Las 5 Clases de Independencia

Carlos Vargas Obieta
Universidad de Guanajuato

Con asesoría de:
Víctor Pérez-Abreu
CIMAT

05 de Diciembre del 2008

Describimos los 5 productos posibles en la clase de espacios de probabilidad algebraicos, bajo ciertas restricciones que permitirán hacer procesos de Lévy en ellos. Cada producto induce una noción de independencia, y en base a ésta se obtienen análogos a algunos conceptos y teoremas conocidos en probabilidad clásica, como convoluciones, transformadas, TLC, divisibilidad infinita y cumulantes.

1 Introducción

Nos son muy familiares muchos conceptos relacionados con la probabilidad clásica, o conmutativa (conocida simplemente como "probabilidad"), pues existe una vasta disponibilidad de ejemplos en la naturaleza. De acuerdo a los axiomas de Kolmogorov, hablamos de ternas $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, donde Ω es un conjunto no vacío, $\mathcal{F}$ es una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de Ω y $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad. Intuitivamente, $A \in \mathcal{F}$ representa un posible evento, y $\mathbb{P}(A)$ es la probabilidad de que éste ocurra. Luego con la definición de variables aleatorias, comenzamos a concentrarnos en las distribuciones de éstas y en sus momentos, determinados por el funcional valor esperado $\mathbb{E}$. Se entiende intuitivamente la independencia de variables aleatorias X y Y, como la no correlación de éstas, y puede establecerse en términos de los momentos de X, Y y $X+Y$. Muy a menudo nos olvidamos un poco de la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y consideramos simplemente variables aleatorias con ciertas distribuciones y momentos. Pero los conceptos de variable aleatoria, momentos, distribuciones, esperanza e independencia son comprendidos en el contexto de una terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Nos referimos a ésto como probabilidad clásica.

Sin embargo, se puede trabajar, en abstracto, con pares $(\phi, \mathcal{A})$, donde $\mathcal{A}$ es una $\mathbb{C}^*-$álgebra asociativa, y ϕ es un funcional lineal sobre $\mathcal{A}$. Los elementos de $\mathcal{A}$ serán las variables aleatorias, y ϕ hará las veces de la esperanza. A estas parejas $(\phi, \mathcal{A})$ les llamaremos espacios de probabilidad no conmutativos.

En la clase $\mathcal{K}$ de espacios de probabilidad no conmutativos, podemos considerar productos, como funciones de $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ a $\mathcal{K}$ donde $((\phi_1, \mathcal{A}_1), (\phi_2 \mathcal{A}_2)) \longmapsto$

$(\phi_1\phi_2, \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2)$. Si este producto cumple ciertos axiomas establecidos por Ben Ghorbal y Shürmann, se llama universal, y es "bonito" en el sentido de que puede desarrollarse una teoría de procesos de Lévy. Existen únicamente 3 posibles productos universales, el tensorial, que da origen a la probabilidad clásica, el libre y el booleano. Si se debilita un poco la definición, suprimiendo uno de los axiomas, los productos se llaman naturales, y fue observado por Franz, que aún así pueden definirse procesos de Lévy. Entonces dos nuevos productos (aparte de los universales), cumplen con ser naturales: el monótono y el anti monótono. Finalmente se observa que a cada producto se le asocia una relación de independencia.

Los objetivos de este trabajo son los siguientes.

1. Establecer formalmente las definiciones de los 5 productos naturales y enunciar el teorema de unicidad.
2. Entender y bosquejar la demostración de este teorema.
3. Observar qué sucede con los análogos a los conceptos comunes en probabilidad clásica, como independencia, convoluciones, transformadas, cumulantes, divisibilidad infinita, distribución Gaussiana y Poisson, en los demás productos.
4. Entender el enfoque combinatorio: la relación entre cumulantes y convoluciones con látices de particiones.

2 Definiciones y Resultados Principales

Sea $\mathcal{K}$ la clase de espacios de probabilidad algebraicos $(\phi, \mathcal{A})$. Aquí un espacio de probabilidad algebraico $(\phi, \mathcal{A})$ es una pareja que consta de una $\mathbb{C}-$álgebra asociativa $\mathcal{A}$, y una funcional lineal ϕ sobre $\mathcal{A}$. Para cada par de álgebras $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ definimos

$$\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 := \bigoplus_{\varepsilon \in \mathbf{A}} \mathcal{A}_{\varepsilon_1} \otimes \mathcal{A}_{\varepsilon_2} \otimes ... \otimes \mathcal{A}_{\varepsilon_n}$$

donde $\mathbf{A}$ es el conjunto de secuencias finitas $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ de longitud $n \geq 1$, con $\varepsilon_i \in \{1, 2\}$ y $\varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1}$. Definimos i_1, i_2 las inclusiones $i_1 : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$, $i_2 : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$ Para cualesquiera homomorfismos de álgebras $j_1 : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{A}_1$, $j_2 : \mathcal{B}_2 \to \mathcal{A}_2$, existe un único morfismo $j_1 \amalg j_2 : \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2 \to \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}_1 \arrow[r, "j_1"] \arrow[dl, "\iota_1"'] & \mathcal{A}_1 \arrow[dr, "i_1"] & \\
\mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2 \arrow[rrr, dashed, "j_1 \amalg j_2"] & & & \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \\
 & \mathcal{B}_2 \arrow[r, "j_2"] \arrow[ul, "\iota_2"] & \mathcal{A}_2 \arrow[ur, "i_2"'] &
\end{tikzcd}$$

donde ι_1, ι_2 son las inclusiones de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ en $\mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2$, respectivamente.

Podemos entonces definir el producto universal.

Definición 1 *Un* ***producto universal*** *en $\mathcal{K}$ es una función $((\phi_1, \mathcal{A}_1), (\phi_2, \mathcal{A}_2)) \longmapsto (\phi_1\phi_2, \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2)$ de $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ a $\mathcal{K}$ que satisface las siguientes condiciones.*
(U1) Conmutatividad:
Bajo la identificación natural $\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \cong \mathcal{A}_2 \sqcup \mathcal{A}_1$, se cumple

$$\phi_1\phi_2 = \phi_2\phi_1.$$

(U2) Asociatividad:
Bajo la identificación natural $(\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2) \sqcup \mathcal{A}_3 \cong \mathcal{A}_1 \sqcup (\mathcal{A}_2 \sqcup \mathcal{A}_3)$, se cumple

$$(\phi_1\phi_2)\phi_3 = \phi_1(\phi_2\phi_3) := \phi_1\phi_2\phi_3.$$

(U3) Universalidad:
Para cualesquiera homomorfismos de álgebras $j_1 : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{A}_1$, $j_2 : \mathcal{B}_2 \to \mathcal{A}_2$, se cumple

$$(\phi_1 \circ j_1)(\phi_2 \circ j_2) = (\phi_1\phi_2) \circ (j_1 \amalg j_2).$$

(U4) Normalización:
Para todas $a \in \mathcal{A}_1, b \in \mathcal{A}_2$ se cumple

$$\begin{aligned} (\phi_1\phi_2) \circ i_1 &= \phi_1,\ (\phi_1\phi_2) \circ i_2 = \phi_2, \quad \textit{(extensión)} \\ (\phi_1\phi_2)[i_1(a)i_2(b)] &= (\phi_1\phi_2)[i_2(b)i_1(a)] = \phi_1[a]\phi_2[b], \quad \textit{(factorización).} \end{aligned}$$

Observación 2 *En el caso clásico (producto tensorial) tenemos una buena noción de lo que cada axioma solicita. (U1) es simplemente la simetría de la relación de independencia, mientras que (U3) indica que si X y Y son independientes, entonces también lo son $f(X)$ y $g(Y)$ para cualesquiera funciones medibles f y g. Más adelante, al revisar la definición de independencia, entenderemos el por qué de los demás.*

Para cada secuencia alternante $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, .., \varepsilon_n) \in \mathbf{A}$, escribimos $V_1 := V_1(\varepsilon) := \{i|\varepsilon_i = 1\}$, y $V_2 := V_2(\varepsilon) := \{i|\varepsilon_i = 2\}$. Finalmente si $a_1a_2...a_n \in \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$, tal que para cada $k = 1, 2, ..., n$ se tiene que $a_k = i_{\varepsilon_k} a_k^{(\varepsilon_k)}$, decimos entonces resumidamente que $a_1a_2...a_n \in \mathcal{A}_\varepsilon$.

