Guia para exámen final
(En Construcción)

Fecha del exámen: sábado, 6 dic, 2008, 11am

Material: todas las definiciones y teoremas que aparecen en las guias de los examenes parciales 1 y 2, más lo que aparece en los preámbulos de las tareas 12,13,14.

Problemas: hay que saber resolver todos los problemas de las tareas. Aquí hay problemas adicionales para ayudar a digerir el material.

1. Demuestra que $\sqrt[5]{2}$ y $\log_{10} 2$ son números iracionales. Generalizar para $\sqrt[n]{m}$ y $\log_m n$.

2. Mi mamá me llama cada 11 dias y mi papá me llama cada 5 dias.
   a) ¿Cada cuándo me llama mi mama en domingo?
   b) ¿Cada cuándo me llaman los dos en domingo?
   c) ¿Cada cuándo me llaman los dos al mismo dia?
   d) ¿Cada cuándo me llaman en dias sucesivos de la semana (e.g. mi mama el martes y mi papa el miercoles, o vice versa)?
   e) ¿Cada cuándo sucede que pasen 4 dias consecutivos sin que ninguno de mis papas me llama?
   f) Inventa otra pregunta interesante en este contexto.

3. Encontrar los últimos 3 dígitos de $1 - 7 + 7^2 - 7^3 + \cdots + 7^{2008}$.

4. *a*) Encuentra los pares de enteros $n, m > 0$ tal que el desarrollo decimal de n/m es finito. Generalizar para base arbitraria $\neq 10$.
   b) Encuentra el desarrolo decimal de a) $1/7$, b) $1/77$, c) $1/777$.
   c) Demuestra que para caulquer par de enteros $n, m > 0$, el desarrollo decimal de n/m es "eventualmente periódico"; i.e., si $n/m = a_1a_2\ldots a_k.b_1b_2b_3\ldots$ entonces existen enteros $N, T > 0$ tal que $b_{i+T} = b_i$ para todo $i \geq N$.
   d) Demuestra que en el inciso anterior, el mínimo T que cumple $b_{i+T} = b_i$ para algun N y todo $i \geq N$ (el "periodo") satisface $T < m$.
   e) Encuentra el periodo del desarrollo decimal de $1/n$, $10 < n < 20$.

5. ¿Cuántos números n hay en el rango $1 \leq n \leq 2008$ tal que…
   a) $3|n$.
   b) $k|n$, $k = 2, 3, 5, 7$.
   c) $k|n$, $2 \leq k \leq 7$.
   d) $n \equiv 1 \mod k$, $k = 2, 3, 4$.
   e) Existen enteros x, y tal que $nx + 17y = 1$.
   f) Existe un entero x tal que $nx \equiv 1 \mod 17$.
   g) Existe un un entero $x > 0$ tal que $n^x \equiv 1 \mod 17$.
   h) $8n \equiv 1 \mod 17$.
   i) Existe un un entero x tal que $nx \equiv 1 \mod 17$, 18 y 19.

j) Existe un entero x tal que $x^n \equiv x \mod 17$.
k) Para todo entero x, $x^n \equiv x \mod 17$.
l) n es primo (ver por ejemplo *http://doc.trolltech.com/2.3/primes.html*).
m) n es un producto de dos primos.
n) n es un producto de dos primos distintos.
ñ) n es un cuadrado ($n = x^2$ para algun entero x).
o) $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$.
p) $\sqrt[3]{n} \in \mathbb{Q}$.
q) $\log_{10} n \in \mathbb{Q}$.
r) $\phi(n) = 3$ (ϕ es la función de Euler).
s) $\phi(n) = 10$.
t) La representación decimal de n contiene el dígito 7.
u) La representación decimal de n contiene el dígito 7 exactamente dos veces.
v) La representación decimal de n contiene el dígito 7 por lo menos dos veces.
w) La representación de n en base 9 y 10 termina con el mismo dígito.

6. Dada una elipse y una recta l, existen exactamente dos rectas paralelas a l y tangentes a la elipse (consideramos a l paralela a si misma). Generaliza para hipérbola y parábola.

