferenciables en $\mathcal{C}$ tiene medida de Wiener cero.

2 Álgebra de cilindros

Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todas las funciones $x\left(t\right)$ reales, continuas y cuyo dominio es el intervalo $[0,1]$ con $x\left(0\right)=0$.
Observe que $\mathcal{C}$ es un espacio de Banach con la norma supremo

$$\left\|x\right\|=\sup_{0\leq t\leq 1}\left|x\left(t\right)\right|.$$

Un subconjunto I de $\mathcal{C}$ de la forma

$$I=\left\{x\in\mathcal{C}:\left(x\left(t_1\right),x\left(t_2\right),...,x\left(t_n\right)\right)\in E\right\},$$

donde $0<t_1<t_2<\cdots<t_n\leq 1$ y E un conjunto de Borel de $\mathbb{R}^n$, lo llamaremos *conjunto cilindro.*
La colección $\mathcal{R}$ de conjuntos cilindros de $\mathcal{C}$ es una álgebra, pero no una σ-álgebra.
Sea $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ la σ-álgebra generada por los abiertos en $\mathcal{C}$ con la norma supremo. Probaremos que la σ-álgebra generada por $\mathcal{R}$ es la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathcal{C})$, lo que se consigue verificando que la bola cerrada unitaria está en $\sigma\left(\mathcal{R}\right)$ ya que $\mathcal{C}$ con la norma supremo es separable y si X un espacio métrico separable, entonces todo conjunto abierto en X es la unión numerable de bolas abiertas.
Se cumple que

$$\left\{x:\left\|x\right\|\leq 1\right\}\in\sigma\left(\mathcal{R}\right).$$

El resultado se sigue de inmediato pues,

$$\left\{x:\left\|x\right\|\leq 1\right\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x:\left|x\left(t\right)\right|\leq 1\ \forall t=\frac{k}{2^n},\ k=1,2,...,2^n\right\}.$$

3 Medida de Wiener en los cilindros

Sea I el conjunto cilindro dado antes. Definimos

$$\begin{aligned}\mu(I) &= \left[(2\pi)^n t_1 (t_2 - t_1) \ldots (t_n - t_{n-1})\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &\times \int_E \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{u_1^2}{t_1} + \frac{(u_2-u_1)^2}{t_2-t_1} + \cdots + \frac{(u_n-u_{n-1})^2}{t_n-t_{n-1}}\right]\right\} du_1 du_2 \cdots du_n.\end{aligned}$$

μ es llamada la medida de Wiener en $\mathcal{C}$. La integral en $\mathcal{C}$ con respecto a μ es conocida como la integral de Wiener.
Si f es una función Wiener integrable, su integral la denotaremos por

$$E_\mu[f] \equiv \int_{\mathcal{C}} f(x)\,\mu(dx).$$

μ es aditiva finita en el álgebra $\mathcal{R}$.
Observe que si $0 < t \leq 1$, entonces

$$\mu(\{x(t) : a \leq x(t) \leq b\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2t}} dx,$$

y por tanto, $x(t)$ tiene distribución normal con media 0 y varianza t.
Más aún, si $0 < s < t \leq 1$ son fijos y $E = \{(x,y) : a \leq x - y \leq b\}$, entonces de la definición de μ,

$$\begin{aligned}\mu(\{x : a \leq x(t) - x(s) \leq b\}) &= \mu(\{x : (x(s), x(t)) \in E\}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 s(t-s)}} \int\int_E \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{v^2}{s} + \frac{(u-v)^2}{t-s}\right]\right\} dudv \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 s(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{v+a}^{v+b} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{v^2}{s} + \frac{(u-v)^2}{t-s}\right]\right\} dudv.\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $u - v = \tau_1$ y $v = \tau_2$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\mu(\{x : a \leq x(t) - x(s) \leq b\}) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 s(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_a^b \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\tau_2^2}{s} + \frac{\tau_1^2}{t-s}\right]\right\} d\tau_1 d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_a^b e^{-\frac{\tau_1^2}{t-s}} d\tau_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau_2^2}{2s}} d\tau_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_a^b e^{-\frac{\tau_1^2}{t-s}} d\tau_1.\end{aligned}$$

Es decir, si $t > s$, $x(t) - x(s)$ tiene distribución normal con media 0 y varianza $t - s$.

