

Solución de problema 2.12

12 sept, 2007

El Problema: Dos campos vectoriales conmutan ssi sus flujos conmutan.

Lema. Dados dos campos vectoriales X, Y en una variedad, sea $Y_t = d\Phi_t Y$, donde Φ_t es el flujo de X (o sea $\dot{\Phi}_t = X \circ \Phi_t$). Entonces $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} Y_t = [Y, X]$.

Demostración del Lema. El inciso es local, así que podemos suponer que estamos en un abierto en \mathbb{R}^n . Entonces X, Y y Φ_t son vectores columna de funciones, y denotamos sus matrices Jacobianas (matrices de derivadas parciales) por $DX, DY, D\Phi_t$ (resp.). En esta notación, $[Y, X] = (DX)Y - (DY)X$ (ver ejr. 2.5) y $Y_t(\Phi_t x) = (D\Phi_t)(x)Y(x)$. Ahora tomamos la derivada $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0}$ de los dos lados de la última ecuación. Primero el lado izquierdo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} Y_t \circ \Phi_t = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} Y_t + \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (Y \circ \Phi_t) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} Y_t + (DY)X.$$

Luego el lado derecho:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (D\Phi_t)Y = \left[D \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \Phi_t \right] Y = (DX)Y.$$

Juntando todo, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} Y = (DX)Y - (DY)X = [Y, X].$$

□

Corolario del Lema: $\frac{\partial}{\partial t} Y_t = d\Phi_t[Y, X]$.

Para ver esto, usamos la propiedad de grupo de Φ_t , o sea $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$, así que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Y_t &= \lim_{s \rightarrow 0} (Y_{t+s} - Y_t) / s = \lim_{s \rightarrow 0} (d\Phi_{t+s} Y - d\Phi_t Y) / s = \lim_{s \rightarrow 0} d\Phi_t (d\Phi_s Y - Y) / s = \\ &= d\Phi_t \left[\lim_{s \rightarrow 0} (d\Phi_s Y - Y) / s \right] = d\Phi_t \left[\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} Y_s \right] = d\Phi_t[Y, X]. \end{aligned}$$

□

Ahora si X y Y conmutan, entonces según el corolario del lema, $\frac{\partial}{\partial t} Y_t = 0$, así que Y_t es constante (en t), o sea $d\Phi_t Y = Y$, por lo que Y es invariante bajo el flujo de X . Esto implica que $\Phi_s^X \circ \Phi_t^Y(x)$, para s fijo y t variable, es una curva integral de Y (ver ejr. 2.7), y que pasa por $\Phi_s^X(x)$ en $t = 0$. Pero estas mismas propiedades las satisface la curva $\Phi_t^Y \circ \Phi_s^X(x)$, así que, por el teorema de unicidad de soluciones de EDO, deben coincidir. Conversamente, si los flujos de X y Y conmutan, o sea $\Phi_s^X(\Phi_t^Y x) = \Phi_t^Y(\Phi_s^X x)$, entonces derivando con respecto a t en $t = 0$, obtenemos $Y_s = d\Phi_s^X Y = Y$, así que, según el lema, $[X, Y] = 0$. □