Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)

Spécialité

Mathématiques

présentée par

Víctor Manuel RIVERO MERCADO

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)

Sujet de la thèse :

Recouvrements Aléatoires et Processus de Markov Auto–Similaires

soutenue le 14 juin 2004 devant le Jury composé de

Monsieur Marc YOR	Examinateur
Monsieur Philippe CARMONA	Rapporteur
Monsieur Jean BERTOIN	Directeur de Thèse
Madame María Emilia CABALLERO ACOSTA	Examinateur
Monsieur Loïc CHAUMONT	Examinateur

A mis Padres

A Maika

Remerciements

Je voudrais exprimer ma dette envers Jean Bertoin qui m'a guidé dès mon arrivée à Paris et tout au long de cette thèse. Il m'a proposé des sujets de recherche passionnants et a toujours été disponible et prêt à donner une réponse ou un conseil éclairés. Je tiens à dire que j'admire non seulement ses qualités mathématiques mais aussi ses qualités humaines.

Un grand merci à Philippe Carmona d'avoir accepté de rapporter cette thèse et de faire partie du Jury de thèse.

I am greatfull to Juha Vuolle-Apiala for refereering this Ph.D. thesis.

Es para mi un honor contar con María Emilia Caballero Acosta entre los miembros del Jurado de mi éxamen doctoral. A ella quisiera agradecerle su continuo interés por mi trabajo de tesis, el haberme iniciado en la Teoría de Probabilidad y Procesos Estocásticos asi como el haberme apoyado en mi proyecto de estudios en París, entre muchas otras cosas.

Un grand merci à Marc Yor pour participer à mon Jury de thèse, pour l'intérêt qu'il a montré pour mes travaux et son enthousiasme communicatif. J'espère aborder dans un futur proche les sujets qu'il m'a fait connaître.

Je remercie également Loïc Chaumont de participer à mon Jury de thèse. Je le remercie aussi pour sa disponibilité et de nombreux échanges stimulants.

Je suis très reconnaissant à tous les membres du laboratoire de probabilités de Paris VI pour m'avoir rendu la tâche plus agréable par l'ambiance conviviale qu'y règne.

Je voudrais remercier Sylvie Meleard pour tous ses conseils et soutien bienveillant. Je tiens aussi à remercier tous les membres de l'équipe MODAL'X de l'Université de Nanterre de m'avoir accueilli si chaleureussement. Ce fût pour moi une grande experience de faire partie de cette équipe en tant que Vacataire et ATER.

Merci à toute l'équipe administrative du Laboratoire de Probabilités de Paris VI : Nelly Lecquyer, Josette Saman, Philippe Macé, Jacques Portès, Caroline Boulic, Maryvonne de Béru et Geneviève Fournier.

Merci vivement à toute la tribu des thèsards, sa présence et solidarité tout au long de ces années ont été très importantes pour moi. Tout specialement à Bénédicte, Karine, Eulalia, Christina, Julien, Luciano, Giovanni, Janek et Alexis.

Avec Joaquín, Hélène, Arthur, Maël et Josée j'ai vécu beaucoup de bons moments et j'ai reçu tellement d'appui de leur part que je me permets de les considérer comme ma famille en France.

Por supuesto no olvido a Paola, Fabio, Gabo y Juan Carlos con quienes he compartido largas y excelentes veladas.

Quisiera expresar aquí todo mi agradecimiento a mi familia que desde México me han apoyado para llevar a cabo este proyecto. A mi mamá y a mi papá que les debo todo, a mis hermanos Mauricio, Alejandro y Juan Manuel.

Gracias a Maika por su maravillosa compañia en esta aventura y por soportar los altibajos de la tesis. Todo ha sido mas fácil gracias a su amor.

Finalmente, gracias al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México por haber financiado mis estudios de Doctorado durante los últimos 4 años y medio.

Table des matières

Introduction

Cette thèse comprend quatre chapitres, les trois premiers correspondent chacun à un article qui a été publié ou soumis dans une revue scientifique à comité de lecture. Il s'agit de "On random sets connected to the partial records of Poisson point processes" paru dans *Journal of Theoretical Probability* **16** (2003), no. 1, 277–307 ; "A law of iterated logarithm for increasing self–similar Markov processes" paru dans *Stochastics and Stochastics Reports* **75** (2003), no. 6, 443–472 ; et "On recurrent extensions of self–similar Markov processes and Cramér's condition" à paraître dans *Bernoulli*. Enfin, le dernier chapitre étend certains résultats obtenus dans le troisième chapitre. Ce travail peut être divisé en deux parties : la première est consacrée à la construction et à l'étude d'une classe d'ensembles régénératifs (Chapitre I) et la seconde (Chapitres II, III & IV) est constituée de quelques contributions à la théorie des processus de Markov auto–similaires positifs. Le point commun entre ces deux parties, est les processus de Lévy à valeurs réelles, i.e. les processus en temps continu ayant des accroissements indépendants et stationnaires, et dont les trajectoires sont càdlàg (continues à droite avec limites à gauche). En effet, tout ensemble régénératif peut être identifié avec l'image d'un processus de Lévy croissant, appelé subordinateur. Quant aux processus de Markov auto–similaires, ils sont liés aux processus de Lévy par la transformation de Lamperti [19]. Cette introduction est consacrée à décrire nos principaux résultats sur chacun de ces deux sujets.

Dans une annexe à la fin de cette introduction, on rappelle quelques notations sur les processus de Lévy et la transformation de Lamperti qui relie les processus de Markov auto–similaires aux processus de Lévy.

Ensembles Régénératifs

Un ensemble régénératif M est l'analogue, pour des sous–ensembles aléatoires de $\mathbb{R}$, d'un processus de renouvellement. De façon informelle, un ensemble aléatoire fermé M a la propriété de régénération si, lorsque l'on coupe M en un point aléatoire, qui est un temps d'arrêt T à valeurs dans M, la partie de M à gauche de T est indépendante de la partie à droite et la loi de celle–ci est indépendante du choix de T. La théorie des ensembles régénératifs a été développée par plusieurs auteurs, parmi lesquels on peut citer Kingman, Krilov & Yushkevich, Hoffmann–Jørgensen et Maisonneuve. Dans l'article de Fristedt [15], on pourra trouver une présentation détaillée de cette théorie ainsi qu'une ample liste de références.

