NOTA SOBRE UN CÁLCULO EN CLASE

Seguiremos la notación de la clase del 1o de Noviembre (o del libro de Bröcker y tom Dieck en la sección 1 del capítulo III).

Sea G un grupo de Lie compacto y $f \in C(G)$ una función representativa. Elegimos $V \subset C(G)$ un subespacio G-invariante que contenga a f. En este caso la G-invariancia es para la acción por la derecha, es decir

$$h \in V \text{ implica } R_g h \in V \text{ para todo } g \in G,$$

donde $(R_g h)(x) = h(xg)$.

Fijamos $e_1, \ldots, e_n$ una base de V y $e_1^*, \ldots, e_n^*$ su base dual. Como $f \in V$, para cada $g \in G$ existen $a_j(g) \in \mathbb{C}$ tales que

$$R_g f = \sum_{j=1}^{n} a_j(g) e_j.$$

Y aplicando la base dual tenemos para todo $g \in G$

$$\begin{aligned} a_k(g) &= e_k^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_j(g) e_j \right) \\ &= e_k^*(R_g f) \\ &= s_V(e_k^* \otimes f)(g), \end{aligned}$$

donde la última identidad se sigue de la definición de s_V.

De lo anterior concluimos la identidad

$$R_g f = \sum_{j=1}^{n} s_V(e_j^* \otimes f)(g) e_j,$$

para todo $g \in G$.