1.61. Considere el sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= 1 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}$$

Muestre que si $ad - bc \neq 0$, el sistema tiene solución única $x = d/(ad - bc),\ y = -c/(ad - bc)$. Demostrar además que si $ad - bc = 0,\ c \neq 0$ o $d \neq 0$, entonces el sistema no tiene solución.

Solución. Denotemos $L_1,\ L_2$ la primera y segunda ecuación respectivamente. Suponer $ad - bc \neq 0$. Si $a \neq 0$, aplicando la operación elemental $L_2 \to L_2 - (c/a)L_1$ (restarle a la segunda ecuación (c/a) veces la primera) y resolviendo el sistema escalonado correspondiente obtenemos $x = d/(ad - bc),\ y = -c/(ad - bc)$. Si $a = 0$ entonces $ad - bc \neq 0 \Rightarrow c \neq 0$. El resultado se sigue intercambando las ecuaciones y procediendo como en el caso anterior.

Suponer ahora $ad - bc = 0$. Si $c \neq 0$, al aplicar la operación elemental $L_1 \to L_1 - (a/c)L_2$ obtenemos la ecuación degenerada $(b - ad/c)y = 1 \Leftrightarrow (ad - bc)y = -c$. Si $d \neq 0$, al aplicar la operación $L_1 \to L_1 - (b/d)L_2$ obtenemos la ecuación degenerada $(ad - bc)x = d$. Por lo tanto el sistema no tiene solución.

1.63. Consiedre un sistema de ecuaciones lineales con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

(i) Suponer que el sistema homogeneo asociado tiene únicamente la solución cero. Muestre que el sistema inhomogéneo tiene solución única para cualquier elección de los b_i.

(ii) Suponer que el sistema homogeneo asociado tiene una solución distinta de cero. Muestre que existen algunas b_i para las cuales el sistema inhomogéneo no tiene solución. Además demostrar que si el sistema inhomogéneo tiene solución, entonces tiene más de una.

Solución 1. Considerando la matriz de coeficientes $A = (a_{ij})$ como un operador lineal $A : K^n \to K^n$ el problema se resuelve fácilmente aplicando el teorema de la dimensión:

(i) Si el sistema homogéneo tiene únicamente la solución trivial, es decir, $Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in K^n$, entonces $\ker(A) = \{0\}$ y por el teorema de la dimensión A es biyectiva. Lo que significa que para cualquier $b = (b_1, \ldots, b_n)^T \in K^n$ existe un único $x \in K^n$ tal que $Ax = b$.

(ii) Si el sistema homogéneo tiene una solución distinta de cero, es decir, $A\tilde{x} = 0$ para algún $\tilde{x} \neq 0$, entonces $\mathrm{span}\{\tilde{x}\} \subset \ker(A) \Rightarrow 1 \leq \dim\ker(A)$. Por el teorema de la dimensión $n > \dim(\mathrm{Im}A) \Rightarrow \mathrm{Im}A$ es un subconjunto propio de K^n, es decir, existe $b = (b_1, \ldots, b_n)^T \in K^n \setminus \mathrm{Im}A$. Entonces, el sistema $Ax = b$ no tiene solución. Por último si el sistema inhomogéneo tiene una solución x entonces, de la linealidad de A, $x + \lambda\tilde{x}$ también es solución para cualquier $\lambda \in K^n$.

Solución 2. Usando eliminación Gaussiana: Sea $\tilde{A}x = 0$ es sistema escalonado asociado a $Ax = 0$ donde $\tilde{A}$ es una matriz n-cuadrada triangular superior (las últimas filas de $\tilde{A}$ pueden ser 0). Denotemos por $E_1, \ldots, E_k$ a las operaciones elementales mediante las cuales se redujo $Ax = 0$ a la forma escalonada $\tilde{A}x = 0$.

(i) Si $Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in K^n$, entonces el sistema $\tilde{A}x = 0$ es triangular $\Rightarrow$ todas las entradas en la diagonal de $\tilde{A}$ son distintas de cero. Notar que el sistema escalonado asociado a $Ax = b$ es de la forma $\tilde{A}x = \tilde{b}$ el cual tiene solución para cualquier valor de $\tilde{b}$. $Ax = b \sim \tilde{A}x = \tilde{b} \Rightarrow$ el sistema $Ax = b$ tiene solución para cualquier valor de b.

(ii) Sabemos que todo sistema homogéneo tiene la solución cero. Por lo tanto si el sistema $Ax = 0$ tiene una solución diferente de cero entonces tiene más de una solución $\Rightarrow$ el sistema escalonado $\tilde{A}x = 0$ no es triangular $\Rightarrow$ la última fila de $\tilde{A}$ es 0. Si $\tilde{b} = (0, \ldots, 0, 1)^T$ entonces el sistema $\tilde{A}x = \tilde{b}$ no tiene solución (pues su última ecuación es degenerada). Aplicando las operaciones $E_k^{-1}, \ldots, E_1^{-1}$ a $\tilde{A}x = \tilde{b}$ obtenemos el sistema inhomogéneo $Ax = b \sim \tilde{A}x = \tilde{b} \Rightarrow Ax = b$ tampoco tiene solución. Por último, si el sistema inhomogéneo $Ax = b$ tiene una solución entonces x_n es una variable libre en $\tilde{A}x = \tilde{b}$ y por lo tanto hay una infinidad de soluciones.

2.76. Sean $u,\ v$ vectores en $\mathbb{R}^n$, demuestre que si $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\|$ entonces $u,\ v$ son linealmente dependientes.

Solución. Si $u = 0$ el enunciado es trivial. Supongamos que u es distinto de cero, consideremos el polinomio $p(t) = \|v - tu\|^2$. Si $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\|$, es fácil mostrar que $t = \langle u, v\rangle / \|u\|^2$ es una raíz de $p(t)$ y por lo tanto

$$v = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|} u.$$

Notar que esta prueba funciona tambíen para vectores en $\mathbb{C}^n$.

4.122. Demuestre que cualquier matriz real y simétrica es congruente a una matriz diagonal con solo $1s$, $, -1s$, o $0s$ en la diagonal.

Solución. Como A es real y simétrica, existe una matriz no singular P tal que $D = P^T AP$ es diagonal, $D = \operatorname{diag}(d_i)$. Definimos $Q := \operatorname{diag}(q_i)$ donde

$$q_i = \begin{cases} 1 & \text{si } d_i = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|d_i|}} & \text{si } d_i \neq 0 \end{cases}$$

Entonces $B := Q^T DQ = \operatorname{diag}(q_i^2 d_i)$, donde

$$q_i^2 d_i = \begin{cases} 1 & \text{si } d_i > 0 \\ -1 & \text{si } d_i < 0 \\ 0 & \text{si } d_i = 0 \end{cases}$$

PQ es no singular y $B = (PQ)^T A(PQ)$. Por lo tanto B es una matriz diagonal con solo $1s$, $, -1s$, o $0s$ en la diagonal y A es congruente a B.

5.106. Considere el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 3 con coeficientes en $\mathbb{R}$, $P_3(t)$. Determinar si los vectores

$$u = t^3 - 4t^2 + 2t + 3,\ v = t^3 + 2t^2 + 4t - 1,\ w = 2t^3 - t^2 - 3t + 5$$

son linelamente independientes o dependientes.

Solución. Sea $S = \{t^3, t^3, t, 1\}$ base (ordenada) de $P_3(t)$, es fácil demostrar que los vectores $[u]_S = (1, -4, 2, 3)$, $[v]_S = (1, 2, 4, -1)$, $[w]_S = (2, -1, -3, 5)$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^4$ y por lo tanto $u,\ v,\ w$ son linealmente independientes en $P_3(t)$ (hemos hecho uso del isomorfismo $P_3(t) \cong \mathbb{R}^4$, $v \mapsto [v]_S$)
Nota: de la misma manera podemos verificar independencia lineal para vectores en cualquier espacio vectorial de dimensión finita.

5.110. Suponer que $(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{m1}, \ldots, a_{mn})$ son vectores linealmente independientes en K^n, y suponer que $v_1, \ldots, v_n$ son vectores linealmente independientes en un espacio vectorial V sobre el campo K. Mostrar que los vectores

$$w_1 = a_{11}v_1 + \ldots + a_{1n}v_n, \ldots,\ w_m = a_{m1}v_1 + \ldots + a_{mn}v_n$$

también son linealmente independientes.

Solución. Sea A la matriz de $m \times n$, $A = (a_{ij})$. Entonces las filas $A_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ son linealmente independientes $\Leftrightarrow$ el sistema $A^T x = 0$ tiene únicamente la solución cero.

Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ tales que $\sum_{i=1}^m \lambda_i w_i = 0$, por definición de los w_i tenemos

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j = \sum_{j=1}^n \Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} \Big) v_j = 0$$

Como los v_i son linealmente independientes,

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

esto implica que el vector $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ es solución al sistena $A^T x = 0$ y por lo tanto $\lambda_i = 0$ para cada i.

5.148. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un campo K que a su vez es un espacio vectorial de dimensión m sobre un subcampo F (entonces V también puede considerarse como un espacio vectorial sobre F). Demostrar que la dimensión de V sobre F es mn.

Solución. Sea $\{v_j\}_{j=1}^n$ una base de V sobre K y $\{k_i\}_{i=1}^m$ una base de K sobre F. Entonces los mn términos $k_i v_j$ forman una base V sobre F. En efecto, para cada $v \in V$ existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tales que $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j$ y para cada λ_j existen $\mu_{j1}, \dots, \mu_{jm} \in F$ tales que $\lambda_j = \sum_{i=1}^m \mu_{ji} k_i$. Por lo tanto

$$v = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j = \sum_{j=1}^n \Big(\sum_{i=1}^m \mu_{ji} k_i \Big) v_j = \sum_{i,j} \mu_{ji} (k_i v_j)$$

lo cual mustra que los $k_i v_j$ generan a V sobre F. Además son linealmente independientes pues si $\mu_{ij} \in F$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ son tales que $\sum_{i,j} \mu_{ji}(k_i v_j) = 0$ entonces

$$\sum_{i,j} \mu_{ji}(k_i v_j) = \sum_j \Big(\sum_i \mu_{ji} k_i \Big) v_j = 0$$

y la independencia lineal de $\{v_j\}_{j=1}^n$ garantiza que

$$\sum_i \mu_{ji} k_i = 0, \quad 1 \leq j \leq n$$

y la independencia lineal de $\{k_i\}_{i=1}^m$ garantiza $\mu_{ij} = 0$ para cada i, j.

5.122. Sean A y B dosmatrices de $m \times n$. Demostrar que $\operatorname{rank}(A + B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.

Solución. Denotemos a las filas de A, B como A_i, B_i respectivamente. Es fácil ver que

$$\operatorname{span}\{A_i + B_i\} \subset \operatorname{span}\{A_i\} + \operatorname{span}\{B_i\} \Rightarrow \dim \operatorname{span}\{A_i + B_i\} \leq \dim \big(\operatorname{span}\{A_i\} + \operatorname{span}\{B_i\} \big)$$

El lado izquierdo de ésta desigualdad es $\operatorname{rank}(A+B)$ y el lado derecho es igual a $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - \dim \operatorname{span}\{A_i\} \cap \operatorname{span}\{B_i\} \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$. Por lo tanto

$$\operatorname{rank}(A + B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$$

5.128. Sea V el espacio de polinomios (de una variable) sobre $\mathbb{R}$. Encuentre $\dim(U+W)$, $\dim(U\cap W)$, donde

$$\begin{aligned} U &= \operatorname{span}(t^3+4t^2-t+3, t^3+5t^2+5, 3t^3+10t^2-5t+5) \\ W &= \operatorname{span}(t^3+4t^2+6, t^3+2t^2-t+5, 2t^3+2t^2-3t+9) \end{aligned}$$

Solución. Consideremos la base (ordenada) $S=\{t^3,t^2,t,1\}$.

Escribiendo los vectores de coordenadas (respecto a S) de los polinomios que generan U como filas de una matriz obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 10 & -5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{t^3+4t^2-t+3, t^2+t+2\} \text{ es base de } U$$

Procediendo de la misma manera con los vectores que generan a W

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{t^3+4t^2+6, 2t^2+t+1\} \text{ es base de } W$$

$$U+W = \operatorname{span} U\cup W = \operatorname{span}\{t^3+4t^2-t+3, t^2+t+2, t^3+4t^2+6, 2t^2+t+1\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{t^3+4t^2-t+3, t^2+t+2, t+3\} \text{ es base de } U+W$$

Por lo tanto $\dim(U+W)=3$ y $\dim(U\cap W)=\dim U+\dim W-\dim(U+W)=1$.

9.66. Encuentra un operador lineal $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ cuya imagen sea el subespacio generado por $(1,2,3)$ y $(4,5,6)$.

Solución. Podemos obtener tal operador escribiendo una matriz de 3×3 tal que dos de sus columnas sean los vectores dados y la tercera columna sea una combinación lineal de estos. En particular la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

define un operador lineal F cuya imagen es el espacio columna $\operatorname{span}\{(1,2,3),(4,5,6)\}$. Es decir, $[F]_S=A$ donde S es la base estandar de $\mathbb{R}^3$.

9.67. Encuentra un operador lineal $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ cuyo kernel sea generado por $(1,2,3,4)$ y $(0,1,1,1)$.

Solución. Podemos determinar tal operador considerando una matriz de coeficientes de 3×4 tal que el espacio solución del sistema homogeneo asociado sea $\operatorname{span}\{(1,2,3,4),(0,1,1,1)\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -x-y+z & -2x-y+t \end{pmatrix}$$

Entonces $\mathrm{span}\{(1,2,3,4),(0,1,1,1)\}$ es el espacio solución del sistema

$$\begin{array}{rrrrl} -x & -y & +z & & = 0 \\ -2x & -y & & +t & = 0 \end{array} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0} \text{ donde } A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sea F tal que $[F] = A$.

9.70. Considere el espacio vectorial V de los polinimios reales de grado menor o igual a 10 y el operador lineal $D^4 : V \to V$, definido por $d^4 f/dt^4$, es decir, la cuarta derivada. Encuentre una base y la dimensión de $\mathrm{Im}(D^4)$ y $\ker(D^4)$.

Solución. Sea $S = \{1, t, t^2, \ldots, t^{10}\}$ una base de V,

$$D^4\big(\{1,t,t^2,t^3\}\big) = \{0\} \Rightarrow \mathrm{span}\{1,t,t^2,t^3\} \subset \ker(D^4) \Rightarrow 4 \leq \dim \ker(D^4)$$

$$D^4\big(\{t^n\}_{n=4}^{10}\big) = \Big\{\frac{n!}{(n-3)!}t^{n-4}\Big\}_{n=4}^{10} \Rightarrow \mathrm{span}\Big\{\frac{n!}{(n-3)!}t^{n-4}\Big\}_{n=4}^{10} = \mathrm{span}\{t^n\}_{n=0}^{6} \subset \mathrm{Im}(D^4) \Rightarrow 7 \leq \dim \mathrm{Im}(D^4)$$

Por el teorema de la dimensión

$$\dim\ker(D^4) + \dim\mathrm{Im}(D^4) = \dim V = 11 \Rightarrow \dim\ker(D^4) = 4,\ \dim\mathrm{Im}(D^4) = 7$$

Como consecuencia $\{1,t,t^2,t^3\}$ es una base de $\ker(D^4)$ y $\{1,t,t^2,\ldots,t^6\}$ es una base de $\mathrm{Im}(D^4)$.

9.89. Dos operadores $F,\ G \in A(V) := \{T : V \to V \mid V \text{ es lineal}\}$ son similares si existe un operador invertible $P \in A(V)$ tal que $F = P^{-1}GP$. Demostrar que operadores similares tienen el mismo rango cuando el espacio vectorial V es de dimensión finita.

Solución. Sean F, G operadores similares en $A(V)$, donde $\dim V = n < \infty$, entonces existe un operador invertible P tal que $F = P^{-1}GP$.

Por el teorema de la dimensión es suficiente mostrar que $\dim\ker F = \dim\ker G$. P preserva independencia lineal de conjuntos pues es invertible. Sea $\{v_1, \ldots, v_r\}$ una base de $\ker F$. Entonces $\{Pv_1, \ldots, Pv_r\}$ es linealmente independiente.

$$F = P^{-1}GP \Leftrightarrow GP = PF \Rightarrow G(Pv_i) = P(Fv_i) = P0 = 0 \Rightarrow \mathrm{span}\{Pv_i\}_{i+1}^{r} \subset \ker G \Rightarrow r = \dim\ker F \leq \dim\ker G$$

Por reflexividad $\dim\ker G \leq \dim\ker F$ $\big(G = Q^{-1}FQ$ con $Q = P^{-1}\big)$. Entonces $\dim\ker F = \dim\ker G$.