Le résultat fondamental de la théorie énonce que tout ensemble régénératif M est égal à la fermeture de l'image d'un subordinateur, i.e. $M = \overline{\{\sigma_t, t \geq 0\}}$, pour un certain subordinateur

σ. Un ensemble régénératif est donc complètement caracterisé par un triplet (a, Π, k) avec $a, k \in \mathbb{R}^+$ et Π une mesure sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ qui vérifie $\int_0^\infty (x \wedge 1)\Pi(dx) < \infty$. Le terme a est appelé le paramètre d'épaisseur, Π la mesure des trous et k le taux de mort. Certaines caractéristiques de l'ensemble M peuvent être déduites directement de (a, Π, k). Par exemple, M est borné si et seulement si $k > 0$; la mesure de Lebesgue de M est presque sûrement > 0 si et seulement si $a > 0$; M est d'intérieur vide si et seulement si $\Pi]0, \infty[= \infty$, ou encore, M est une union dénombrable d'intervalles non vides et fermés si $a > 0$ et $\Pi]0, \infty[< \infty$. De plus, des propriétés plus complexes pour des ensembles régénératifs peuvent être obtenues à partir de résultats connus pour les subordinateurs ; voir à ce sujet le cours de Saint-Flour de Bertoin [2] qui donne un panorama sur l'étude des ensembles régénératifs via les subordinateurs et ses diverses applications.

Un exemple d'ensemble régénératif est celui construit par Mandelbrot [20] comme une généralisation aléatoire de l'ensemble de Cantor. Plus précisement, Mandelbrot a introduit des recouvrements aléatoires de la droite réelle par des intervalles $]t, t + s[$, issus d'un processus de Poisson ponctuel $\mathcal{P}$ à valeurs sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Il a étudié les caractéristiques de l'ensemble aléatoire $\mathcal{M}$ qui n'est pas recouvert par ces intervalles, i.e. $\mathcal{M} = \mathbb{R} \setminus \cup_{(t,s)\in\mathcal{P}}]t, t + s[$, et a montré que cet ensemble peut être réalisé comme la fermeture de l'image dans $\mathbb{R}$ d'un subordinateur. Fitzsimmons, Fristedt et Shepp [13] ont ensuite caracterisé la loi de ce subordinateur et en ont déduit un critère pour déterminer si la demi–droite $]0, \infty[$ est complètement couverte ou non, i.e. si $\mathcal{M} = \{0\}$ p.s. ou non, ainsi que d'autres propriétés de $\mathcal{M}$.

Ce sont ces travaux qui motivent l'étude d'un autre type d'ensemble aléatoire dont la construction a été inspiré par le travail de Marchal [21]. Tel est l'objectif du Chapitre I de cette thèse.

Chapitre I : Sur des ensembles aléatoires associés aux maxima locaux des processus de Poisson ponctuel

On considère $\mathcal{P} \subset]0, \infty[\times]0, \infty]$ un processus de Poisson ponctuel de mesure caractéristique $\lambda \otimes \nu$ sur $]0, \infty[\times]0, \infty]$ avec λ la mesure de Lebesgue sur $]0, \infty[$, ν une mesure Borelienne sur $]0, \infty[$ et $p : [0, \infty[\to [0, 1]$ une fonction mesurable. Pour tout point $(x, y) \in \mathcal{P}$ on définit x^* comme l'abscisse du premier point dans $\mathcal{P}$ à droite de x qui est dans un niveau supérieur $y^* \geq y$. C'est à dire, $x^* = \inf\{x' > x : (x', y') \in \mathcal{P}, y' \geq y\}$. De cette façon, à tout $(x, y) \in \mathcal{P}$ on associe l'intervalle $[x, x^*[$. On efface chaque intervalle $[x, x^*[$ de $\mathbb{R}^+$ avec probabilité $p(y)$, indépendamment les uns des autres, et on s'intéresse alors à l'ensemble résiduel, $\mathcal{R}$, des points qui n'ont pas été effacés :

$$\mathcal{R} := \mathbb{R}^+ \setminus \bigcup_{x\in T} [x, x^*[,$$

où T est l'ensemble des extrêmités gauche des intervalles $[x, x^*[$ qui sont effacés de $\mathbb{R}^+$.

Le but de ce Chapitre est de formaliser la construction de l'ensemble $\mathcal{R}$ et de le décrire en termes de la mesure ν et de la fonction p. Par souci de clarté on fait les hypothèses techniques suivantes sur la mesure ν. On suppose que ν est une mesure sans atomes et que sa queue $\overline{\nu}(y) := \nu(y, \infty), y > 0$, est strictement décroissante et a pour limite ∞ quand $y \to 0+$.

Le fait que les maxima locaux d'un processus de Poisson ponctuel interviennent dans la construction de l'ensemble aléatoire $\mathcal{R}$ permet d'utiliser la théorie des processus Extremes pour l'étudier. Voir Resnick & Rubinovitch [22] pour une approche des processus Extremes via les processus de Poisson ponctuels ou les sauts d'un processus de Lévy. Nous nous servons de la structure de ces processus pour établir des critères qui décrivent géométriquement l'ensemble aléatoire $\mathcal{R}$.

Proposition 1. *Soit* $S(y) := -\ln \overline{\nu}(y), y > 0$ *et pour tout* $t > 0$, $F^t(y) := \exp\{-t\overline{\nu}(y)\}, y > 0$.

(i) Soit $Z = \inf\{t > 0 : t \notin \mathcal{R}\}$. *Alors* $Z > 0$, $\mathbf{P}$*–p.s. si et seulement si* $\int_0^\infty p(y)\nu(dy) < \infty$. *Dans ce cas* Z *suit une loi exponentielle de paramètre* $\int_0^\infty p(y)\nu(dy)$. *En particulier,* $\mathcal{R} = [0,\infty[$, $\mathbf{P}$*–p.s. si et seulement si* $p = 0$ ν*–p.s.*

(ii) Pour tout $t > 0$, $\mathbf{P}(t \in \mathcal{R}) > 0$ *si et seulement si* $\int_{0+} p(y)S(dy) < \infty$. *Si la condition précédente est satisfaite alors*

$$\mathbf{P}(t \in \mathcal{R}) = \int_0^\infty F^t(dy)[1 - p(y)] \exp\left\{-\int_0^y p(w)S(dw)\right\}.$$

(iii) 0 *est un point isolé de* $\mathcal{R}$, $\mathbf{P}$*–p.s. si et seulement si* $\int_{0+}[1 - p(y)]S(dy) < \infty$.

(iv) $\mathcal{R}$ *est borné* $\mathbf{P}$*–p.s. si et seulement si* $\int^\infty[1 - p(y)]S(dy) < \infty$.

(v) $\mathcal{R} = \{0\}$ $\mathbf{P}$*–p.s. si et seulement si* $p = 1$ ν*–p.s.*

On cherche ensuite à savoir si $\mathcal{R}$, tout comme l'ensemble aléatoire $\mathcal{M}$ de Mandelbrot, est régénératif. Intuitivement, ceci devrait être vrai. Si un point t déterministe appartient à l'ensemble $\mathcal{R}$ alors la couverture des points à droite de t ne dépend que des intervalles $[x, x^*[$ pour $(x, y) \in [t,\infty[\times[0,\infty[\cap\mathcal{P}$. Ainsi la partie de $\mathcal{R}$ à gauche de t est indépendante de la partie à droite et cette dernière a la même loi que $\mathcal{R}$ par homogénéité dans le temps de $\mathcal{P}$. Cet argument est à la base de la preuve du théorème suivant.

Théorème 1. *L'ensemble aléatoire* $\mathcal{R}$ *est régénératif par rapport à la filtration naturelle engendrée par le processus de Poisson ponctuel* $\mathcal{P}$.

La propriété de régénération et la partie (iii) de la Proposition 1 montrent que l'ensemble $\mathcal{R}$ peut être discret, i.e. tous les points de $\mathcal{R}$ sont isolés $\mathbf{P}$–p.s. Au contraire des ensembles de Mandelbrot $\mathcal{M}$ qui ne peuvent être que triviaux $\mathcal{M} = \{0\}$ $\mathbf{P}$–p.s. ou sans points isolés $\mathbf{P}$–p.s.

Pour déterminer la loi de $\mathcal{R}$ on utilise le fait que $\mathcal{R}$ est l'image d'un certain subordinateur σ. En effet, la loi de σ, et donc celle de $\mathcal{R}$, est caracterisé par sa fonction de renouvellement, $U(x) = \mathbf{E}(\int_0^\infty 1_{\{\sigma_s \le x\}} ds), x > 0$, que l'on obtient dans le théorème suivant.

Théorème 2. *La fonction de renouvellement de* $\mathcal{R}$ *est donnée par*

$$U(a) = a\int_0^\infty F^a(dx) \exp\{\int_x^1 p(y)S(dy)\} \qquad \textit{pour tout } a > 0.$$

Un exemple, dont la simplicité n'enlève rien à son intérêt, est celui où la fonction p est égale à une constante $\mathrm{p} \in]0,1[$. Dans ce cas, il est facile de voir que l'ensemble régénératif associé $\mathcal{R}_\mathrm{p}$ est auto–similaire, c'est–à–dire qu'il possède la propriété suivante : pour tout $c > 0$, $c\mathcal{R}_\mathrm{p}$ a la même loi que $\mathcal{R}_\mathrm{p}$. En conséquence, $\mathcal{R}_\mathrm{p}$ est l'image d'un subordinateur stable d'indice

$1-\mathrm{p}$, car les seuls processus de Lévy qui sont auto–similaires sont les processus stables. La détermination du paramètre se fait à l'aide du Théorème 2. La dimension de Hausdorff de l'image d'un subordinateur stable etant presque sûrement égale à son paramètre, on en déduit que l'ensemble régénératif $\mathcal{R}_{\mathrm{p}}$ a une dimension de Hausdorff égale à $1-\mathrm{p}$.

Plus généralement, on peut calculer la dimension de Hausdorff et d'autres dimensions pour $\mathcal{R}$, en se servant des résultats connus sur l'image d'un subordinateur. Tel est l'objectif du théorème suivant.

Théorème 3. *Presque surement pour tout $t>0$, les dimensions de Hausdorff et Packing de $\mathcal{R}\cap[0,t[$ sont respectivement données par*

$$dim_H(\mathcal{R}\cap[0,t]) = \liminf_{y\to 0+} \frac{\int_y^1 (1-p(w))S(dw)}{-S(y)},$$
$$Dim_P(\mathcal{R}\cap[0,t]) = \limsup_{y\to 0+} \frac{\int_y^1 (1-p(w))S(dw)}{-S(y)}.$$

Processus de Markov auto–similaires positifs

Les processus auto–similaires ont été introduits par Lamperti [18] sous le nom de processus *semi–stables*. Il s'agit de processus $(X_t, t\geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui ont la propriété dite de *scaling* : il existe $\alpha>0$ tel que pour tout $c>0$ et $x\in\mathbb{R}$ la loi du processus

$$(cX_{tc^{-1/\alpha}}, t\geq 0) \quad \text{sous} \quad \mathbb{P}_x \quad \text{est égale à} \quad \mathbb{P}_{cx},$$

où $\mathbb{P}_x$ est la loi de X issu de x. On pourra trouver une ample introduction à ce sujet dans la monographie récente d'Embrechts et Maejima [12].

Lamperti a montré que lorsque l'on fait agir une suite de changements d'echelle en temps et en espace sur un processus stochastique, la limite, si elle existe, est nécessairement un processus auto–similaire. Plus précisément, etant donnés $(Y_t, t\geq 0)$ un processus à valeurs réelles et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $f(n)\to\infty$ lorsque $n\to\infty$ on va s'intéresser au processus normalisé $(Z^n(t)=Y(nt)/f(n), t\geq 0)$. Si Z^n converge vers un processus X au sens des lois fini–dimensionnelles lorsque $n\to\infty$, alors la fonction f est nécessairement une fonction à variation régulière à l'infini d'un certain indice $\alpha>0$, et X est un processus auto–similaire d'indice α. Après ce travail fondateur, Lamperti [19] s'est intéressé au cas des processus auto–similaires qui ont la propriété de Markov homogène et dont l'espace d'états est $\mathbb{R}^+$. Des exemples de ce type de processus sont le mouvement Brownien réfléchi en 0, les processus de Bessel, les processus de Lévy stables symétriques réfléchis et les subordinateurs stables.

Le résultat principal dans [19] établit que tout processus de Markov auto–similaire positif tué en son premier temps d'atteinte de 0, est égal à l'exponentielle d'un processus de Lévy à valeurs réelles changé de temps (voir l'Annexe B pour plus de détails). Cette relation s'avère être un outil puissant dans l'étude des processus de Markov auto–similaires dans $\mathbb{R}^+$, car celle-ci permet de décrire le comportement de X, au moins avant son premier temps d'arrivée en 0, à partir de celui de ξ, voir Bertoin & Caballero [3], Bertoin & Yor [5, 4, 6], Caballero & Chaumont [9], parmi d'autres. Un autre concept intimement lié à l'étude de cette classe de processus est celui de la fonctionnelle exponentielle d'un processus de Lévy, $I := \int_0^\infty \exp\{\xi_s\}ds$. Cette variable aléatoire trouve diverses applications en mathématiques financières, en physique mathématique et dans d'autres disciplines, voir à ce sujet le compte rendu de Carmona, Petit & Yor [11] et les références qui y figurent.

Dans la suite X désigne un processus de Markov fort α–auto–similaire, avec $\alpha > 0$ et on note $\mathbb{P}_x$ sa loi issue de $x > 0$.

Chapitre II : Une loi du logarithme itéré pour des processus de Markov auto–similaires croissants

Dans ce chapitre on suppose que X est un processus de Markov auto–similaire croissant avec un temps de vie infini. Ainsi, le processus de Lévy ξ associé à X par la transformation de Lamperti est un subordinateur à durée de vie infinie. On notera ϕ son exposant de Laplace.

Récemment, Bertoin & Caballero [3] se sont intéressés au comportement d'un processus auto–similaire positif croissant lorsque le point de départ tend vers 0. Ils ont montré que si $\mathbf{E}(\xi_1) < \infty$, alors il existe une unique mesure $\mathbb{P}_{0+}$ qui est la limite dans le sens des lois fini–dimensionnelles de $\mathbb{P}_x$ lorsque $x \to 0$. Ceci est équivalent, grâce à la propriété de scaling, à l'étude du comportement à l'infini du processus X, c'est–à– dire

$$\mathbb{P}_x(X_1 \in dy) \xrightarrow[x\to 0+]{} \mathbb{P}_{0+}(X_1 \in dy),$$

si et seulement si

$$\mathbb{P}_z(t^{-\alpha}X_t \in dy) \xrightarrow[t\to\infty]{} \mathbb{P}_{0+}(X_1 \in dy) \qquad \text{pour tout } z > 0.$$

Le cas géneral a été étudié dans [4, 5, 6] et la convergence dans le sens de Skorohod a été établie dans [9].

Notre but dans le Chapitre II est de donner des estimations de la vitesse à laquelle un processus de Markov auto–similaire croissant à valeurs dans $]0,\infty[$ tend vers l'infini. Ce problème a été d'abord étudié par Fristedt [14] dans le cas où X est un processus de Markov $1/\alpha$–auto–similaire, $\alpha \in]0,1[$, croissant avec des accroissements indépendants et stationnaires, i.e. un subordinateur stable de paramètre α. Il a montré que

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{X_t}{t^{1/\alpha}(\log\log t)^{(\alpha-1)/\alpha}} = \alpha(1-\alpha)^{(1-\alpha)/\alpha},$$

avec probabilité 1. Ce résultat a été ensuite amélioré par Breiman [8], qui a donne un critère intégral pour déterminer si une fonction appartient ou non à l'enveloppe inférieure de X. Le résultat principal de ce chapitre donne une généralisation du résultat de Fristedt pour une classe plus large de processus auto–similaires croissants, sous une hypothèse sur les petits sauts de X.

On dit que ϕ varie régulièrement à l'infini avec indice β si pour tout $\lambda > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\phi(t\lambda)}{\phi(t)} = \lambda^\beta.$$

On sait que la variation régulière à l'infini de l'exposant de Laplace d'un subordinateur est reliée à la taille des petits sauts du subordinateur ξ, et en conséquence à ceux de X. Voir [1] §III.1. On va aussi faire une hypothèse technique

(H) la densité ρ de $I := \int_0^\infty \exp\{-\xi_s\}ds$ est décroissante à l'infini ;

on sait que la densité ρ existe grâce aux résultats de Carmona, Petit & Yor [10].

Théorème 4. *Soit ξ un subordinateur tel que $0 < \mathbf{E}(\xi_1) < \infty$, dont l'exposant de Laplace ϕ varie régulièrement avec indice $\beta \in]0,1[$ et tel que l'hypothèse (H) soit satisfaite. Soit X le processus α–auto–similaire associé à ξ via la transformation de Lamperti. On définit,*

$$f(t) = \frac{\phi(\log\log t)}{\log\log t} \qquad t > e.$$

Alors pour tout $x > 0$,

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{X_t}{(tf(t))^\alpha} = \alpha^{-\alpha\beta}(1-\beta)^{\alpha(1-\beta)}, \qquad \mathbb{P}_x - p.s.$$

Ce résultat reste vrai sous $\mathbb{P}_{0+}$.

Par ailleurs, l'hypothèse de variation régulière à l'infini pour ϕ avec indice $\beta \in]0,1[$, est étroitement liée au comportement de ξ près de 0. Plus précisément, soit ψ l'inverse de ϕ et g définie par

$$g(t) = \frac{\log|\log t|}{\psi(t^{-1}\log|\log t|)}, \qquad 0 < t < e^{-1}.$$

Alors

$$\liminf_{t\to 0} \frac{\xi_t}{g(t)} = c_\beta, \quad \mathbf{P} -\text{p.s.},$$

pour une certaine constante $c_\beta \in]0,\infty[$, voir [1] Théorème III.11 pour une preuve de ce résultat. On en déduit facilement le comportement de X près de 0 lorsque le point de départ est strictement positif

$$\liminf_{t\to 0} \frac{X_t - x}{g(t)} = x^{(\alpha\beta-1)/\alpha\beta}c_\beta, \qquad \mathbb{P}_x -\text{p.s.}$$

Néanmoins, le comportement de X près de 0 est assez différent sous $\mathbb{P}_{0+}$. On a le théorème suivant

Théorème 5. *Sous les mêmes hypothèses et notations du Théorème 4 on a que*

$$\liminf_{t\to 0} \frac{X_t}{(tf(1/t))^\alpha} = \alpha^{-\alpha\beta}(1-\beta)^{\alpha(1-\beta)} \qquad \mathbb{P}_{0+} - p.s.$$

La méthode utilisée pour prouver le Théorème 4 est similaire à celle utilisée par Breiman [8] et consiste à faire une transformation du processus X en un processus stationnaire U et à étudier les excursions de ce processus hors de son point de départ. Cette méthode nous permet d'établir un critère intégral en termes de la densité de I, pour déterminer si une fonction appartient ou pas à l'enveloppe inférieure de X. On donne des estimations de la densité de I pour prouver que la fonction $(1-\varepsilon)f$ (respectivement $(1+\varepsilon)f$) appartient (resp. n'appartient pas) presque sûrement à l'enveloppe inférieure de X pour tout $\varepsilon > 0$. La preuve du Théorème 5 est similaire à celle du Théorème 4 mais on utilise en plus un argument de retournement du temps.

