

Solución del problema 6.13

21 nov, 2007

El problema. Demostrar que una representación compleja irreducible V de un grupo G es autoconjugada, $V \cong \bar{V}$, ssi es cuaternionaria o real.

Nota: el anunciado original del problema no incluye la condición de “irreducible”. Esto es un error (ejercicio!).

Demostración: si la representación es real o cuaternionaria tenemos en ambos casos un isomorfismo G -equivariante $\phi : \bar{V} \rightarrow V$ ($\phi = C$ en el caso real y $\phi = J$ en el caso cuaternionaria).

En la otra dirección, si existe un isomorfismo (lineal complejo) $\phi : \bar{V} \rightarrow V$, o sea un endomorfismo G -equivariante *anti-lineal* $\phi : V \rightarrow V$, entonces $T := \phi^2$ es un endomorfismo G -equivariante lineal-complejo, así que por el lema de Schur, $T = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Ahora si definimos $\tilde{\phi} := \alpha\phi$, $\alpha \in \mathbb{C}$, tenemos que $\tilde{\phi}^2 = |\alpha|^2\phi^2 = |\alpha|^2\lambda I$, así que podemos suponer que $|\lambda| = 1$. Ahora T y ϕ obviamente conmutan y uno verifica que $T\phi = \lambda\phi$, $\phi T = \bar{\lambda}\phi$, así que $\bar{\lambda} = \lambda$. Junto con $|\lambda| = 1$ esto implica que $\lambda = \pm 1$. \square

Notas:

1. En la clase hoy dimos una demostración para el caso de una representación unitaria (para un grupo compacto, por ejemplo). La demostración aquí es más general, aunque a la mejor más misteriosa.
2. Es importante notar que las dos opciones (real y cuaternionaria) son mutuamente exclusivas (otro ejercicio!).
3. Para grupos compactos (en particular finitos), hay un criterio en términos del caracter, para saber si una representación es autoconjugada, y en caso que sí, si es real o cuaternionaria. Puedes descubrir estos criterios?