Definición 3 *El* ***producto tensorial*** *$\otimes$, el* ***producto booleano*** *$\diamond$ y el* ***producto libre*** *$\star$, sobre $\mathcal{K}$ están dados por las siguientes reglas de cálculo para $a_1a_2...a_n \in \mathcal{A}_\varepsilon$.(donde $\prod_{k\in V}^{\rightarrow} a_k$ denota el producto de a_k en el orden en el que* *aparecen en $a_1 a_2 ... a_n$.)*

$$(\phi_1 \otimes \phi_2)[a_1 a_2 ... a_n] = \phi_1 \left[\overrightarrow{\prod_{k \in V_1}} a_k^{(1)} \right] \phi_2 \left[\overrightarrow{\prod_{l \in V_2}} a_l^{(2)} \right]$$

$$(\phi_1 \diamond \phi_2)[a_1 a_2 ... a_n] = \left(\prod_{k \in V_1} \phi_1 \left[a_k^{(1)} \right] \right) \left(\prod_{k \in V_2} \phi_2 \left[a_l^{(2)} \right] \right)$$

$$(\phi_1 \star \phi_2)[a_1 a_2 ... a_n] = \sum_{\substack{I \subset \{1,2,\dots,n\} \\ I \neq \{1,2,\dots,n\}}} \left((\phi_1 \star \phi_2) \left[\overrightarrow{\prod_{k \in I}} a_k \right] \right) \left(\overrightarrow{\prod_{l \notin I}} \phi_{\varepsilon_l} a_l^{(\varepsilon_l)} \right)$$

donde el cálculo de $(\phi_1 \star \phi_2)$ debe entenderse como una fórmula recursiva con la convención

$$(\phi_1 \star \phi_2) \left[\overrightarrow{\prod_{k \in \emptyset}} a_k \right] := 1.$$

Teorema 4 *Existen únicamente tres productos universales: el producto tensorial $\otimes$, el producto booleano $\diamond$ y el producto libre $\star$.*

Definición 5 *El* ***producto monótono*** *$\triangleright$ y el* ***producto anti monótono*** *$\triangleleft$, sobre $\mathcal{K}$ están dados por las siguientes reglas de cálculo para $a_1 a_2 ... a_n \in \mathcal{A}_\varepsilon$.*

$$(\phi_1 \triangleright \phi_2)[a_1 a_2 ... a_n] = \phi_1 \left[\overrightarrow{\prod_{k \in V_1}} a_k^{(1)} \right] \left(\overrightarrow{\prod_{l \in V_2}} \phi_2 \left[a_l^{(2)} \right] \right)$$

$$(\phi_1 \triangleleft \phi_2)[a_1 a_2 ... a_n] = \left(\overrightarrow{\prod_{k \in V_1}} \phi_1 \left[a_k^{(1)} \right] \right) \phi_2 \left[\overrightarrow{\prod_{l \in V_2}} a_l^{(2)} \right]$$

Observación 6 *$(\phi_1 \triangleright \phi_2) = (\phi_2 \triangleleft \phi_1)$, bajo la identificación natural $\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \cong \mathcal{A}_2 \sqcup \mathcal{A}_1$.*

Notemos que en general estos productos no son conmutativos. Entonces debilitamos la definición de producto universal.

Definición 7 *Un* ***producto natural*** *en $\mathcal{K}$ es una función $((\phi_1, \mathcal{A}_1), (\phi_2, \mathcal{A}_2)) \longmapsto (\phi_1 \phi_2, \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2)$ de $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ a $\mathcal{K}$ que satisface las condiciones (U2), (U3) y (U4).*

Teorema 8 *Existen únicamente cinco productos naturales: el producto tensorial $\otimes$, el producto booleano $\diamond$, el producto libre $\star$, el producto monótono $\triangleright$ y el producto anti monótono $\triangleleft$.*

3 Bosquejo de la Demostración

Para demostrar este importante teorema, se acude a la teoría de familias universales. Se obtiene una expansión de los productos naturales en sumas de productos más sencillos, corriendo sobre unas particiones especiales de n. Resulta que los coeficientes involucrados en estas sumas deben cumplir ciertas relaciones para que el producto califique como natural. Se consideran más de un ciento de relaciones de tamaño pequeño, y en base a estas se determinan los posibles coeficientes, a los que se les llama universales. Se definen los cuasi-productos universales. Luego se observa que en un producto natural, si la partición está "desordenada", el coeficiente que le corresponde se anula y por lo tanto cada producto natural es de hecho un cuasi-producto universal. Finalmente se observa que los únicos cuasi-productos universales son los cinco definidos anteriormente, y por lo tanto, son los únicos productos naturales. Revisaremos estos pasos con un poco más de detenimiento y enunciando los teoremas que se usan, pero sin dar la demostración de éstos.

3.1 Expansión del producto natural y teoría de familias universales

Sea $(\mathcal{P}(n), \leq)$ la látiz de particiones del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ en bloques $\pi = (U_1, ..., U_p)$ con el orden parcial usual ($\sigma \leq \pi$ si cada bloque de σ está completamente contenido en un bloque de π). $\mathcal{LP}(n)$ es el conjunto de parejas (π, λ), donde $\pi \in \mathcal{P}(n)$ y λ es un orden lineal de los bloques de π. A cada elemento $(\pi, \lambda) = \{V_1 \prec V_2 \prec ... \prec V_p\} \in \mathcal{LP}(n)$ se le asocia una secuencia $\{s_1 ... s_n\}$, donde $s_i \in \{1, 2, ..., p\}$, $s_i = j$ si $i \in V_j$. Finalmente $\overrightarrow{\mathcal{P}}(n)$ es el conjunto de particiones del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ en secuencias ordenadas (es decir, $\sigma \in \overrightarrow{\mathcal{P}}(n)$ es una partición de n en la que cada bloque tiene un orden lineal). Si $\sigma \in \overrightarrow{\mathcal{P}}(n)$, definimos a $\overline{\sigma} \in \mathcal{P}(n)$ como la partición natural que resulta de pensar las secuencias de σ como conjuntos. También hablamos naturalmente de $\mathcal{P}(S), \mathcal{LP}(S)$ y $\overrightarrow{\mathcal{P}}(S)$ cuando S es un conjunto finito.

La teoría de familias universales de Ben Ghorbal y Shürmann tiene un lema fundamental, que es de utilidad. Primero definamos el concepto de familia universal. Sea $\mathcal{A}'$ el espacio dual de una álgebra $\mathcal{A}$, es decir, el espacio de funcionales lineales complejas de $\mathcal{A}$.

Definición 9 *Una familia $(F_{\mathcal{A}})_{\mathcal{A}}$ de funciones $F_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}' \times \mathcal{A}^{\otimes n} \to \mathbb{C}$, indexada por la clase de todas las $\mathbb{C}-$álgebras asociativas, se llama una **familia universal de orden** n, si cumple las siguientes condiciones:*
(UF1) Para cualquier homomorfismo de álgebras $j : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ y cada funcional lineal $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, se tiene

$$F_{\mathcal{B}}(\phi \circ j, b_1 \otimes b_2 \otimes ... \otimes b_n) = F_{\mathcal{A}}(\phi, j(b_1) \otimes j(b_2) \otimes ... \otimes j(b_n)).$$

(UF2) $F_{\mathcal{A}}(\cdot, \cdot)$ es lineal en la segunda entrada.

Teorema 10 *(Lema Fundamental) Sea $(F_{\mathcal{A}})_{\mathcal{A}}$ una familia universal de orden n. Entonces existen únicas constantes $\{t^\pi | \pi \in \overrightarrow{\mathcal{P}}(n)\}$ tales que se tiene*

$$F_{\mathcal{A}}(\phi, a_1 \otimes a_2 \otimes ... \otimes a_n) = \sum_{\pi \in \overrightarrow{\mathcal{P}}(n)} t^\pi \phi[a_\pi].$$

Sea $(\phi_1, \phi_2) \longmapsto \phi_1\phi_2$ un producto natural dado, y sea $(\pi, \lambda) = \{V_1 \prec V_2 \prec ... \prec V_p\} \in \mathcal{LP}(n)$ fija. Entonces, para cada algebra asociativa $\mathcal{A}$ definimos la función $F_{\mathcal{A}}^{(\pi,\lambda)} : \mathcal{A}' \times \mathcal{A}^{\otimes n} \to \mathbb{C}$, por

$$F_{\mathcal{A}}^{(\pi,\lambda)}(\phi, a_1 \otimes a_2 \otimes ... \otimes a_n) := \widetilde{\phi}[i_{s_1}(a_1)i_{s_2}(a_2)...i_{s_n}(a_n)]$$

donde $\widetilde{\phi} := \overbrace{\phi\phi...\phi}^{p \text{ veces}}$ es el producto natural de p copias de ϕ, que es un funcional lineal sobre el coproducto $\bigsqcup_{l=1}^{p} \mathcal{A}_l$ para cada $l = 1, 2, ..., p$ la función i_l es la $l-$ésima inyección del coproducto y $\{s_1...s_n\}$ es la secuencia asociada a (π, λ). Denotaremos en forma corta por $a_1a_2...a_n \in \mathcal{A}_{(\pi,\lambda)}$ a la situación en que para cada $k = 1, 2, ..., n$, $a_k = i_l(a_k^{(l)})$ para alguna $a_k^{(l)} \in \mathcal{A}_l$ siempre que $k \in V_l$. para cada $\sigma \in \overrightarrow{\mathcal{P}}(n)$. Para cada $a_1a_2...a_n \in \mathcal{A}_{(\pi,\lambda)}$ escribimos

$$\phi_\sigma(a_1a_2...a_n) := \prod_{U \in \sigma} \phi_\iota(U)[a_U^{(\iota(U))}]$$

donde $\iota : \pi \to \{1, 2, ..., p\}$ es la función inducida por el orden λ de los bloques.

Proposición 11 *Para cada producto natural, $(F_{\mathcal{A}}^{(\pi,\lambda)})_{\mathcal{A}}$ es una familia universal de orden n.*

Teorema 12 *Sea $(\phi_1, \phi_2) \mapsto \phi_1\phi_2$ un producto natural dado. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, cada $(\pi, \lambda) \in \mathcal{LP}(n)$ y cada $\sigma \in \overrightarrow{\mathcal{P}}(n)$, con $\overline{\sigma} \leq \pi$, existen constantes únicas $t(\pi, \lambda; \sigma)$ tales que, para cada $p-$ada $(\phi_l, \mathcal{A}_l), l = 1, 2, ..., p$, de espacios de probabilidad algebraicos, y $\phi := \phi_1\phi_2...\phi_p$ se tiene*

$$\phi[a_1a_2...a_n] = \sum_{\substack{\sigma \in \overrightarrow{\mathcal{P}}(n) \\ \overline{\sigma} \leq \pi}} t(\pi, \lambda; \sigma)\phi_\sigma(a_1a_2...a_n)$$

siempre que $a_1a_2...a_n \in \mathcal{A}_{(\pi,\lambda)}$ con $|\pi| = p$.

3.2 Calculo de coeficientes universales

Primero introduciremos cierta notación. Posteriormente ejemplificaremos la obtención de relaciones para obtener información sobre los coeficientes universales.

Notación 13 *Los coeficientes $\{t(\pi, \lambda; \sigma)\}$ del teorema 12 se llamarán **coeficientes universales** del producto natural dado. Tenemos que $(\pi, \lambda) = \{V_1 \prec V_2 \prec ... \prec V_p\} \in \mathcal{LP}(n)$ y $\sigma \in \overrightarrow{\mathcal{P}}(n)$, con $\overline{\sigma} \leq \pi$. Entonces σ puede verse como $\sigma = \bigcup_{l=1}^{p} \rho_l$ donde $\rho_l \in \overrightarrow{\mathcal{P}}(V_l)$, donde una única $\sigma_l \in \overrightarrow{\mathcal{P}}(|V_l|)$ le corresponde bajo el isomorfismo $\overrightarrow{\mathcal{P}}(V_l) \cong \overrightarrow{\mathcal{P}}(|V_l|)$. Entonces escribiremos $t(s; \sigma_1; \sigma_2; ...; \sigma_p) := t(\pi, \lambda; \sigma_1; \sigma_2; ...; \sigma_p) := t(\pi, \lambda; \sigma)$. En caso de que $\pi = \{V_1, V_2\}$ si $\varepsilon \in \mathbf{A}$ es una secuencia alternante, $\sigma \in \overrightarrow{\mathcal{P}}(|V_1|), \tau \in \overrightarrow{\mathcal{P}}(|V_2|)$, escribimos $t(\varepsilon, \sigma; \tau) := t(\pi, \lambda; \sigma)$.*

Ejemplo 14

$$t(s;\sigma_1;\sigma_2;\sigma_3) = t(31331212;(13),(2);(21);(213))$$

significa que:
$(\pi,\lambda) = \{\{2,5,7\} \prec \{6,8\} \prec \{1,3,4\}\} \in \mathcal{LP}(8)$,
$\sigma_1 = \{(13)(2)\} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}(3), \rho_1 = \{(27)(5)\} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}(\{2,5,7\})$,
$\sigma_2 = \{(21)\} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}(2), \rho_2 = \{(86)\} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}(\{6,8\})$
$\sigma_3 = \{(213)\} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}(3), \rho_3 = \{(314)\} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}(\{1,3,4\})$

Estaremos interesados entonces en encontrar relaciones entre los coeficientes del caso especial en el que la partición π no tiene más de 2 bloques, pues con ellos quedan determinados todos los demás. El teorema 12 y el axioma de normalización (U4) indica que en el caso en el que la secuencia s tiene tamaño 1 o 2, los coeficientes universales son triviales, pues en la suma sólo hay un término, entonces

$$t(1;(1)) = t(12;(1);(1)) = t(21;(1);(1)) = 1$$

luego, cuando s tiene tamaño 3, hay 6 coeficientes universales:

$$\begin{aligned}
\alpha &: = t(121;(12);(1)), \quad \alpha' := t(212;(1);(12)) \\
\beta &: = t(121;(21);(1)), \quad \beta' := t(212;(1);(21)) \\
\gamma &: = t(121;(1),(2);(1)), \quad \gamma' := t(212;(1);(1),(2))
\end{aligned}$$

cuando s tiene tamaños 4 hay 18 coeficientes universales

$$\begin{aligned}
t &: = t(1212;(12);(12)), \quad t' := t(2121;(12);(12)) \\
u &: = t(1212;(12);(21)), \quad u' := t(2121;(21);(12)) \\
v &: = t(1212;(21);(12)), \quad v' := t(2121;(12);(21)) \\
w &: = t(1212;(21);(21)), \quad w' := t(2121;(21);(21)) \\
p &: = t(1212;(12);(1),(2)), \quad p' := t(2121;(1),(2);(12)) \\
q &: = t(1212;(21);(1),(2)), \quad q' := t(2121;(1),(2);(21)) \\
r &: = t(1212;(1),(2);(12)), \quad r' := t(2121;(12);(1),(2)) \\
s &: = t(1212;(1),(2);(21)), \quad s' := t(2121;(21);(1),(2)) \\
\delta &: = t(1212;(1),(2);(1),(2)), \quad \delta' := t(2121;(1),(2);(1),(2))
\end{aligned}$$

cuando s tiene tamaño 5 hay 78 coeficientes universales. Ahora ejemplificamos la obtención de una relación entre coeficientes universales de tamaños 3 y 4, usando los axiomas de naturalidad y el teorema 12.