On établit aussi une version des Théorèmes 4 & 5 lorsque le subordinateur ξ est un processus de Poisson composé, i.e. sans coefficient de dérive et avec une mesure de Lévy Π finie. On donne quelques exemples parmi lesquels se trouvent les subordinateurs stables et les processus Extrêmes avec Q–fonction $Q(x) = ax^{-b}, x > 0$, avec $a, b > 0$.

Chapitre III et IV : Extensions récurrentes des processus de Markov auto–similaires et condition de Cramér

Étant donné que la transformation de Lamperti permet de décrire les processus de Markov auto–similaires positifs qui meurent en leur premier temps d'arrivée en 0, Lamperti a posé la question suivante : quels sont les processus de Markov auto–similaires $\widetilde{X}$ positifs pour lesquels 0 est un point récurrent et régulier et qui se comportent comme X jusqu'à l'instant T_0 ? On appelle ce type de processus extensions récurrentes de X. Ce problème a été résolu par Lamperti dans le cas où X est un mouvement Brownien tué en 0, à l'aide des propriétés spécifiques du mouvement Brownien. On sait aujourd'hui que la théorie d'excursions des processus de Markov fournit un outil puissant pour obtenir une réponse plus générale. Plus précisement, Itô [17], Blumenthal [7], Rogers [24] et Salisbury [26, 27] ont montré qu'il existe une bijection entre les extensions récurrentes d'un processus de Markov Y et les mesures d'excursions qui sont compatibles avec Y. Une mesure d'excursions est une mesure sur l'espace des trajectoires absorbées en un point, sous laquelle le processus canonique est Markovien avec le même semigroupe que Y et qui intègre la fonction $1 - e^{-\zeta}$, où ζ est le temps de vie de la trajectoire. Après Lamperti, Vuolle–Apiala [28] s'est servi de ce fait pour donner, sous des hypothèses assez générales, une réponse à la question posée par Lamperti en montrant l'existence d'une unique mesure d'excursions $\mathbf{n}$ compatible avec X telle que $\mathbf{n}(X_{0+} > 0) = 0$ et d'une infinité de mesures d'excursions n^β tels que $n^\beta(X_{0+} = 0) = 0$. Ces dernières sont complètement caracterisées par les mesures de sauts $\eta_\beta(dx) = x^{-(1+\beta)}dx, x > 0$, $0 < \beta < 1/\alpha$ et l'extension récurrente associée part de 0 par des sauts p.s. Quant à la mesure $\mathbf{n}$, Vuolle–Apiala a montré que c'est l'unique mesure telle que son λ–potentiel $\mathbf{n}_\lambda$, soit donné par

$$\mathbf{n}_\lambda(f) = \lim_{x\to 0+} \frac{V_\lambda f(x)}{\mathbb{E}_x(1 - e^{-T_0})},$$

avec V_λ la résolvante de X tué en 0. La limite ci–dessus existe grâce aux hypothèses de [28]. L'extension récurrente associée à $\mathbf{n}$ quitte 0 de façon continue p.s.

Dans le cas où X est un mouvement Brownien tué en 0 la mesure $\mathbf{n}$ est en fait la mesure d'excursions d'Itô pour le mouvement Brownien hors de 0, et l'extension récurrente associée n'est autre que le mouvement Brownien réfléchi en 0. Toute mesure n^β correspond à la mesure d'excursions hors de 0 d'un mouvement Brownien changé de temps par l'inverse d'une fonctionnelle additive fluctuante (voir Rogers & Williams [25]).

Le but des Chapitres III et IV est de donner une description plus précise de la mesure $\mathbf{n}$ en nous inspirant du cas Brownien, dont on connaît plusieurs descriptions de la mesure d'Itô, voir Revuz & Yor [23] §XII. Pour cela, on va supposer que la loi $\mathbf{P}$ du processus de Lévy ξ sous-jacent (voir l'annexe B) satisfait les hypothèses suivantes :

(H1-a) ξ n'est pas arithmétique, i.e. l'espace d'états n'est pas un sous–groupe de $k\mathbb{Z}$ pour tout $k \in \mathbb{R}$;

(H1-b) il existe $\theta > 0$ tel que $\mathbf{E}(e^{\theta\xi_1}, 1 < \zeta) = 1$;

(H1-c) $\mathbf{E}(\xi_1^+ e^{\theta\xi_1}, 1 < \zeta) < \infty$, avec $a^+ = a \vee 0$.

La condition (H1-b) est la condition dite de Cramér pour le processus de Lévy ξ. L'indice de Cramér θ va jouer un rôle très important dans la détermination de certains paramètres comme on va le voir plus bas.

Lorsque le processus de Lévy ξ a une durée de vie infinie p.s., la condition de Cramér implique que le processus ξ dérive vers $-\infty$, i.e. $\lim_{t\to\infty} \xi_t = -\infty$ $\mathbf{P}$–p.s. En conséquence, le processus auto–similaire X associé à ξ atteint l'état 0 de façon continue. Par contre, si la durée de vie de ξ est finie p.s. le processus X entre dans 0 par un saut p.s. La première de ces deux familles de processus auto–similaires est étudiée dans le Chapitre III et la seconde au Chapitre IV. Les résultats principaux sur ce sujet sont analogues dans les deux cas et on va donc se contenter de les décrire sans faire de différence sauf indication contraire.

Le résultat principal de ce travail donne une description de la mesure $\mathbf{n}$ analogue à celle établie par Imhof [16], de la mesure d'excursions d'Itô pour le mouvement Brownien via la loi d'un processus de Bessel(3).