7.81. Sea V el espacio vectorial de las matrices m-cuadradas sobre un campo K, y suponer que $D : V \to K$ es un operador m-lineal en las filas. Demostrar que la siguiente condición es equivalente a que D sea alternante:

$$D(A_1, \ldots, A_m) = 0 \text{ si } A_i = A_{i+1} \text{ para algún } i \tag{1}$$

Solución. Por definición D es alternante si

$$D(A_1,\ldots,A_m)=0 \text{ si } A_i=A_j \;\; i\neq j$$

Es fácil demostrar que esta condición es equivalente a

$$D(\ldots,A_i,\ldots,A_j,\ldots)=-D(\ldots,A_j,\ldots,A_i,\ldots) \text{ si } i\neq j$$

Si D es alternante, la condición 1 se satisface por definición.
Suponer D satisface 1 y sean $A_1,\ldots,A_m\in K^m$ con $A_i=A_j$ para algunos $i,\ j$ (s.p.g) $i+1<j$, entonces

$$D(A_1,\ldots,A_m)=(-1)^r D(\ldots,A_i,A_j,A_{i+1},\ldots)=0$$

donde r es el número de transposiciones necesarias para llevar a A_j a la posición $i+1$ intercambiando A_j con su predecesor en cada transposición.

7.70. Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ la base estándar de K^n, $e_i=(e_{i1},\ldots,e_{in})$ con $e_{ij}=\delta_{ij}$, y $\sigma\in S_n$. Sea A la matriz n-cuadrada cuya fila i es $e_{\sigma(i)}$. Mostrar que $\det(A)=\operatorname{sgn}\sigma$.

Solución. Es una consecuencia directa de la definición:

$$\det(A)=\sum_{\tau\in S_n}(\operatorname{sgn}\tau)e_{\sigma(1)\tau(1)}e_{\sigma(2)\tau(2)}\cdots e_{\sigma(n)\tau(n)}=\operatorname{sgn}\sigma$$

donde la última igualdad se debe a que si $\tau\neq\sigma$, entonces existe algún i para el cual $\sigma(i)\neq\tau(i)\Rightarrow e_{\sigma(i)\tau(i)}=\delta_{\sigma(i)\tau(i)}=0$.

7.77. Sean $A,\ B,\ C,\ D$ matrices n-cuadradas que conmutan entre si. Considerar la matriz $2n$-cuadrada

$$M=\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}$$

Demostrar que $\det(M)=\det(AD-BC)$.

Solución. Suponer que A es no singular, entonces

$$\begin{pmatrix} I & 0\\ -CA^{-1} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B\\ 0 & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}\Rightarrow\det\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} I & 0\\ -CA^{-1} & I\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}$$
$$=\det\begin{pmatrix} A & B\\ 0 & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}=\det(A(D-CA^{-1}B))=\det(AD-BC).$$

Si A es singular, existe un $\delta>0$ tal que para todo $\epsilon\in(0,\delta)$, $A+\epsilon I$ es no singular. Esto se debe a que el polinomio

$$p(\epsilon)=\det(A+\epsilon I)$$

tiene a lo más un número finito de raíces. Entonces podemos escoger δ como la raíz mas pequeña diferente de cero (si 0 es la única raíz de $p(\epsilon)$, cualquier elección de δ funciona).
Es fácil ver que $A+\epsilon I,B,C,D$ conmutan y procediendo como en el caso anterior obtenemos

$$\det\begin{pmatrix} A+\epsilon I & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det((A+\epsilon I)B - CD)$$

Tomando el límite en ambos lados de la ecuación cuando $\epsilon \to 0^+$ concluimos

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AB - CD)$$

7.83. Sea A una matriz n-cuadrada. Demuestre que $\operatorname{rank}(A)$ es igual al orden de la submatriz más grande de A (obtenida borrando filas y columnas) cuyo determinante es distinto de cero.

Solución. Sea $r = \operatorname{rank}(A)$, $0 < r < n$ (el resultado es obvio para $r = 0$ o $r = n$). Como r es la dimensión del espacio columna de A, hay a los más r columnas linealmente independientes en A. Por lo tanto cualquier submatriz de orden $> r$ tiene determinante igual a cero. Basta demostrar entonces que existe una submatriz de orden r con determinante distinto de cero.

Sea B una submatriz de A de $n \times r$ cuyas columnas son linealmente independientes. Entonces $rank(B) = r$, y como la dimensión del espacio columna de B es igual a la dimensión de su espacio fila concluimos que hay r filas linealmente independientes en B. Borrando las demás filas conseguimos una submatriz de A de $r \times r$ cuyo determinante es distinto de cero.