4 σ-aditividad de la Medida de Wiener

Dedicaremos esta sección a probar que μ tiene una extensión σ-aditiva en la σ-álgebra generada por el conjunto de los cilindros, pero antes de ello introducimos la siguiente notación:
1. $\mathcal{S}$ = números racionales binarios en $[0,1]$.
2. $C_\alpha = \{x \in \mathcal{C} : \exists\ a = a(x)$ tal que $|x(t) - x(s)| \leq a|t-s|^\alpha\ \ \forall t, s\}$
3. $B_\alpha = \{x \in \mathcal{C} : \exists\ a = a(x)$ tal que $|x(t) - x(s)| \leq a|t-s|^\alpha\ \ \forall t, s \in \mathcal{S}\}$.
4. $H_\alpha[a] = \{x \in \mathcal{C} : \exists\ s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ tal que $|x(t) - x(s)| > a|t-s|^\alpha\}$.
5. $H_\alpha = \{x \in \mathcal{C} : \forall a > 0, \exists\ s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ tal que $|x(t) - x(s)| > a|t-s|^\alpha\}$.
6. $I_{\alpha,a,k,n} = \left\{x \in \mathcal{C} : \left|x\left(\frac{k}{2^n}\right) - x\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right| > a\left(\frac{1}{2^n}\right)^\alpha\right\}$, $k = 1, 2, 3, ..., 2^n$.
7. μ^* = la medida exterior de μ.
Observe que $H_\alpha[a]$ es abierto, $I_{\alpha,a,k,n}$ es un cilindro y si $x \in C_\alpha$, x es Lipschitz de orden α.
a) $0 < \alpha < \beta \Rightarrow \mathcal{C}_\alpha \subset \mathcal{C}_\beta \subset \mathcal{C}$,
b) $\mathcal{C}_\alpha = B_\alpha$, $\alpha > 0$,
c) $H_\alpha = \bigcap\limits_{a>0} H_\alpha[a] = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H_\alpha[a_n]$, $a_n > 0$, $a_n \nearrow \infty$,
d) $H_\alpha = \mathcal{C} \setminus \mathcal{B}_\alpha$.
a) Es claro que $\mathcal{C}_\beta \subset \mathcal{C}$, probemos entonces la otra contención, para ello suponga que $x \in \mathcal{C}_\alpha$, es decir, existe $a = a(x)$ tal que para todo t y s, $|x(t) - x(s)| \leq a|t-s|^\alpha$.
Luego, $|x(t) - x(s)| \leq a|t-s|^\beta$ para todo t y s, ya que $\alpha < \beta$. Así $x \in \mathcal{C}_\alpha$ y por tanto $\mathcal{C}_\alpha \subset \mathcal{C}_\beta$.
b) Dado que es trivial que $B_\alpha \subset \mathcal{C}_\alpha$, probaremos que $\mathcal{C}_\alpha \subset B_\alpha$.
c) La primera igualdad es clara.
d) Veamos,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C} \setminus B_\alpha &= C \cap B_\alpha \\
&= \{x \in \mathcal{C} : \forall a = a(x) \quad |x(t) - x(s)| > a|t-s|^\alpha \text{ para algún } s, t \in \mathcal{S}\} \\
&= H_\alpha
\end{aligned}
$$

Sea $\alpha > 0$ y $a > 0$. Si $x \in \mathcal{C}$ satisface para todo $k = 0, 1, ..., 2^n$ y para todo $n = 1, 2, ...$ que

$$\left|x\left(\tfrac{k}{2^n}\right) - x\left(\tfrac{k-1}{2^n}\right)\right| \leq a\left(\tfrac{1}{2^n}\right)^\alpha,$$

entonces

$$|x(s_1) - x(s_2)| \leq 2a\tfrac{1}{1-2^{-\alpha}}|s_1 - s_2|^\alpha\ \ \forall s_1, s_2 \in \mathcal{S}.$$

