

hecho de que $C_0^1 = C_1^1 = 1$, para probar, mediante inducción matemática, que

$$C_i^n = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad [9]$$

(Para todo entero positivo n , el símbolo $n!$ —léase «factorial de n »—designa el producto de los n primeros enteros: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$. Y resulta conveniente definir también $0!$ por la igualdad $0! = 1$; de este modo [9] es válido para $i = 0$ e $i = n$.) Esta fórmula explícita para los coeficientes del desarrollo binómico se conoce con el nombre de *teorema del binomio*. (Véase también Cap. VIII, Suplemento, III, 1.)

Ejercicios: Demuéstrese por inducción matemática:

$$1. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$2. \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

$$*3. 1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1} = \frac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}$$

$$*4. (1+q)(1+q^2)(1+q^4)\dots(1+q^{2^n}) = \frac{1 - q^{2^{n+1}}}{1-q}$$

Hállese la suma de las siguientes progresiones geométricas:

$$5. \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2} + \dots + \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

$$6. 1 + \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots + \frac{x^n}{(1+x^2)^n}$$

$$7. \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^n$$

Utilizando las fórmulas [4] y [5], pruébese:

$$*8. 1^3 + 3^3 + \dots + (2n+1)^3 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$$

$$*9. 1^3 + 3^3 + \dots + (2n+1)^3 = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1).$$

10. Demuéstrese los mismos resultados directamente por inducción matemática.

*7. **Algunas observaciones a propósito de la inducción matemática.**—El principio de inducción matemática puede modificarse un poco y darle la siguiente forma: