

Examen parcial 1

(17 oct, 2009)

Todos los espacios vectoriales son de dimensión finita.

1. Sea $\{v_1, \dots, v_k\}$ un conjunto ortonormal en un espacio euclideo V (no necesariamente una base). Demuestra que para todo $v \in V$, $\sum_{i=1}^k |\langle v, v_i \rangle|^2 \leq \|v\|^2$, con igualdad ssi v pertenece al subespacio generado por $\{v_1, \dots, v_k\}$.
2. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ valores propios *distintos* de un operador lineal T en un espacio vectorial V , con vectores propios asociados v_1, \dots, v_k (es decir, los v_i son vectores no nulos y $Tv_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, \dots, k$). Demuestra que v_1, \dots, v_k son linealmente independientes.
3. Sea T una transformación lineal entre espacios euclideos (o hermitianos). Demuestra que la imagen de T es el complemento ortogonal del kernel de la adjunta de T .
4. Sea L el espacio de las matrices 3×3 con entradas reales y $V \subset L$ el conjunto de las matrices antisimétricas.
 - a) Demuestra que V es un subespacio vectorial de L de dimensión 3.
 - b) Para dos elementos $A, B \in L$ se define $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t)$. Demuestra que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto escalar en L .

Nota: en los siguientes 3 incisos se usa este producto escalar.
 - c) Encuentra una base ortonormal para V y completala a una base ortonormal de L .
 - d) Para cada $A \in V$ se define el operador lineal $T_A : V \rightarrow V$ por $T_A(B) = AB - BA$. Demuestra que T_A es antisimétrico.
 - e) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ y

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Encuentra los valores y vectores propios de la complexificación de T_A en términos de a, b, c .