On commence par remarquer que la condition de Cramér implique que le processus $(e^{\theta\xi_t}, t \geq 0)$ est une martingale par rapport à la filtration de ξ. Par un changement de mesure à la Girsanov on peut donc construire une mesure $\mathbf{P}^\natural$ qui est absolument continue par rapport à $\mathbf{P}$ avec une derivée de Radon–Nikodym $e^{\theta\xi_t}$. On s'intéresse ensuite au processus de Markov α–auto–similaire $X^\natural$ de loi $(\mathbb{P}^\natural{}_x, x > 0)$ associé au processus de Lévy de loi $\mathbf{P}^\natural$. La relation d'absolue continuité entre $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}^\natural$ est préservée par la transformation de Lamperti dans le sens où pour tout $x > 0$, $\mathbb{P}^\natural{}_x$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}_x$ avec une dérivée de Radon–Nikodym X_t^θ. De plus, la loi $\mathbb{P}^\natural{}_x$ peut être vue comme la loi de X conditionné à ne jamais arriver en 0, car

- Pour $x > 0$ et pour toute fonctionnelle bornée F et $t > 0$ on a

$$\lim_{s\to\infty} \mathbb{E}_x(F(X_r, r \leq t)|T_0 > s) = \mathbb{E}^\natural{}_x(F(X_r, r \leq t)).$$

Donc, le processus auto–similaire $X^\natural$ est à X ce que le processus de Bessel(3) est au mouvement Brownien. Ensuite, on remarque que les hypothèses (H1) permettent d'utiliser les résultats dans [5] pour assurer qu'il existe une mesure $\mathbb{P}^\natural{}_{0+}$ qui est la limite dans le sens de lois fini dimensionnelles de $\mathbb{P}^\natural{}_x$ lorsque $x \to 0$, et de vérifier que les hypothèses de Vuolle-Apiala sont satisfaites sous nos hypothèses lorsque $0 < \alpha\theta < 1$. Dans ce cas il existe une unique mesure d'excursions $\mathbf{n}$ tel que $\mathbf{n}(X_{0^+} > 0) = 0$ et $\mathbf{n}(1 - e^{-T_0}) = 1$.

On peut maintenant énoncer notre première description de $\mathbf{n}$.

Théorème 6. *Il existe une mesure* $\mathbf{n}'$ *avec support dans l'ensemble des trajectoires positives qui sont absorbées en* 0 *tel que sous* $\mathbf{n}'$ *le processus canonique est Markovien avec le même semi–groupe que* X *tué en 0 et* $\mathbf{n}'(X_{0+} > 0) = 0$. *La loi d'entrée* $(\mathbf{n}'_s, s > 0)$ *associée a* $\mathbf{n}'$ *est donnée par*

$$\mathbf{n}'_s f = \mathbb{E}^\natural{}_{0+}(f(X_s)X_s^{-\theta}), \quad s > 0.$$

La fonction $1 - e^{-T_0}$ *est intégrable par rapport à* $\mathbf{n}'$ *si et seulement si* $0 < \alpha\theta < 1$*. Dans ce cas il existe une constante* $a_{\alpha,\theta}$ *tel que* $\mathbf{n} = (a_{\alpha,\theta})^{-1}\,\mathbf{n}'$.

Le Théorème précédent nous permet d'établir un critère pour déterminer, en fonction de θ, donc du processus de Lévy ξ, pour qu'il existe une extension récurrente de X qui quitte 0 de façon continue.

Théorème 7. *(i) On suppose* $0 < \alpha\theta < 1$*. Alors* X *admet une unique extension récurrente* α*–auto–similaire* $\widetilde{X}$ *qui quitte* 0 *de façon continue p.s. Le processus* $\widetilde{X}$ *est Fellerien.*

(ii) Si $\alpha\theta \geq 1$*, alors il n'existe aucune extension récurrente de* X *qui quitte* 0 *de façon continue.*

On suppose dorénavant que $0 < \alpha\theta < 1$. Motivé par la description de la mesure d'excursions d'Itô pour le mouvement Brownien via la loi d'un pont de Bessel(3) (voir [23] Théorème XII.4.2), on déduit du Théorème 6 une autre description de la mesure $\mathbf{n}$ en déterminant la loi Λ^r de l'excursion conditionnée à avoir une durée de vie donnée $r > 0$. Dans le cas où X atteint 0 de façon continue la loi Λ^r peut être interprétée comme la loi d'un pont de 0 à 0 sur $[0, r]$ pour $\mathbb{P}^{\natural}{}_{0+}$. En général, la loi Λ^r est une h-transformée de $\mathbb{E}^{\natural}{}_{0+}$. On a la proposition suivante.

Proposition 2. *La mesure* $\mathbf{n}$ *vérifie*

(i) $\mathbf{n}(T_0 \in dt) = (\alpha\theta/\Gamma(1-\alpha\theta))t^{-1-\alpha\theta}dt$,

(ii) Pour tout $F \in \mathcal{G}$*, on a l'egalité*

$$\mathbf{n}(F) = \frac{\alpha\theta}{\Gamma(1-\alpha\theta)} \int_0^\infty \Lambda^t(F \cap \{T_0 = t\}) \frac{dt}{t^{1+\alpha\theta}}.$$

Par ailleurs, on sait qu'il existe deux processus $\widehat{X}$ et $\widehat{X}^{\natural}$ qui sont en dualité faible avec X et $X^{\natural}$ respectivement. Il est facile de voir que les processus X et $\widehat{X}^{\natural}$ sont aussi en dualité faible et que $\widehat{X}^{\natural}$ atteint 0 de façon continue. Dans le cadre du Chapitre III, on montre que le processus $\widehat{X}^{\natural}$ admet une extension récurrente Z qui quitte 0 de façon continue. On montre que les processus $\widetilde{X}$ et Z sont eux aussi en dualité faible et que la mesure d'excursions de Z, que l'on note par $\widehat{\mathbf{n}}$, est l'image de $\mathbf{n}$ sous retournement du temps. En outre, on donne une généralisation de ce résultat pour des processus de Markov plus généraux que les processus α–auto–similaires. Un résultat analogue est obtenu dans le Chapitre IV à condition de prendre une extension récurrente $\widehat{Z}_\theta$ de $\widehat{X}^{\natural}$ qui quitte 0 par un saut. Dans ce cas l'image sous retournement de temps de $\mathbf{n}$ est, à une constante multiplicative près, la mesure $\int_0^\infty dx\ x^{-(1+\theta)}\widehat{\mathbb{E}}^{\natural}{}_x(\cdot)$, avec $\widehat{\mathbb{E}}^{\natural}$ la loi de $\widehat{X}^{\natural}$. En général, on a que le processus Z (resp. $\widehat{Z}_\theta$) issu de 0 est égale en loi au processus obtenu en retournant une à une les excursions hors de 0 de $\widetilde{X}$ issu de 0.