Si $s_1 = 0$ y $s_2 = 1$,

$$
\begin{aligned}
|x(1) - x(0)| &\leq \left|x(1) - x\left(\tfrac{2^n-1}{2^n}\right)\right| + \left|x\left(\tfrac{2^n-1}{2^n}\right) - x\left(\tfrac{2^n-2}{2^n}\right)\right| + \cdots + \left|x\left(\tfrac{1}{2^n}\right) - x(0)\right| \\
&\leq a\left(\tfrac{1}{2^n}\right)^\alpha + a\left(\tfrac{1}{2^n}\right)^\alpha + \cdots + a\left(\tfrac{1}{2^n}\right)^\alpha \leq 2a\sum_{k=0}^{n}\left(\tfrac{1}{2^k}\right)^\alpha \\
&\leq 2a\tfrac{1}{1-2^{-\alpha}}.
\end{aligned}
$$

Supongamos ahora que $s_1 < s_2$ y $[s_1, s_2] \neq [0,1]$. Observe que todo $s \in \mathcal{S}$ se puede expresar de forma única como $\frac{k}{2^n}$ con k impar y más aún, existe un único $s_0 \in \mathcal{S}$ con $s_1 \leq s_o \leq s_2$ y $s_0 = \frac{q}{2^p}$ (q impar). Ahora bien, si $s_0 \neq s_1$, entonces

$$s_0 - s_1 = \frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{m_j}},\ m_1 < m_2 < \cdots < m_j$$

y si $s_0 \neq s_2$, entonces

$$s_2 - s_0 = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}} + ... + \frac{1}{2^{n_k}},\ n_1 < n_2 < ... < n_k.$$

Considere los siguientes intervalos,

$$\left[s_1, s_1 + \frac{1}{2^{m_j}}\right], \left[s_1 + \frac{1}{2^{m_j}}, s_1 + \frac{1}{2^{m_{j-1}}} + \frac{1}{2^{m_j}}\right], ..., \left[s_0 - \frac{1}{2^{m_1}}, s_0\right]$$

y

$$\left[s_0, s_0 + \frac{1}{2^{n_1}}\right], ..., \left[s_0 + \frac{1}{2^{n_1}} + ... + \frac{1}{2^{n_{k-1}}}, s_2\right]$$

Sea $p = \min(m_1, n_1)$ y $q = \max(m_j, n_k)$, entonces

$$\begin{aligned}
|x(s_1) - x(s_2)| &\leq |x(s_1) - x(s_0)| + |x(s_0) - x(s_2)| \leq \left|x\left(s_1 + \frac{1}{2^{m_j}}\right) - x(s_1)\right| \\
&\quad + \left|x\left(s_1 + \frac{1}{2^{m_{j-1}}} + \frac{1}{2^{m_j}}\right) - x\left(s_1 + \frac{1}{2^{m_j}}\right)\right| + \cdots \\
&\quad + \left|x(s_0) - xs_0 - \frac{1}{2^{m_1}}\right| + \left|x\left(s_0 + \frac{1}{2^{n_1}}\right) - x(s_0)\right| \\
&\quad + \cdots + \left|x(s_2) - x\left(s_0 + \frac{1}{2^{n_1}} + ... + \frac{1}{2^{n_{k-1}}}\right)\right| \\
&\leq a\left(\frac{1}{2^{m_j}}\right)^\alpha + a\left(\frac{1}{2^{m_{j-1}}}\right)^\alpha + \cdots + a\left(\frac{1}{2^{m_1}}\right)^\alpha + a\left(\frac{1}{2^{n_1}}\right)^\alpha \\
&\quad + \cdots + a\left(\frac{1}{2^{n_k}}\right)^\alpha \\
&\leq 2a\sum_{k=p}^{q}\left(\frac{1}{2^k}\right)^\alpha \leq 2a\frac{\left(\frac{1}{2^p}\right)^\alpha}{1-2^{-\alpha}} \leq 2a\frac{1}{1-2^{-\alpha}}(s_1 - s_2)^\alpha.
\end{aligned}$$