Ejemplo 15 *Sean* $(\phi_i, \mathcal{A}_i)$, $(i = 1,2,3)$ *espacios de probabilidad algebraicos, y* $x \in \mathcal{A}_1, y \in \mathcal{A}_2, z, z' \in \mathcal{A}_3$, *entonces calcularemos la "esperanza"* $\langle xzyz' \rangle$ *en el producto* $\phi_1\phi_2\phi_3$ *de dos maneras.*
Primero, asociando $\phi_1(\phi_2\phi_3)$, *se tiene*

$$\begin{aligned}
\langle xzyz' \rangle &= \langle x \rangle \langle zyz' \rangle \\
&= \alpha' \langle x \rangle \langle y \rangle \langle zz' \rangle + \gamma' \langle x \rangle \langle y \rangle \langle z'z \rangle + \beta' \langle x \rangle \langle y \rangle \langle z \rangle \langle z' \rangle
\end{aligned}$$

Segundo, asociando $(\phi_1\phi_2)\phi_3$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\langle xzyz'\rangle &= t\langle xy\rangle\langle zz'\rangle + u\langle xy\rangle\langle z'z\rangle + v\langle yx\rangle\langle zz'\rangle + w\langle yx\rangle\langle z'z\rangle \\
&\quad + p\langle xy\rangle\langle z\rangle\langle z'\rangle + q\langle yx\rangle\langle z\rangle\langle z'\rangle + r\langle x\rangle\langle y\rangle\langle zz'\rangle + s\langle x\rangle\langle y\rangle\langle z'z\rangle \\
&\quad + \delta\langle x\rangle\langle y\rangle\langle z\rangle\langle z'\rangle \\
&= (t+v+r)\langle x\rangle\langle y\rangle\langle zz'\rangle + (u+w+s)\langle x\rangle\langle y\rangle\langle z'z\rangle \\
&\quad + (p+q+\delta)\langle x\rangle\langle y\rangle\langle z\rangle\langle z'\rangle
\end{aligned}$$

de donde se obtienen las relaciones

$$\begin{aligned}
t+v+r &= \alpha' \\
u+w+s &= \gamma' \\
p+q+\delta &= \beta'
\end{aligned}$$

Después de muchas relaciones, se llega a 2 resultados muy importantes

Teorema 16 *Sólo hay 5 posibilidades para los valores de los coeficientes universales de tamaño 5, cada una de estas coincide con los de alguno de los productos del teorema 8.*

Definición 17 *Sea $\sigma \in \overrightarrow{\mathcal{P}}(n)$. Decimos que $U = (i_1 i_2 ... i_k) \in \sigma$ está* ***bien ordenado*** *si $i_1 < i_2 < ... < i_k$. Decimos que σ está* ***bien ordenada*** *si todos sus bloques lo están. σ está* ***desordenada*** *si no está bien ordenada.*

Proposición 18 *Sea $(\phi_1, \phi_2) \mapsto \phi_1\phi_2$ un producto natural dado, y $\{t(\varepsilon;\sigma;\tau)\}$ sus coeficientes universales. Entonces, para cada (σ,τ) desordenada, se tiene*

$$t(\varepsilon;\sigma;\tau) = 0$$

Este último resultado, nos ayuda a observar que los productos naturales son de hecho cuasi-universales. Habiéndose resuelto que sólo existen 5 de estos últimos (los mismos del teorema 8). Se concluye la clasificación de los productos naturales.

3.3 Productos Cuasi-universales

Definición 19 *Un* ***producto cuasi-universal*** *en $\mathcal{K}$ es una función $((\phi_1, \mathcal{A}_1), (\phi_2, \mathcal{A}_2)) \mapsto (\phi_1\phi_2, \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2)$ de $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ a $\mathcal{K}$ que satisface las siguientes condiciones.*
(Q1) Asociatividad:
Bajo la identificación natural $(\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2) \sqcup \mathcal{A}_3 \cong \mathcal{A}_1 \sqcup (\mathcal{A}_2 \sqcup \mathcal{A}_3)$, se cumple

$$(\phi_1\phi_2)\phi_3 = \phi_1(\phi_2\phi_3) := \phi_1\phi_2\phi_3$$

(Q2) Cálculo cuasi-universal de momentos mixtos:
Para cada $n \in \mathbb{N}$, cada $(\pi, \lambda) \in \mathcal{LP}(n)$ y cada $\sigma \leq \pi$. Existen constantes

únicas $t(\pi,\lambda;\sigma)$ tales que, para cada $p-$ada $(\phi_l,\mathcal{A}_l), l=1,2,...,p,$ de espacios de probabilidad algebraicos, y $\phi := \phi_1\phi_2...\phi_p$ se tiene

$$\phi[a_1a_2...a_n] = \sum_{\sigma\leq\pi} t(\pi,\lambda;\sigma)\phi_\sigma(a_1a_2...a_n)$$

siempre que $a_1a_2...a_n \in \mathcal{A}_{(\pi,\lambda)}$ con $|\pi| = p$.
(Q3) Normalización:

$$t(1) = t(12) = t(21) = 1$$

Proposición 20 *Todo producto natural es cuasi-universal*

Teorema 21 *Existen únicamente cinco productos cuasi-universales: el producto tensorial $\otimes$, el producto booleano $\diamond$, el producto libre $\star$, el producto monótono $\triangleright$ y el producto anti monótono $\triangleleft$.*

Con esto queda demostrado el teorema 8.

4 $*-$Espacios de probabilidad, $*-$distribuciones y momentos

En el contexto en el que $\mathcal{A}$ es una $\mathbb{C}^*-$álgebra, decimos que $(\phi,\mathcal{A})$ es un $*-$**espacio de probabilidad algebraico**. En el futuro, los espacios de probabilidad considerados siempre serán $*-$espacios de probabilidad algebraicos.

Definición 22 *Sea $(\phi,\mathcal{A})$ un $*-$espacio de probabilidad algebraico, y sea $a\in\mathcal{A}$, entonces, la $*-$**distribución** de a, es el funcional lineal $\mu_a : \mathbb{C}\langle\mathcal{A},\mathcal{A}^*\rangle \longrightarrow \mathbb{C}$ definido por:*

$$\mu_a(X^{m_1}(X^*)^{n_1}...X^{m_t}(X^*)^{n_t}) = \phi(a^{m_1}(a^*)^{n_1}...a^{m_t}(a^*)^{n_t})$$

*para cada $m_i, n_i \in \mathbb{N}$. A los valores de $\phi(a^{m_1}(a^*)^{n_1}...a^{m_t}(a^*)^{n_t})$ se les llama **momentos** de a*

Definición 23 *Sea $(\phi,\mathcal{A})$ un $*-$espacio de probabilidad algebraico. Podemos distinguir ciertos tipos de variables aleatorias:*
*Variables aleatorias **normales**: $aa^* = a^*a$*
*Variables aleatorias **unitarias**: $aa^* = a^*a = 1$*
*Variables aleatorias **autoadjuntas**: $a = a^*$*

Al considerar elementos autoadjuntos en $\mathbb{C}^*-$álgebras, la definición de sus $*-$distribuciones se simplifica.

Proposición 24 *Sea $a\in\mathcal{A}$ una variable aleatoria autoadjunta. Entonces la $*-$distribución de a, es la única medida μ en $\mathbb{R}$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} t^n\mu(\mathrm{d}t) = \phi(a^n)$$

Definición 25 *a $m_n = \phi(a^n)$ se le llama el $m-$**ésimo momento** de a.*

En adelante sólo consideraremos $\mathbb{C}^*-$álgebras y elementos autoadjuntos.

5 Analogías

A continuación presento algunos resultados importantes que encontré en la literatura, para observar cómo se parecen ciertos resultados al cambiar de un producto a otro, mientras que otros son completamente distintos, no existen, o no se han explorado aún.

5.1 Independencia

Dado un espacio de probabilidad algebraico $(\phi, \mathcal{A})$ dos sub-álgebras $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ y un producto natural, decimos que las álgebras $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son independientes, si ϕ puede recuperarse a partir de sus restricciones $\phi_1 = \phi|_{\mathcal{A}_1}$, $\phi_2 = \phi|_{\mathcal{A}_2}$ mediante la "receta" que señala el producto natural. Más formalmente, sea $\iota : \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathcal{A}$; $a_1 a_2 ... a_n \in \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \longmapsto a_1 a_2 ... a_n \in \mathcal{A}$ (dada por la multiplicación en $\mathcal{A}$).

Definición 26 *Sea $(\phi, \mathcal{A})$ un espacio de probabilidad algebraico, sea $((\phi_1, \mathcal{A}_i), (\phi_2, \mathcal{A}_2)) \longmapsto (\phi_1\phi_2, \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2)$ un producto natural, sean $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ dos subálgebras, sea $\mathcal{B}$ el álgebra generada por $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ y sean $\phi_0 = \phi|_{\mathcal{B}}, \phi_1 = \phi|_{\mathcal{A}_1}$, $\phi_2 = \phi|_{\mathcal{A}_2}$. Decimos que $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ son* ***independientes respecto al producto*** *si*

$$\phi_0 \circ \iota = \phi_1 \phi_2$$

Ésta relación justifica el axioma de extensión (U4). Obsérvese que en el caso tensorial, booleano y libre la relación de independencia es simétrica. Gracias al axioma (U2) la definición de independencia se extiende para un número finito de álgebras. Un conjunto arbitrario de álgebras es **independiente** si cualquier subconjunto finito lo es. Ahora, dada una noción de independencia en álgebras, subconjuntos arbitrarios de álgebras son **independientes** si las álgebras unitarias generadas por los subconjuntos lo son. Finalmente, en el caso particular en que los subconjuntos son variables aleatorias $(\{a_n\}_n)$, decimos que las variables aleatorias son **independientes**.

Sea $(\phi, \mathcal{A})$ un espacio de probabilidad algebraico, y sea I un conjunto de índices. Se tienen las siguientes reglas de independencia.

Teorema 27 *Sea, para cada $i \in I$, $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}$ una subálgebra unitaria.*
(1) Las subálgebras $(\mathcal{A}_i)$ son ***independientes respecto al producto tensorial*** *si para cualquier $k \in \mathbb{N}$, $a_1 \in \mathcal{A}_{i_1}, a_2 \in \mathcal{A}_{i_2}, ..., a_k \in \mathcal{A}_{i_k}$, $a_1, a_2, ..., a_k$ conmutan en $\mathcal{A}$ y*

$$\phi(a_1^{n_1} a_2^{n_2} ... a_k^{n_k}) = \phi(a_1^{n_1})\phi(a_2^{n_2})...\phi(a_k^{n_k})$$

siempre que $\mathcal{A}_{i_j} \neq \mathcal{A}_{i_l}$ $(1 \leq j < l \leq k)$.
(2) Las subálgebras $(\mathcal{A}_i)$ son ***independientes respecto al producto booleano*** *si para cualquier $k \in \mathbb{N}$*

$$\phi(a_1^{n_1} a_2^{n_2} ... a_k^{n_k}) = \phi(a_1^{n_1})\phi(a_2^{n_2})...\phi(a_k^{n_k})$$

siempre que $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{N}, a_j \in \mathcal{A}_{i(j)}$, y elementos vecinos pertenezcan a

diferentes subálgebras ($\mathcal{A}_{i(j)} \neq \mathcal{A}_{i(j+1)}$, $j = 1, 2, ..., k-1$).
(3) Las subálgebras ($\mathcal{A}_i$) son ***independientes respecto al producto libre*** *si para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y cualesquiera polinomios $p_1, p_2, ...p_k$*

$$\phi(p_1(a_1)p_2(a_2)...p_k(a_k)) = 0$$

siempre que $a_j \in \mathcal{A}_{i(j)}$ y $\phi(p_j(a_j)) = 0$, $j = 1, 2, ..., k$, y elementos vecinos pertenezcan a diferentes subálgebras (i.e $\mathcal{A}_{i(j)} \neq \mathcal{A}_{i(j+1)}$, $j = 1, 2, ..., k-1$).
(4) Si I es un conjunto totalmente ordenado, las subálgebras $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ (en ese orden) son ***independientes respecto al producto monótono*** *si, para todos $n, m \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned} a)\ a_i a_j a_k &= \phi(a_j) a_i a_k \text{ siempre que } i < j > k \\ & \quad b)\ \phi(a_{i_m}...a_{i_2}a_{i_1}a_i a_{j_1}a_{j_2}...a_{j_n}) \\ &= \phi(a_{i_m})...\phi(a_{i_2})\phi(a_{i_1})\phi(a_i)\phi(a_{j_1})\phi(a_{j_2})...\phi(a_{j_n}) \\ \text{siempre que } i_m &> ... > i_2 > i_1 > i < j_1 < j_2 < ... < j_m \end{aligned}$$

para cualesquiera variables aleatorias $a_i \in \mathcal{A}_i$, $a_j \in \mathcal{A}_j$, $a_k \in \mathcal{A}_k$, $a_{i_l} \in \mathcal{A}_{i_l}$, $a_{j_l} \in \mathcal{A}_{j_l}$
(5) Si I es un conjunto totalmente ordenado, las subálgebras $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ (en ese orden) son ***independientes respecto al producto anti monótono*** *si, para todos $n, m \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned} a)\ a_i a_j a_k &= \phi(a_j) a_i a_k \text{ siempre que } i > j < k \\ & \quad b)\ \phi(a_{i_m}...a_{i_2}a_{i_1}a_i a_{j_1}a_{j_2}...a_{j_n}) \\ &= \phi(a_{i_m})...\phi(a_{i_2})\phi(a_{i_1})\phi(a_i)\phi(a_{j_1})\phi(a_{j_2})...\phi(a_{j_n}) \\ \text{siempre que } i_m &< ... < i_2 < i_1 < i > j_1 > j_2 > ... > j_m \end{aligned}$$

para cualesquiera variables aleatorias $a_i \in \mathcal{A}_i$, $a_j \in \mathcal{A}_j$, $a_k \in \mathcal{A}_k$, $a_{i_l} \in \mathcal{A}_{i_l}$, $a_{j_l} \in \mathcal{A}_{j_l}$

Observación 28 *Notemos que en el caso tensorial, si reemplazamos a ϕ por $\mathbb{E}$, la regla de independencia es justamente un equivalente conocido a la relación de independencia clásica.*

Observación 29 *Si I es un conjunto con orden total $\prec$, y $\succ$ es el orden inverso en I, entonces $(\mathcal{A}_i)_{i \in (I, \succ)}$ es $\triangleright-$independiente si y sólo si $(\mathcal{A}_i)_{i \in (I, \prec)}$ es $\triangleleft-$independiente.*

Entonces, observemos que el que una colección de variables aleatorias sea independiente, significa que habrá alguna regla para calcular los **momentos mixtos**. También puede observarse que las relaciones de independencia piden requerimientos muy distintos a las variables aleatorias en cada caso. Por ejemplo, se sabe que si dos variables aleatorias son $\otimes-$ independientes y $\boxplus-$independientes al mismo tiempo, entonces necesariamente una de ella es constante.

5.2 Convoluciones

Dadas variables aleatorias independientes (respecto a algún producto) a, b con $*-$distribuciones μ_a, μ_b. Queremos calcular la $*-$distribución de $a+b$, a la que denotaremos, según el caso, por

$$\begin{aligned}
&\mu_a * \mu_b, \quad \text{(tensorial)} \\
&\mu_a \uplus \mu_b, \quad \text{(booleana)} \\
&\mu_a \boxplus \mu_b, \quad \text{(libre)} \\
&\mu_a \blacktriangleright \mu_b, \quad \text{(monótona)} \\
&\mu_a \blacktriangleleft \mu_b, \quad \text{(anti monótona)}
\end{aligned}$$

Existen teoremas en los que dadas ciertas distribuciones, se construyen espacios donde existen variables autoadjuntas independientes (en alguno de los 5 sentidos) con dichas distribuciones. Se muestra que la distribución de $a+b$ depende únicamente del tipo de independencia y de las distribuciones de a y de b, y no del espacio en donde se encuentran. Por lo que se puede hablar más en abstracto, de distribuciones μ y ν, y de su convolución (clásica, booleana, libre, monótona, o anti monótona, según el caso). Estos teoremas son altamente no triviales, y no daremos demostración alguna. Cabe mencionar que también existe mucha teoría sobre la convolución multiplicativa, tema que no abordaremos en este trabajo.

Proposición 30 $\mu_a \blacktriangleright \mu_b = \mu_b \blacktriangleleft \mu_a$.

Demostración. Sean $a \in \mathcal{A}$ y $b \in \mathcal{B}$. si a y b son $\triangleright-$independientes, entonces por la observación (29), b y a son $\triangleleft-$independientes, entonces

$$\begin{aligned}
\mu_b \blacktriangleleft \mu_a &= \mu_{b+a} \\
&= \mu_{a+b} \\
&= \mu_a \blacktriangleright \mu_b
\end{aligned}$$

■

Entonces en adelante nos bastará con entender el producto monótono.

Después, el objetivo es asociar transformadas a las distribuciones, de manera que las convoluciones se simplifiquen (linealicen). Podemos entonces entender las distintas convoluciones a partir de estas transformadas.

5.3 Transformadas de Medidas

Denotemos por $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} | im(z) > 0\}$.

Definición 31 *Sea μ una medida en $\mathbb{R}$.*
*(0) La **Transformada de Cauchy** y **Transformada de Cauchy Recíproca** se definen como sigue*

$$G_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t} d\mu(t) = \frac{1}{F_\mu(z)}, \qquad z \in \mathbb{C}^+$$

(1) El ***logaritmo de su función característica, o función cumulante clásica*** *es*

$$\log \widehat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu(x)$$

(2) Su ***Transformada Auto-energía*** *es*

$$K_\mu(z) = z - F_\mu(z)$$

(3) Su ***Transformada de Voicolescu*** *es*

$$\phi_\mu(z) = F_\mu^{-1}(z) - z, \quad (z \in \Gamma,\ \textit{un dominio cónico adecuado})$$

(3.1) Su ***Transformada Cumulante Libre*** *es*

$$\mathcal{C}_\mu(z) = z\phi(\frac{1}{z}), \qquad (z \in \Gamma)$$

Entonces éstas transformadas linealizan los productos que definimos.

Proposición 32 *(1) El logaritmo de la función característica linealiza la convolución tensorial, es decir, si a y b son variables aleatorias $\otimes-$independientes con distribuciones μ_a y μ_b, respectivamente, entonces*

$$\log \widehat{\mu_a * \mu_b} = \log \widehat{\mu_a} + \log \widehat{\mu_b}.$$

(2) La transformada Auto-energía linealiza la convolución booleana, es decir, Si a y b son variables aleatorias $\diamond-$independientes, con distribuciones μ_a y μ_b, respectivamente, entonces

$$K_{\mu_a \uplus \mu_b} = K_{\mu_a} + K_{\mu_b}.$$

(3) La transformada de Voicolescu y la transformada cumulante libre linealizan la convolución libre, es decir, Si a y b son variables aleatorias $\star-$independientes, con distribuciones μ_a y μ_b, respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} \phi_{\mu_a \boxplus \mu_b} &= \phi_{\mu_a} + \phi_{\mu_b} \\ \mathcal{C}_{\mu_a \boxplus \mu_b} &= \mathcal{C}_{\mu_a} + \mathcal{C}_{\mu_b}. \end{aligned}$$

5.4 Teoremas del Límite Central y Distribuciones Gaussianas

Sea D_λ la dilatación de medidas de probabilidad por un factor λ.

Teorema 33 *(Teorema del Límite Central Clásico) Sea μ una medida de probabilidad con media 0 y varianza σ^2. Entonces*

$$w - \lim_{N\to\infty} \underbrace{D_{1/\sqrt{N}}\mu * D_{1/\sqrt{N}}\mu * ... * D_{1/\sqrt{N}}\mu}_{(N\ veces)} = \mathcal{N}_\sigma$$

decimos entonces, que la Normal, $\mathcal{N}$, es la **distribución Gaussiana** con respecto al producto tensorial.

Teorema 34 *(Teorema del Límite Central Booleano) Sea μ una medida de probabilidad con media* 0 *y varianza* σ^2*. Entonces*

$$w-\lim_{N\to\infty}\underbrace{D_{1/\sqrt{N}}\mu \uplus D_{1/\sqrt{N}}\mu \uplus ... \uplus D_{1/\sqrt{N}}\mu}_{(N\ veces)} = \upsilon_\sigma := \frac{1}{2}(\delta_{-\sigma}+\delta_{+\sigma})$$

decimos entonces, que υ es la **distribución Gaussiana** con respecto al producto booleano.

Teorema 35 *(Teorema del Límite Central Libre) Sea μ una medida de probabilidad con media* 0 *y varianza* σ^2*. Entonces*

$$w-\lim_{N\to\infty}\underbrace{D_{1/\sqrt{N}}\mu \boxplus D_{1/\sqrt{N}}\mu \boxplus ... \boxplus D_{1/\sqrt{N}}\mu}_{(N\ veces)} = s_\sigma$$

decimos entonces, que el elemento semicircular s es la **distribución Gaussiana** con respecto al producto libre.

Teorema 36 *(Teorema del Límite Central monótono) Sea μ una medida de probabilidad con media* 0 *y varianza* 1*. Entonces*

$$w-\lim_{N\to\infty}\underbrace{D_{1/\sqrt{N}}\mu \blacktriangleright D_{1/\sqrt{N}}\mu \blacktriangleright ... \blacktriangleright D_{1/\sqrt{N}}\mu}_{(N\ veces)} = \psi$$

donde ψ es la distribución arco-seno, con función de densidad

$$p(x) = \mathbf{1}_{(-\sqrt{2},\sqrt{2})}(x)\frac{1}{\pi\sqrt{2-x^2}}$$

decimos entonces, que la distribución arco-seno es la **distribución Gaussiana** con respecto al producto monótono.