Enfin, sous des hypothèses du type Cramér avec un indice négatif, dans la Section IV.5, on construit un processus $X^{\downarrow}$ qui peut être interprété comme le processus X conditionné à atteindre 0 de façon continue.

Annexe A : Quelques définitions

Un processus de Lévy de loi $\mathbf{P}$ est déterminé par son exposant caractéristique, $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ défini par

$$\mathbf{E}(e^{i\lambda\xi_1}) = e^{-\Psi(\lambda)}, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

et la formule de Lévy–Khintchine permet d'écrire Ψ comme

$$\Psi(\lambda) = -ia\lambda + Q^2\lambda/2 + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x 1_{\{|x|<1\}})\Pi(dx),$$

avec $a \in \mathbb{R}$, $Q \geq 0$ et Π une mesure sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ telle que $\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(1 \wedge x^2)\Pi(dx) < \infty$. Le terme a est appelé le terme de dérive, Q le terme Gaussien et Π la mesure de Lévy ; le triplet (a, Q, Π) caractérise la loi $\mathbf{P}$. Lorsque le processus de Lévy a des trajectoires croissantes on l'appelle un subordinateur. Dans ce cas, l'exposant caractéristique peut être prolongé au semi–plan $\Im(z) \in [0, \infty[$ et la loi du subordinateur est alors caracterisée par son exposant de Laplace $\phi(\lambda) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ défini par

$$\mathbf{E}(e^{-\lambda\xi_1}) = e^{-\phi(\lambda)}, \qquad \lambda \geq 0,$$

et $\phi(\lambda) = \Psi(i\lambda)$. La croissance des trajectoires implique $Q = 0$, $\Pi]-\infty, 0[= 0$, $\int_0^\infty (1 \wedge x)\Pi(dx) < \infty$, et la formule de Lévy–Khintchine pour l'exposant de Laplace du subordinateur peut se réécrire comme :

$$\phi(\lambda) = a\lambda + \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x})\Pi(dx), \qquad \lambda \geq 0.$$

Plus généralement on appellera également un subordinateur un processus $(\xi_t, t \geq 0)$ càdlàg croissant à valeurs dans $[0, \infty]$, ayant ∞ comme un point cimetière, tel que conditionnellement à $\xi_t < \infty$ les accroissements $\xi_{t+s} - \xi_t$ sont indépendants de $\sigma(\xi_r, 0 \leq r \leq t)$ et ont la même loi que ξ sous $\mathbf{P}$. L'exposant de Laplace de ξ défini comme avant s'écrit donc

$$\phi(\lambda) = k + a\lambda + \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x})\Pi(dx), \qquad \lambda \geq 0,$$

oú le terme k est appelé "taux de meurtre" puisque le temps de vie du subordinateur suit une loi exponentielle de paramètre k. La loi d'un subordinateur est donc caractérisée par un triplet (k, a, Π).

Annexe B : La transformation de Lamperti

La relation de Lamperti peut être décrite comme suit. Soit $\mathbf{P}'$ une probabilité sur l'espace $\mathbb{D}$ des trajectoires à valeurs réelles continues à droite avec limite à gauche (càdlàg), muni de la topologie de Skorohod et $\mathcal{D}'_t$ la filtration naturelle engendrée par le processus canonique. On suppose que sous $\mathbf{P}'$ le processus canonique ξ' est un processus de Lévy. Soit ξ le processus ξ' tué avec un taux $k \geq 0$, i.e. tué en un temps exponentiel de paramètre k et indépendant de ξ'. On note par Δ le point cimetière pour ξ, par ζ le temps de vie de ξ, $\zeta = \inf\{t > 0 : \xi_t = \Delta\}$ et par $\mathcal{D}_t$ la filtration du processus tué. Comme d'habitude on prolonge les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à $\mathbb{R} \cup \{\Delta\}$ par $f(\Delta) = 0$. Pour $\alpha > 0$ on définit une fonctionnelle exponentielle de ξ par

$$A_t = \int_0^t \exp\{(1/\alpha)\xi_s\} ds, \quad t \geq 0,$$

et par $\tau(\cdot)$ l'inverse de A,

$$\tau(t) = \inf\{s > 0 : A_s > t\},$$

en supposant que $\inf\{\emptyset\} = \infty$. Pour tout $x > 0$, on note $\mathbb{P}_x$ la loi sur $\mathbb{D}^+$, l'espace des trajectoires positives et càdlàg, du processus

$$X_t = x \exp\{\xi_{\tau(tx^{-1/\alpha})}\}, \quad t \geq 0.$$

Si $\tau(tx^{-1/\alpha}) = \infty$ alors X_t est identiquement nul. Cette supposition est assez naturelle puisque τ explose seulement dans les cas $k > 0$ ou $k = 0$ et $\lim_{s\to\infty} \xi_s = -\infty$. On note par $\mathbb{P}_0$ la loi du processus identiquement nul. Par un résultat classique sur le changement de temps dû à Volkonskii on sait que sous les lois $(\mathbb{P}_x, x \geq 0)$ le processus X est un processus de Markov fort par rapport à la filtration $(\mathcal{G}_t = \mathcal{D}_{\tau(t)}, t \geq 0)$. De plus, par construction, le processus X est un processus auto–similaire d'indice α, qui meurt en son premier temps d'arrivée en 0, $T_0 = \inf\{t > 0 : X_{t-} = 0 \text{ ou } X_t = 0\}$. Lorsque $k = 0$ et le processus de Lévy ξ ne dérive pas vers $-\infty$, le processus X ne touche jamais à 0. Or, si $k = 0$ mais ξ dérive vers $-\infty$ alors X touche 0 en un temps fini et il le fait de manière continue. Enfin, si ξ a une durée de vie finie alors X touche 0 en un temps fini et il le fait par un saut. Remarquons que ces trois cas de figure sont indépendantes du point de départ de X.

