TAREA 4
ANÁLISIS ARMÓNICO EN GRUPOS COMPACTOS
4 DE OCTUBRE DE 2017

Fecha de entrega: 11 de Octubre.

Sugerencias: Para el ejercicio 1 aplicar un cambio de base y usar la linealidad de la integral de funciones a valores complejos. Para el ejercicio 2 utilizar bases, convertir a operaciones matriciales en coordenadas y utilizar la linealidad de la integral de funciones a valores complejos. Para el ejercicio 3 aplicar el ejercicio 2.

1. Sea G un grupo de Lie compacto, $\mathrm{d}g$ su medida de Haar y V un espacio vectorial complejo. Dada una base $v_1, \ldots, v_n$ de V para cualquier función continua $\varphi : G \to V$ podemos escribir
$$\varphi(g) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(g) v_i,$$
para cada $g \in G$ donde $\varphi_i : G \to \mathbb{C}$ son funciones continuas. Definimos la integral de φ sobre G como el elemento en V dado por
$$\int_G \varphi(g)\, \mathrm{d}g = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_G \varphi_i(g)\, \mathrm{d}g \right) v_i,$$
es decir componente a componente.

   Probar que la integral de φ sobre G no depende de la base de V elegida.
2. Sea G un grupo de Lie compacto con $\mathrm{d}g$ su medida de Haar y sean V, W espacios vectoriales complejos de dimensión finita. Considere bases $v_1, \ldots, v_n$ y $w_1, \ldots, w_m$ de V y W, respectivamente. Dado que $\mathrm{Hom}(V, W)$ es espacio vectorial, el ejercicio anterior define la integral de toda función continua $\varphi : G \to \mathrm{Hom}(V, W)$. Además, toda tal función continua $\varphi : G \to \mathrm{Hom}(V, W)$ se puede escribir de manera única como
$$\varphi(g)(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_{ij}(g) w_i,$$
para cada $j = 1, \ldots, n$, donde $\varphi_{ij} : G \to \mathbb{C}$ son funciones continuas.

   Probar las siguientes propiedades.

a) La integral de φ sobre G es el único elemento de $\mathrm{Hom}(V, W)$ que mapea

$$v_j \mapsto \sum_{i=1}^{m} \left(\int_G \varphi_{ij}(g) \, \mathrm{d}g \right) w_i,$$

para cada $j = 1, \ldots, n$. Es decir, la integral de φ se calcula componente a componente en su representación matricial respecto de las bases elegidas.

b) Con φ como arriba considere $v \in V$. Probar que se cumple

$$\left(\int_G \varphi(g) \, \mathrm{d}g \right) v = \int_G \varphi(g) v \, \mathrm{d}g.$$

c) Con φ como arriba considere transformaciones lineales $S \in \mathrm{Hom}(X, V)$ y $T \in \mathrm{Hom}(W, Y)$ donde X, Y son espacios vectoriales complejos de dimensión finita. Probar que se cumple

$$T \left(\int_G \varphi(g) \, \mathrm{d}g \right) S = \int_G T\varphi(g) S \, \mathrm{d}g.$$

d) Si además $\psi : G \to \mathrm{Hom}(V, W)$ es otra función continua, entonces

$$\int_G (\varphi(g) + \psi(g)) \, \mathrm{d}g = \int_G \varphi(g) \, \mathrm{d}g + \int_G \psi(g) \, \mathrm{d}g.$$

e) Supongamos que $V = W$ y que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto Hermitiano en V. Probar que se cumple

$$\left\langle \int_G \varphi(g) u \, \mathrm{d}g, v \right\rangle = \int_G \langle \varphi(g) u, v \rangle \, \mathrm{d}g,$$

para cualesquiera $u, v \in V$.

3. Sea V un G=módulo de dimensión finita con G un grupo de Lie compacto, y W un subespacio G-invariante de V. Sea $E_0 : V \to V$ una proyección cualquiera tal que $E_0(V) = W$, es decir, una proyección sobre W. En particular, $E_0^2 = E_0$ y $E_0|_W = id_W$.

   Defina la transformación lineal $E : V \to V$ dada por

$$E = \int_G g E_0 g^{-1} \, \mathrm{d}g.$$

Probar las siguientes propiedades.

a) El mapeo lineal E es G-invariante, es decir, se cumple

$$hEh^{-1} = E$$

para cualesquiera $h \in G$.

b) Probar que $E(V) = W$ y que $E|_W = id_W$ para concluir que E es una proyección sobre W.