Demostración. Las demostraciones de estos teoremas emplean un método estándar: se calculan los momentos de la distribución límite usando argumentos de particiones, y se obtiene la distribución cuyos momentos sean esos del límite. La convergencia de momentos implica entonces la convergencia débil en distribuciones. ■

5.5 Divisibilidad infinita

Es interesante, para el estudio de procesos de Lévy, el saber si una medida es o no infinitamente divisible. En la literatura he encontrado muy poco sobre la divisibilidad infinita con respecto al producto monótono y anti monótono. De cualquier forma, damos la definición para cualquier producto.

Definición 37 *Una medida de probabilidad μ en $\mathbb{N}$ es* ***infinitamente divisible respecto al producto*** $\circledast(\in \{*, \uplus, \boxplus, \blacktriangleright, \blacktriangleleft\})$ *o* $\circledast-$***infinitamente divisible*** *si para toda $n \in \mathbb{N}$ existe una medida de probabilidad μ_n en $\mathbb{R}$ tal que*

$$\underbrace{\mu_n \circledast ... \circledast \mu_n}_{n\ veces} = \mu$$

a la clase de medidas infinitamente divisibles respecto al producto $\circledast$ le denotaremos por $ID(\circledast)$.

La divisibilidad infinita clásica y libre se han estudiado mucho y se cuenta con una buena cantidad de resultados interesantes, por ejemplo, las representaciones de Levy-Khintchine.

Teorema 38 *Una medida μ es $*-$infinitamente divisible si y sólo si su transformada $\log \widehat{\mu}$ tiene la representación de Lévy-Khintchine:*

$$\log \widehat{\mu}(u) = i\eta u - \frac{1}{2}au^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{iut} - 1 - iut1_{[-1,1]}(t)\right) \nu(\mathrm{d}t), \;\; u \in \mathbb{R}$$

donde $\eta \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, y ν es una medida de Lévy en $\mathbb{R}$. Además, la representación es única por lo que asociamos $\mu \leftrightarrow .(\eta, a, \nu)$.

Existe un teorema análogo en probabilidad libre.

Teorema 39 *Una medida μ es $\boxplus-$infinitamente divisible si y sólo si su transformada cumulante libre tiene la representación de Lévy-Khintchine libre:*

$$\mathcal{C}_\mu(z) = \eta z - au^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1-zt} - 1 - tz1_{[-1,1]}(t)\right) \nu(\mathrm{d}t), \quad z \in \mathbb{C}^-$$

donde $\eta \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, y ν es una medida de Lévy en $\mathbb{R}$. Además, la representación es única por lo que asociamos $\mu \longleftrightarrow .(\eta, a, \nu)$.

Definición 40 *La* ***biyección de Bercovicci Pata*** Λ, *está definida como sigue:*

$$\Lambda : \underset{(\mu \leftrightarrow (\eta,a,\nu))}{ID(*)} \;\underset{\longmapsto}{\longrightarrow}\; \underset{(\Lambda(\mu) \leftrightarrow (\eta,a,\nu))}{ID(\boxplus)}$$

Λ es contínua, manda a la Gaussiana a la Gaussiana Libre, y respeta la convolución.

La Teoría sobre divisibilidad infinita booleana se simplifica bastante.

Teorema 41 *La transformada auto energía de cualquier medida μ en $\mathbb{R}$ tiene la representación de Lévy-Khintchine:*

$$K_\mu(z) = \eta z - au^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1-zt} - 1 - tz1_{[-1,1]}(t)\right) \nu(\mathrm{d}t), \quad z \in \mathbb{C}^-$$

donde $\eta \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, y ν es una medida de Levy en $\mathbb{R}$. Además, la representación es única por lo que asociamos $\mu \longleftrightarrow .(\eta, a, \nu)$.

Corolario 42 *Toda medida de probabilidad μ en $\mathbb{R}$ es $\uplus-$infinitamente divisible.*

Observación 43 *A cada medida en $ID(\uplus)$ (y, por el corolario anterior, a cualquier medida en $\mathbb{R}$), se le puede asociar naturalmente una medida en $ID(*)$ y una en $ID(\boxplus)$, simplemente considerando la misma terna (η, a, ν) en los 3 distintos contextos.*

$$\begin{array}{ccccc} & & ID(\uplus) & & \\ & {}^{\Lambda^{*,\uplus}}\swarrow\nearrow & & \searrow\nwarrow{}^{\Lambda^{\boxplus,\uplus}} & \\ ID(*) & & \stackrel{\Lambda}{\longleftrightarrow} & & ID(\boxplus) \end{array} \tag{1}$$

Resulta interesante comprender a fondo este diagrama.

5.6 Cumulantes

Además de los momentos, existen sucesiones asociadas a una medida, llamados cumulantes, que ayudan a entender la convolución pues son lineales respecto a ella. Después observaremos que hay una manera combinatoria muy bella de interpretarlos, y en base a ella se puede hacer un análisis desde un enfoque distinto al analítico.

Definición 44 *Los **cumulantes** $\{c_n\}_n$ de una medida μ se definen a partir de su función cumulante clásica.*

$$\log \widehat{\mu}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{izx} d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$$

Definición 45 *Los **cumulantes libres** $\{k_n\}_n$ de una medida μ son los coeficientes de su función cumulante libre.*

$$\mathcal{C}_\mu(z) = z\phi(\frac{1}{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n z^n, \qquad (z \in \Gamma)$$

Definición 46 *Los **cumulantes booleanos** $\{r_n\}_n$ de una medida μ se definen a partir de su función auto-energía.*

$$K_\mu(z) = z - \frac{1}{G_\mu(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \frac{1}{z^{n-1}}$$

5.7 Enfoque Combinatorio de la Divisibilidad Infinita

Ya hemos definido lo que es una partición de n, y la látiz $(\mathcal{P}(n), \preceq)$ de todas las particiones. Definiremos sub-látices y observaremos hermosas relaciones entre los momentos y los cumulantes.

Definición 47 *Una **partición de n que no se cruza**, $\pi = \{U_1, U_2, ..., U_k\}$, es una partición de n, en la cual, no existen bloques U_i, U_j $(i \neq j)$ tales que existan $a, b \in U_i$, $c, d \in U_j$ con $a < c < b < d$. Al conjunto de particiones que no se cruzan, le denotamos por $\mathcal{NC}(n)$*

Definición 48 *Una **partición de n en intervalos**, $\pi = \{U_1, U_2, ..., U_k\}$, es una partición de n, en la cual, existen $1 < u_1 < u_2 < ... < u_k = n$ de tal forma que $U_1 = \{1, ..., u_1\}$, y $U_i = \{u_{i-1}+1, ...u_i\}$ para $1 < i \leq n$. Al conjunto de particiones en intervalos le denotamos por $\mathcal{PI}(n)$.*

Proposición 49 *Con el orden parcial inducido por $\preceq$, $(\mathcal{NC}(n), \preceq)$ y $(\mathcal{PL}(n), \preceq)$ son sub-látices de $(\mathcal{P}(n), \preceq)$.*

Proposición 50 *Sea μ una medida en $\mathbb{R}$, Se cumplen las siguientes fórmulas relacionando momentos y cumulantes.*

$$\begin{aligned}
m_n &= \sum_{\pi \in \mathcal{P}(n)} \left(\prod_{V \in \pi} k_{|V|} \right) \\
m_n &= \sum_{\pi \in \mathcal{NC}(n)} \left(\prod_{V \in \pi} k_{|V|} \right) \\
m_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\pi \in \mathcal{PI}(k)} \left(\prod_{V \in \pi} r_{|V|} \right) \right)
\end{aligned}$$

Luego, considerando la estructura de látices de $(\mathcal{NC}(n), \preceq)$, $(\mathcal{PL}(n), \preceq)$ y $(\mathcal{P}(n), \preceq)$, y la teoría de inversión de Möebius en látices, pueden obtenerse expresiones de los cumulantes en función de los momentos. El siguiente teorema permite estudiar combinatoriamente la divisibilidad infinita libre vía cumulantes libres, a partir de los criterios combinatorios que ya se conocen para los cumulantes en divisibilidad infinita clásica.