$\mu(I_{\alpha,a,k,n}) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{a}2^{n\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}e^{-\frac{a^2}{2}\cdot 2^{n(1-2\alpha)}}.$

Recordemos que para $t > s$, $x(t) - x(s)$ tiene distribución normal con media 0 y varianza $t - s$, además que $I_{\alpha,a,k,n}$ es un cilindro, luego,

$$\begin{aligned}
\mu(I_{\alpha,a,k,n}) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi\frac{1}{2^n}}}\int_{a\left(\frac{1}{2^n}\right)^\alpha}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2\frac{1}{2^n}}}d\tau, \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{a\left(\frac{1}{2^n}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2}}dt.
\end{aligned}$$

donde para obtener la igualdad anterior hemos hecho $t^2 = 2^n \tau^2$.
Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int_b^\infty e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau &\leq \int_b^\infty \left(\frac{\tau}{b}\right) e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau \\ &= \frac{1}{b} e^{-\frac{b^2}{2}} \text{ para } b > 0. \end{aligned}$$

Así,

$$\mu\left(I_{\alpha,a,k,n}\right) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a} \cdot 2^{n\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)} e^{-\frac{a^2}{2} \cdot 2^{n(1-2\alpha)}}.$$

Para $\alpha > 0$ y $a > 0$, tenemos que

$$\mu^*\left(H_\alpha\left[2a\frac{1}{1-2^{-\alpha}}\right]\right) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a} \sum_{k=0}^\infty 2^{k\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} e^{-\frac{a^2}{2} \cdot 2^{k(1-2\alpha)}}.$$

Del Lema 7 y de la definición de $I_{\alpha,a,k,n}$ se tiene que

$$\bigcap_{n=0}^\infty \bigcap_{k=1}^{2^n} I_{\alpha,a,k,n}^c \subset H_\alpha\left[2a\frac{1}{1-2^{-\alpha}}\right]^c.$$

Así,

$$H_\alpha\left[2a\frac{1}{1-2^{-\alpha}}\right] \subset \bigcup_{n=0}^\infty \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{\alpha,a,k,n},$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mu^*\left(H_\alpha\left[2a\frac{1}{1-2^{-\alpha}}\right]\right) &\leq \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=1}^{2^n} \mu\left(I_{\alpha,a,k,n}\right) \\ &\leq \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=1}^{2^n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a} 2^{n\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)} e^{-\frac{a^2}{2} \cdot 2^{n(1-2\alpha)}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a} \sum_{n=0}^\infty 2^{n\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} e^{-\frac{a^2}{2} \cdot 2^{n(1-2\alpha)}}. \end{aligned}$$

Observación 1 *La serie anterior diverge para $\alpha \geq \frac{1}{2}$ y converge cuando $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. En efecto, sea $\delta = \frac{1}{2} - \alpha$, eligiendo N lo suficientemente grande de modo que $N > \frac{1-\delta}{2\delta}$, se sigue que $e^{-x} \leq \frac{N!}{x^N}$ para x grande. Así la serie esta dominado por*

$$\sum_{k=k_0}^\infty \left(2^{1-\delta-2\delta N}\right)^k \text{ para algún } k_0.$$

y por tanto, la serie es convergente.

Sin embargo, podemos mostrar un poco más.