La loi de T_0 sous $\mathbb{P}_x$ est celle de $x^{1/\alpha} I$ sous $\mathbf{P}$ avec I la fonctionnelle exponentielle

$$I := \int_0^\zeta \exp\{(1/\alpha)\xi_t\} dt.$$

Le Thèoreme de Volkonskii nous permet de plus de déterminer le générateur infinitésimal pour X à partir du générateur infinitésimal pour ξ'. On va les noter par $\mathcal{L}$ et $\mathcal{A}$ respectivement. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $\tilde{f}(\cdot) = f(e^{\cdot})$ appartienne au domaine de $\mathcal{A}$. On a la formule suivante

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}f(x) &= x^{-1/\alpha} \mathcal{A}\tilde{f}(\log x) \\
&= x^{1-(1/\alpha)}(-d + \frac{1}{2}a^2) f'(x) + x^{2-(1/\alpha)} \frac{1}{2} a^2 f''(x) \\
&\quad + x^{-1/\alpha} \int_{\mathbb{R}} \left(f(xe^y) - f(x) - yxf'(x) 1_{\{|y|<1\}} \right) \Pi(dy) - kx^{-1/\alpha} f(x),
\end{aligned}$$

où (d, a, Π) sont les caractéristiques de ξ'.

La réciproque de la transformation de Lamperti est vraie. On se donne un processus de Markov α–auto–similaire positif X, et $T_0 = \inf\{t > 0 : X_{t-} = 0 \text{ ou } X_t = 0\}$. On définit

$$C_t = \int_0^t X_s^{-1/\alpha} ds, \qquad t < T_0,$$

et B_t son inverse. Alors le processus $\log X_{B_t}, t \geq 0$ est un processus de Lévy à valeurs dans $\mathbb{R}$, tué en un temps exponentiel si $\mathbb{P}_x(X_{T_0-} > 0) = 1$ pour tout $x > 0$.

Bibliographie

[1] J. Bertoin. *Lévy processes*, volume 121 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[2] J. Bertoin. Subordinators : examples and applications. In *Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1997)*, volume 1717 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–91. Springer, Berlin, 1999.

[3] J. Bertoin and M.-E. Caballero. Entrance from 0+ for increasing semi-stable Markov processes. *Bernoulli*, 8(2) :195–205, 2002.

[4] J. Bertoin and M. Yor. On subordinators, self-similar Markov processes and some factorizations of the exponential variable. *Electron. Comm. Probab.*, 6 :95–106 (electronic), 2001.

[5] J. Bertoin and M. Yor. The entrance laws of self-similar Markov processes and exponential functionals of Lévy processes. *Potential Anal.*, 17(4) :389–400, 2002.

[6] J. Bertoin and M. Yor. On the entire moments of self-similar Markov processes and exponential functionals of Lévy processes. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 11(1) :33–45, 2002.

[7] R. M. Blumenthal. On construction of Markov processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 63(4) :433–444, 1983.

[8] L. Breiman. A delicate law of the iterated logarithm for non-decreasing stable processes. *Ann. Math. Statist.*, 39 :1818–1824, 1968.

[9] M.-E. Caballero and L. Chaumont. Weak convergence of positive self–similar Markov processes and overshoots of Lévy processes. Prépublication, 2004. Disponible via http ://www.proba.jussieu.fr/mathdoc/textes/PMA-899.pdf.

[10] P. Carmona, F. Petit, and M. Yor. On the distribution and asymptotic results for exponential functionals of Lévy processes. In *Exponential functionals and principal values related to Brownian motion*, Bibl. Rev. Mat. Iberoamericana, pages 73–130. Rev. Mat. Iberoamericana, Madrid, 1997.

[11] P. Carmona, F. Petit, and M. Yor. Exponential functionals of Lévy processes. In *Lévy processes*, pages 41–55. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001.

[12] P. Embrechts and M. Maejima. *Selfsimilar processes*. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2002.

[13] P. J. Fitzsimmons, B. Fristedt, and L. A. Shepp. The set of real numbers left uncovered by random covering intervals. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 70(2) :175–189, 1985.

[14] B. Fristedt. The behavior of increasing stable processes for both small and large times. *J. Math. Mech.*, 13 :849–856, 1964.

[15] B. Fristedt. Intersections and limits of regenerative sets. In *Random discrete structures (Minneapolis, MN, 1993)*, volume 76 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 121–151. Springer, New York, 1996.

[16] J.-P. Imhof. Density factorizations for Brownian motion, meander and the three-dimensional Bessel process, and applications. *J. Appl. Probab.*, 21(3) :500–510, 1984.

[17] K. Itô. Poisson point processes attached to Markov processes. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), Vol. III : Probability theory*, pages 225–239, Berkeley, Calif., 1972. Univ. California Press.

[18] J. Lamperti. Semi-stable stochastic processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 104 :62–78, 1962.

[19] J. Lamperti. Semi-stable Markov processes. I. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 22 :205–225, 1972.

[20] B. B. Mandelbrot. Renewal sets and random cutouts. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 22 :145–157, 1972.

[21] P. Marchal. Stable processes on the boundary of a regular tree. *Ann. Probab.*, 29(4) :1591–1611, 2001.

[22] S. I. Resnick and M. Rubinovitch. The structure of extremal processes. *Advances in Appl. Probability*, 5 :287–307, 1973.

[23] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.

[24] L. C. G. Rogers. Itô excursion theory via resolvents. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 63(2) :237–255, 1983.

[25] L. C. G. Rogers and D. Williams. Time-substitution based on fluctuating additive functionals (Wiener-Hopf factorization for infinitesimal generators). In *Seminar on Probability, XIV (Paris, 1978/1979) (French)*, volume 784 of *Lecture Notes in Math.*, pages 332–342. Springer, Berlin, 1980.

[26] T. S. Salisbury. Construction of right processes from excursions. *Probab. Theory Related Fields*, 73(3) :351–367, 1986.

[27] T. S. Salisbury. On the Itô excursion process. *Probab. Theory Related Fields*, 73(3) :319–350, 1986.

[28] J. Vuolle-Apiala. Itô excursion theory for self-similar Markov processes. *Ann. Probab.*, 22(2) :546–565, 1994.