Proposición 51 *Se cumplen las siguientes relaciones entre cumulantes y momentos.*

$$\begin{aligned}
c_n &= \sum_{\pi \in \mathcal{P}(n)} \left((-1)^{|\pi|-1} (k-1)! \prod_{V \in \pi} m_{|V|} \right) \\
k_n &= \sum_{\pi \in \mathcal{NC}(n)} \left(\prod_{V \in \pi} m_{|V|} \prod_{W \in K(\pi)} S_{|W|} \right) \\
r_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\pi \in \mathcal{PI}(k)} \left(\prod_{V \in \pi} m_{|V|} \right) (-1)^{|\pi|+1} \right)
\end{aligned}$$

*Donde $K(\pi)$ es el **complemento de Kreweras** de π, que no discutiremos aquí, $S_n = (-1)^n C_n$ y C_n es el n-ésimo **número de Catalán.** También hay una* *relación entre cumulantes clásicos y cumulantes libres.*

$$c_n = \sum_{\pi \in \Pi_n^{conn}} \left(\prod_{V \in \pi} k_{|V|} \right)$$

Donde Π_n^{conn} *denota el conjunto de particiones conectadas de* n.

Teorema 52 *La biyección de Bercovicci-Pata puede entenderse vía cumulantes. Si* $\mu \in ID(*)$ *tiene cumulantes (clásicos)* $\{c_n\}_n$ *entonces* $\Lambda(\mu) \in ID(\boxplus)$ *es justamente la medida cuyos cumulantes libres* $\{k_n\}_n$ *cumplen* $c_n = k_n$, $n = 0, 1, 2, ...$

Entonces, a partir del teorema anterior, y de los criterios de divisibilidad infinita clásica en términos de cumulantes, pueden deducirse criterios para la divisibilidad infinita libre en términos de cumulantes libres.

Observación 53 *El diagrama (1) puede estudiarse vía cumulantes. Si* $\mu \in ID(*)$ *tiene cumulantes (clásicos)* $\{c_n\}_n$ *entonces* $\Lambda(\mu) \in ID(\boxplus)$ *y* $\Lambda^{*,\uplus}(\mu) \in ID(\uplus)$ *son justamente las medidas cuyos cumulantes libres* $\{k_n\}_n$ *y booleanos* $\{r_n\}_n$*, respectivamente, cumplen* $c_n = k_n = r_n$, $n = 0, 1, 2, ...$ *Entonces podría analizarse el diagrama desde un punto de vista combinatorio, dadas las relaciones entre los cumulantes y los momentos.*

5.8 Distribuciones tipo Poisson

Definimos en cada caso las distribuciones tipo Poisson con media λ, como las que tienen terna característica $(0, 0, \nu)$, o bien, que todos sus cumulantes son iguales a λ.

Proposición 54 *La distribución* $Poiss^{*}(\lambda)$ *es una medida discreta dada por*

$$\mu(n) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda}{n!}, \ n = 0, 1, 2, ...,$$

Proposición 55 *La distribución* $Poiss^{\boxplus}(\lambda, \gamma_0)$ *es la distribución de Marshenko-Pastur dada por*

$$\mu_\lambda(dx) = \begin{cases} (1-\lambda)\delta_0 \cdot 1_{[0,1]}(\lambda) + \frac{1}{2\pi x}\sqrt{(x-a)(b-x)}1_{[a,b]}(x)dx, & si\ 0 \leq \lambda \leq 1 \\ \frac{1}{2\pi x}\sqrt{(x-a)(b-x)}1_{[a,b]}(x)dx & si\ \lambda > 1 \end{cases}$$

donde $a = (1-\sqrt{\lambda})^2$ *y* $b = (1+\sqrt{\lambda})^2$.

Proposición 56 *La distribución* $Poiss^{\uplus}(\lambda)$ *es una medida finita dada por:*

$$\pi_\lambda = \frac{1}{\lambda + 1}(\delta_0 + \lambda\delta_1)$$

6 Ejemplos

6.1 Matrices Gaussianas

Uno de los conceptos más importantes en matrices aleatorias de $N \times N$ es la distribución de los eigenvalores

$$\mu_A := \frac{1}{N}(\delta_{\lambda_1} + ... + \delta_{\lambda_N})$$

Cuando se suman dos matrices aleatorias, la distribución de la suma es, en general, difícil de calcular. Afortunadamente, en el caso de matrices Gaussianas independientes, la $*-$distribución de la traza contiene exactamente la misma información que la de los eigenvalores. Es decir, si $\mathcal{A}$ es el álgebra de matrices aleatorias de $N \times N$ y $\phi = tr \otimes E$, entonces $(\phi, \mathcal{A})$ es un $*-$espacio de probabilidad, y si $A \in \mathcal{A}$ es una matriz Gaussiana autoadjunta, μ_A es justamente la $*-$distribución de A. Se tiene el siguiente resultado de Voicolescu.

Teorema 57 *Sean $\{A_N^1\}_{N\geq 1}, ..., \{A_N^k\}_{N\geq 1}$, k sucesiones independientes de matrices aleatorias Gaussianas autoadjuntas de $N \times N$. Entonces se cumple que $\{A_N^1\}_{N\geq 1}, ..., \{A_N^k\}_{N\geq 1}$ son asintóticamente libres, es decir, para cualesquiera polinomios $p_1, ..., p_k$*

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} \phi(p_1(A_N^1)p_2(A_N^2)...p_k(A_N^k)) = 0$$

siempre que

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} \phi(p_i(A_N^i)) = 0$$

Entonces las sucesiones de matrices tienen límites que se encuentran en relación libre. El estudio de la Probabilidad Libre, tanto en sus aspectos analíticos como combinatorios, ayudará a entender entonces los comportamientos de las sumas de estas matrices.

Estos y otros resultados han encontrado aplicación en el campo de comunicaciones inalámbricas.

Bibliografía

1. O. Arizmendi, *Divisibilidad Infinita Libre de Medidas*, *Tesis de Licenciatura de Octavio Arizmendi*, Universidad de Guanajuato. (2008).

2. A. Ben Ghorbal & M. Shürman, *Non-Conmutative Notions of Stochastic Independence, Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **133** (2002) 531-561.

3. N. Muraki, *The Five Independences as Natural Products. Infinite dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, **6** (2003) 337-371

4. N. Muraki, *Monotonic Independence, Monotonic Central Limit Theorem and Monotonic Law of Small Numbers. Infinite dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, **4** (2001) 39-58

5. A. Nica & R. Speicher, *Lectures on the Combinatorics of Free Probability. Cambridge University Press*, 2006

6. R. Speicher & R. Woroudi, *Boolean Convolution.* in Free Probability Theory, Proc. Toronto, Canada 1995, ed D. Voiculescu, Fields Inst. Commun, **12** (Amer. Math. Soc., 1997) 267-279