PRIMER EXAMEN PARCIAL
VARIEDADES DIFERENCIABLES Y GRUPOS DE LIE

Instrucciones: Resolver los 5 problemas siguientes justificando todas sus afirmaciones y presentando todos sus cálculos. Entregar las soluciones el martes 15 de septiembre durante la clase.

1. Sean M una variedad y $\alpha : \mathbb{R} \to M$ una curva suave. Probar que el par $(\mathbb{R}, \alpha)$ define una subvariedad inmersa de M si y sólo si α es inyectiva y $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
2. Considere la esfera bidimensional
$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\},$$
con la estructura de variedad diferenciable definida por las siguientes cartas para $j = 1, 2, 3$
$$\begin{aligned} \varphi_j^{\pm} : U_j^{\pm} &\to D \\ \varphi_j^{\pm}(x) &= \pi_j(x), \end{aligned}$$
donde π_j es la proyección en $\mathbb{R}^2$ que remueve la j-ésima componente y
$$\begin{aligned} U_j^{\pm} &= \{x \in S^2 \mid \operatorname{sgn}(x_j) = \pm\}, \\ D &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}. \end{aligned}$$
Probar que el mapeo
$$\begin{aligned} \psi : S^2 \setminus \{(0,0,1)\} &\to \mathbb{R}^2 \\ \psi(x) &= \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right) \end{aligned}$$
define una carta de S^2 que pertenece al atlas maximal de su estructura de variedad diferenciable.
3. Sea M una variedad de dimensión n y (U, φ) una carta de M.
   a) Probar que si $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, (es decir, A es una transformación lineal invertible de $\mathbb{R}^n$) entonces $(U, A \circ \varphi)$ es también una carta de M.
   b) Sean $p \in U$ y $v_1, \ldots, v_n$ una base de T_pM. Utilizar el inciso anterior para probar que existe una carta (U, ψ) (definida sobre el mismo abierto U) de M tal que
$$d\psi_p(v_j) = e_j,$$

para cada $j = 1, \ldots, n$, donde $e_1, \ldots, e_n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

4. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función suave donde U es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.
   a) Considere el mapeo
   $$\iota : U \to \mathbb{R}^{n+m}$$
   $$\iota(x) = (x, f(x)).$$
   Probar que el par (U, ι) es una subvariedad encajada de $\mathbb{R}^{n+m}$.
   b) Considere el mapeo
   $$\varphi : U \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n+m}$$
   $$\varphi(x, y) = (x, y - f(x)).$$
   Probar que φ es suave y que satisface
   $$\varphi(x, f(x)) = (x, 0)$$
   para todo $x \in U$. (Es decir, φ mapea la gráfica de la función f dentro del subespacio $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^{n+m}$.)
   También probar que para cada punto $(x_0, y_0) \in U \times \mathbb{R}^m$ existe un abierto W de $\mathbb{R}^{n+m}$ tal que $(x_0, y_0) \in W \subset U \times \mathbb{R}^m$ y de modo que
   $$\varphi : W \to \varphi(W)$$
   define una carta de $\mathbb{R}^{n+m}$.
5. Sean M y N variedades diferenciables y $f : M \to N$ un mapeo suave. Defina el mapeo df entre los haces tangentes por
   $$df : TM \to TN$$
   $$df(v) = df_{\pi(v)}(v),$$
   donde $\pi : TM \to M$ es la proyección natural. Es decir, df reune las diferenciales df_p con $p \in M$ para obtener un mapeo de los haces tangentes. Probar que la suavidad de f implica que df es suave.