SEGUNDO EXAMEN PARCIAL
VARIEDADES DIFERENCIABLES Y GRUPOS DE LIE
29 DE OCTUBRE DE 2015

Instrucciones: Resolver los 5 problemas siguientes justificando todas sus afirmaciones y presentando todos sus cálculos.

1. Considere el mapeo suave dado por
$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2, y - x^2 - z^2).$$
Determinar el conjunto de valores regulares de F.
2. Considere el grupo ortogonal dado por
$$\mathrm{O}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^t = I_n\}.$$
Probar que $\mathrm{O}(n)$ es una variedad diferenciable de dimensión $n(n-1)/2$ y calcular su espacio tangente en la matriz identidad I_n.
3. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial suave sobre una variedad M y sea $p \in M$ un punto fijo. Probar que la curva constante
$$\gamma : \mathbb{R} \to M$$
$$\gamma(t) = p,$$
es una curva integral de X si y sólo si $X_p = 0$.
4. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones suaves y considere los campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$ dados en cada punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ por
$$X_{(x,y,z)} = (1, f(y), 0) = \frac{\partial}{\partial x} + f(y)\,\frac{\partial}{\partial y}$$
$$Y_{(x,y,z)} = (0, g(y), 1) = \qquad g(y)\,\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\,.$$
Para cada (x, y, z) sea $\mathcal{D}_{(x,y,z)}$ el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $X_{(x,y,z)}$ y $Y_{(x,y,z)}$.
   a) Probar que $\mathcal{D}$ es una distribución suave en $\mathbb{R}^3$.
   b) Probar que $\mathcal{D}$ es involutiva si y sólo si se cumple
$$fg' - gf' = 0.$$
5. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial suave sobre una variedad M tal que en un punto fijo $p \in M$ se cumple $X_p \neq 0$. Probar que existe una vecindad U de p en M y una función suave $f : U \to \mathbb{R}$ tal que $X(f) \equiv 1$ es la función constante 1 en U.