Lema 2 *Sea $a > 0$ y $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Si I es un conjunto cilindro contenido en $H_\alpha\left[2a\frac{1}{1-2^{-\alpha}}\right]$ entonces $\mu(I) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{a}\frac{1}{1-2^{1-\delta}e^{-a^2\delta/2}}$, donde $\delta = \frac{1}{2} - \alpha$.*

Demostración. Usando el hecho de que, $2^Y \geq \frac{Y}{2}$, $(y \geq 0)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-\delta)}e^{-\frac{a^2}{2}2^{2\delta k}} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-\delta)}e^{-\frac{a^2}{2}\delta k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{(1-\delta)}e^{-\frac{a^2}{2}\delta}\right)^k \\
&= \frac{1}{1-2^{1-\delta}e^{-a^2\delta/2}}.
\end{aligned}$$

■

Observación 3 *Observe que $\lim\limits_{a\to\infty}\frac{1}{a}\frac{1}{1-2^{1-\delta}e^{-a^2\delta/2}} = 0$.*

Teorema 4 *(Wiener) μ es una medida en la $\sigma-$álgebra generada por $\mathcal{R}$.*

Demostración. Sabemos que si μ es una función aditiva y continua por arriba al vacío, entonces μ es σ-aditiva en el álgebra de cilindros de $\mathcal{C}$. Luego, por el Teorema de Carathéodory podemos extender μ a $\sigma(\mathcal{R})$.
Dado que μ es aditiva por el Teorema 1, es suficiente probar que $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(I_n) = 0$, donde I_n es una sucesión decreciente de conjuntos cilindros cuya intersección es vacío.
Sea

$$\begin{aligned}
I_n &= I_n\left(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, ..., t_{S_n}^{(n)}; E_n\right) \\
&\equiv \left\{x \in \mathcal{C} : \left(x\left(t_1^{(n)}\right), x\left(t_2^{(n)}\right), ..., x\left(t_{S_n}^{(n)}\right)\right) \in E_n \subset \mathbb{R}^{S_n}\right\}
\end{aligned}$$

Paso 1: Elijamos un conjunto $G_n \subset E_n$ tal que $\mu(I_n \setminus K_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ donde

$$K_n = K_n\left(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, ..., t_{S_n}^{(n)}; G_n\right).$$

Sea $L_n = \cap_{j=1}^n K_j \in \mathcal{R}$, entonces, L_n es un cilindro y además $L_n \subset K_n \subset I_n$.
Así, $\mu(I_n) = \mu(I_n \setminus L_n) + \mu(L_n)$, pero como

$$I_n \setminus L_n = I_n \setminus \cap_{j=1}^n K_j = \cup_{j=1}^n (I_n \setminus K_j) \subset \cup_{j=1}^n (I_j \setminus K_j),$$

se tiene que, $\mu(I_n \setminus L_n) \leq \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ y por lo tanto,

$$\mu(I_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \mu(L_n) \text{ para todo } n.$$

Paso 2: Ahora mostraremos que existe n_0 tal que $\mu(L_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ siempre que $n \geq n_0$, para obtener que $\mu(I_n) < \varepsilon$ siempre que $n \geq n_0$, lo que significa que $\lim_{n\to\infty} \mu(I_n) = 0$, que es justamente lo que queríamos probar.
Sea $b = 2a\frac{1}{1-2^{-\alpha}}$, donde $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Por el lema 11, podemos elegir un b lo suficientemente grande para que $\mu(I) < \frac{\varepsilon}{2}$ cuando $I \subset H_\alpha[b]$, entonces $\mu(L_n \cap H_\alpha[b]) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Resta probar que existe un n_0 tal que

