SEGUNDO EXAMEN PARCIAL
ÁLGEBRA
3 DE ABRIL DE 2017

Instrucciones: Resolver 5 de los problemas siguientes presentado justificaciones y cálculos completos.

1. Sea $h : R_1 \to R_2$ un isomorfismo entre dos dominios enteros, y denote por F_1, F_2 los campos de cocientes de R_1, R_2, respectivamente. Probar que existe un isomorfismo de anillos $H : F_1 \to F_2$ tal que $H|_{R_1} = h$.
2. Sea R un anillo con identidad. Para un R-módulo A, probar que las siguientes condiciones son equivalentes.
   a) A es un R-módulo cíclico.
   b) A es isomorfo como R-módulo a un módulo de la forma R/J donde J es un ideal izquierdo de R.
3. Sean $K \subset F$ dos campos. Si V es un espacio vectorial sobre el campo F, entonces
$$\dim_K V = \dim_F V \dim_K F.$$
4. Sea D un anillo de división, V un espacio vectorial sobre D y $\{x_1, x_2, x_3\}$ un subconjunto de V que es linealmente independiente. Probar que $\{x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1\}$ es linealmente independiente si y sólo si la característica de D no es 2.
5. Probar que $\mathbb{Q}$ no es projectivo como $\mathbb{Z}$-módulo.
6. Sea R un anillo con identidad y J un R-módulo unitario. Probar que si J es inyectivo, entonces toda sucesión exacta corta de R-módulos unitarios de la forma
$$0 \to J \to B \to C \to 0,$$
es "split".