7. *a*) Dada una elipse con focos F_1, F_2 y recta tangente l, sean d_1, d_2 las distancias de l a F_1, F_2 (respectivamente). Demuestra que el producto $m = d_1 d_2$ es independiente de l (es el mismo número para todas las rectas tangentes a la misma elipse). Generaliza para hipérbola y parábola.
   b) Dados dos puntos $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ y un número $m > 0$ consideramos el conjunto de todas las rectas l tal que (1) tiene a F_1 y F_2 al mismo lado de l, (2) el producto de las distancias de l a F_1, F_2 es m. Demuestra que este conjunto de rectas es la *envolvente* de una elipse con focos F_1, F_2. (La envolvente de una curva es el conjunto de todas las rectas tangentes a la curva).
   c) Cambiamos en el inciso anterior la condición (1) a la condición que los puntos F_1 y F_2 esten a lados distintos de l. Demuestra que en este caso el conjunto de rectas es la envolvente de una hipérbola con focos F_1, F_2.
   d) Encuentra una construcción similar que produce la envolvente de una parábola.
   e) Los segmentos de la trayectora de una pelota en una mesa de billard elíptica son tangentes a una elipse o hipérbola (dependiendo de la trayectoria) con los mismos focos que la mesa (ver el problema "extra crédito" del segundo examen parcial).

8. *a*) Dados dos puntos distintos $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$, demuestra que para todo $m > 0$ el conjunto de los puntos $P \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|P - P_1\| = m\|P - P_2\|$, es un círculo si $m \neq 1$, o una recta si $m = 1$.
   b) Encuentra el círculo (centro y radio) de puntos en el plano cuyo razon de distancias a $(\pm 1, 0)$ es 2.

9. Fijamos dos puntos distintos $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$. Para cada punto $P \in \mathbb{R}^2$, distinto de P_1, P_2, definimos dos círculos (o rectas) que pasan por P:

   (A) el círculo que pasa por P, P_1, P_2 (o la recta que pasa por P_1, P_2, en caso que P está sobre esta recta),

(B) el círculo de puntos en el plano cuyo razon de distancias a P_1, P_2 es el mismo que para P (o recta, en caso que P es equidistante a P_1, P_2).

Llamemos al primer círculo un "círculo tipo A" y al segundo "círculo tipo B". Demuestra:

a) La intersección de un par de círculos tipo A es $\{P_1, P_2\}$. La unión de todos los círculos tipo A es todo el plano.

b) La intersección de un par de círculos tipo B es vacía. La unión de todos los círculos tipo B es todo el plano menos $\{P_1, P_2\}$.

c) Cualquer par de círculos, uno de tipo A otro de tipo B, intersectan ortogonalmente, en dos puntos (los tangentes en los puntos de intersección son perpendiculares).

d) Si $f : \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \to \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ es una transformación de Mobius, $P_i' = f(P_i)$, $i = 1, 2$, entonces f manda los círculos de tipo A y B, con respecto a P_1, P_2, a los círculos de tipo A y B (respectivamente), con respecto a P_1', P_2'.

e) Existe una transformación de Mobius que manda P_1, P_2 a $(0, 0)$, ∞. Esta transformación manda los círculos de tipo A y B (con respecto a P_1, P_2) a las rectas que pasan por el origen y a los círculos con centro en el origen (respectivamente).

10. *a*) Cuántas veces durante el día coinciden las dos manecillas del reloj (de hora y minutos).

b) Cuántas veces durante el día la posición de las dos manecillas del reloj tiene la propiedad que al intercambiar las posiciones de las manecillas se obtiene una posición legal de las manecillas del reloj.

Por ejemplo, si intercambiamos las manecillas a las 6:00, la manecilla chica nos indica que son las 12:00, lo cual es inconsistente con la posición de la manecilla grande (apuntando hacia el dígito 6).

Sugerencia: si $z, h \in \mathbb{C}$, $|z| = |h| = 1$, denotan las posiciones de las manecillas de minutos y horas (resp.), entonces $z = h^{12}$ (cambiando la dirección de las manecillas del reloj).

(Actualizado: 4 dic, 2008.)