$$M_n \equiv L_n \cap H_\alpha[b]^c = \emptyset, \forall n \geq n_0.$$

Observe que $M_n \searrow$ y $\cap_{n=1}^{\infty} M_n = \emptyset$. Suponga que $M_n \neq \emptyset$ para todo n. Para cada n elijamos $x_n \in M_n$ y consideremos la sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{C}$. $\{X_n\}$ es equicontinua porque $x_n \in H_\alpha[b]^c$. Más aún, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es acotada para cada t porque $|x_n(t)| \leq bt^\alpha$.
Dado que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ que es un precompacto, por el Teorema de Ascoli-Arzela, se tiene que existe una subsucesión, tal que $x_n \to x_0 \in \mathcal{C}$ uniformemente, y así $x_0 \in H_\alpha[b]^c$.
Fijemos ahora n_0, entonces $x_n \in M_{n_0}$ $\forall n \geq n_0$, ya que M_{n_0} es compacto, se sigue que $x_0 \in M_{n_0}$. Así, $x_0 \in M_n$ para todo n y por lo tanto, $x_0 \in \cap_{n=1}^{\infty} M_n$, lo cual es una contradicción, pues $\cap_{n=1}^{\infty} M_n = \emptyset$.
Finalmente, recordemos que M_n es decreciente para la cual hemos probado que es imposible tener que $M_n \neq \emptyset$ para todo n. Así que $M_{n_0} = \emptyset$ para algún n_0 y por tanto $M_{n_0} = \emptyset$, para todo $n \geq n_0$. ■

5 Construcción del Proceso de Wiener

Consideremos el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, donde $\Omega = \mathcal{C}$, $\mathcal{F}$ es la σ-álgebra generada por los cilindros y $\mathbb{P}$ es la medida de Wiener en $\mathcal{F}$. Definimos la familia de variable aleatorias $\{W_t : 0 \leq t \leq 1\}$ que llamaremos Proceso de Wiener, de la siguiente manera: Para $t \in [0,1]$, se define la variable aleatoria $W_t : \Omega \to \mathbb{R}$ como $W_t(x) = x(t)$, $x \in \Omega$.
A continuación presentamos algunas propiedades de esta familia de variables aleatorias.

Lema 5 *a)* $W_0 = 0$.
b) W_t *tiene distribución normal con media* 0 *y varianza* t.
c) Si $s < t$, $W_t - W_s$ *tiene distribución normal con media* 0 *y varianza* $t - s$.
d) Si $0 \leq t \leq s \leq v \leq u \leq 1$, $W_s - W_t$ *y* $W_u - W_v$ *son independientes.*

Demostración. Dado que a) es inmediato, tanto b) como c) se siguen de las observaciones hechas en la Sección 2, probemos únicamente d). ■

Corolario 6 *a) Si* p *es un número par*

$$E_v (W_t - W_s)^p = 0,$$

en otro caso,

$$E_\mu |W_t - W_s|^p = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{2^p (t-s)^p} \Gamma\left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\right),$$

donde Γ *es la función gamma.*
b) $E_\mu\left[W_t W_s\right] = \min\left(t, s\right)$.

Demostración. a) Se sigue del inciso (b) del lema anterior.
b) Considere ahora la variable aleatoria $W_t W_s$ con $t \leq s$, entonces

$$W_t W_s = W_t\left(x\left(s\right) - W_t\right) + W_t^2,$$

así que,$E_\mu\left[W_t W_s\right] = E_\mu\left[W_t\left(W_s - W_t\right)\right] + E_\mu\left[W_t^2\right]$.Pero como,

$$\begin{aligned} E_\mu\left[W_t\left(W_s - W_t\right)\right] &= E_\mu\left[\left(W_t - W_0\right)\left(W_s - W_t\right)\right] \\ &= E_\mu\left[W_t - W_0\right] E_\mu\left[W_s - W_t\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

y $E_\mu\left[W_t^2\right] = t$, se tenemos que $E_\mu\left[W_t W_s\right] = t$.
Similarmente podemos obtener que, $E_\mu\left[W_t W_s\right] = t$ cuando $s \leq t$. ■
Del lema se sigue que

Teorema 7 *La familia de variable aleatorias* $\{W_t : 0 \leq t \leq 1\}$ *define un proceso de Wiener.*

$E_\mu\left[W_t W_s\right] = \min\left(t, s\right)$, se conoce como la función covarianza del proceso de Wiener.

6 Propiedades de Trayectoria del Proceso de Wiener

Recordando que C_α es el conjunto de las funciones Lipschitz de orden α, el siguiente teorema estable que las trayectorias del proceso de Wiener son continuas casi seguramente para $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, así mismo que el conjunto de trayectorias diferenciables tiene medida cero para $\alpha > \frac{1}{2}$.

Teorema 8 *a)* $\mu\left(C_\alpha\right) = 1$ *si* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.
b) $\mu\left(C_\alpha\right) = 0$ *si* $\alpha > \frac{1}{2}$.

Demostración. a) Por el Lema

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\alpha &= B_\alpha \text{ (inciso b)} \\ &= H_\alpha \text{ (inciso d)} \\ &= \cup_{n=1}^{\infty} H_\alpha^c\left[a_n\right] \text{ (inciso c)} \end{aligned}$$

donde $a_n > 0$ y $a_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.
Así $\mu\left(\mathcal{C}_\alpha\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(H_\alpha^c\left[a_n\right]\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mu\left(H_\alpha\left[a_n\right]\right) = 1 - 0 = 1$.
b) Sea

$$J_{\alpha,a,n} = \left\{x \in \mathcal{C} : \left|x\left(\frac{k}{2^n}\right) - x\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right| \leq a\left(\frac{1}{2^n}\right)^\alpha \text{ para todo } k = 1, 2, ..., 2^n\right\}.$$

Por otro lado, tenemos que $H_\alpha^c[a] \subset J_{\alpha,a,n}$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Veamos ahora que las variables aleatorias $x\left(\frac{k}{2^n}\right) - x\left(\frac{k-1}{2^n}\right)$, $k = 1, 2, \ldots, 2^n$, son independientes con distribución normal con media 0 y varianza $\frac{1}{2^n}$,

$$\begin{aligned}
\mu\left(J_{\alpha,a,n}\right) &= \prod_{k=1}^{2^n} \mu\left\{x \in \mathcal{C} : \left| x\left(\frac{k}{2^n}\right) - x\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right| \leq a\left(\frac{1}{2^n}\right)^\alpha\right\} \\
&= \prod_{k=1}^{2^n} \int_{-a\left(\frac{1}{2^n}\right)^\alpha}^{a\left(\frac{1}{2^n}\right)^\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{2^n}}} e^{-\frac{\tau^2}{2\frac{1}{2^n}}} d\tau \\
&= \prod_{k=1}^{2^n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{a\left(\frac{1}{2^n}\right)^\alpha} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau \\
&\leq \prod_{k=1}^{2^n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} a\left(\frac{1}{2^n}\right)^{\alpha - \frac{1}{2}} \\
&= \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} a\left(\frac{1}{2^n}\right)^{\alpha - \frac{1}{2}}\right)^{2^n} \\
&= e^{2^n\left\{\log\sqrt{\frac{2}{\pi}}a - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)n\log 2\right\}} \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Así, $\lim_{n\to\infty} \mu\left(J_{\alpha,a,n}\right) = 0$ para cada $a > 0$, $\alpha > \frac{1}{2}$ y por tanto, $\mu\left(H_\alpha[a]\right) = 0$ para cada $a > 0$ y $\alpha > \frac{1}{2}$.
Finalmente del Lema 6 se tiene que $\mu\left(C_\alpha\right) = 0$ para $\alpha > \frac{1}{2}$. ∎

7 Soporte de la Medida de Wiener

Sea $\mathcal{G} = \{G \subset \mathcal{C} : G$ es abierto y $\mu(G) = 0\}$, entonces el abierto más grande de medida cero es $\mathcal{U} = \cup_\gamma G_\gamma$ donde $G_\gamma \in \mathcal{G}$. El complemento de $\mathcal{G}$ es llamado *soporte* de μ. Observe que $\mathcal{G}$ es el cerrado más pequeño cuyo complemento tiene medida cero.
Sea $\mathcal{H} = \{x \in \mathcal{C}$ no diferenciables$\}$ y $\mathcal{K} = \{x \in \mathcal{C}$ continuas$\}$, del Teorema 17 se sigue que el soporte de μ está contenido en $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$.

References

[1] H.H. Kuo (2006). *Gaussian Measures in Banach Spaces.* Lecture Notes in Mathematics **463**, Springer-Verlag. 2nd Edición.