Dominación convexa y teoremas límite

Arturo Jaramillo Gil (proyecto en progreso con James Melbourne)

Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT)

Motivación

Sean μ y ν dos medidas reales que queremos comparar con una métrica.

Motivación

Sean μ y ν dos medidas reales que queremos comparar con una métrica.

- $\nu \sim$ proceso de Galton Watson y μ su ley asintótica.

Motivación

Sean μ y ν dos medidas reales que queremos comparar con una métrica.

- $\nu \sim$ proceso de Galton Watson y μ su ley asintótica.
- $\nu \sim$ suma de Bernoulli independientes y $\mu \sim$ Poisson.

Motivación

Sean μ y ν dos medidas reales que queremos comparar con una métrica.

- $\nu \sim$ proceso de Galton Watson y μ su ley asintótica.
- $\nu \sim$ suma de Bernoulli independientes y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ medida de *volumen* intrínseco y $\mu \sim$ Poisson.

Motivación

Sean μ y ν dos medidas reales que queremos comparar con una métrica.

- $\nu \sim$ proceso de Galton Watson y μ su ley asintótica.
- $\nu \sim$ suma de Bernoulli independientes y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ medida de *volumen* intrínseco y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ medida matroidal y $\mu \sim$ Poisson.

Motivación

Sean μ y ν dos medidas reales que queremos comparar con una métrica.

- $\nu \sim$ proceso de Galton Watson y μ su ley asintótica.
- $\nu \sim$ suma de Bernoulli independientes y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ medida de *volumen* intrínseco y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ medida matroidal y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ suma de variables negativamente asociadas y $\mu \sim$ suma de variables independientes.

Motivación

Sean μ y ν dos medidas reales que queremos comparar con una métrica.

- $\nu \sim$ proceso de Galton Watson y μ su ley asintótica.
- $\nu \sim$ suma de Bernoulli independientes y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ medida de *volumen* intrínseco y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ medida matroidal y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ suma de variables negativamente asociadas y $\mu \sim$ suma de variables independientes.

Motivación

Sean μ y ν dos medidas reales que queremos comparar con una métrica.

- $\nu \sim$ proceso de Galton Watson y μ su ley asintótica.
- $\nu \sim$ suma de Bernoulli independientes y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ medida de *volumen* intrínseco y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ medida matroidal y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ suma de variables negativamente asociadas y $\mu \sim$ suma de variables independientes.

Objetivo:

Comparar μ y ν con alguna métrica con una perspectiva común: *convexidad*.

Dominación

Sea $\mathcal{K}$ una familia de funciones.

Dominación

Sea $\mathcal{K}$ una familia de funciones.

Definition
Dos medidas μ y ν en $\mathbb{R}$ satisfacen $\mu \preceq_{\mathcal{K}} \nu$ si para $V \in \mathcal{K}$ integrable,

$$\int_{\mathbb{R}} V(x)\mu(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} V(x)\nu(dx).$$

Dominación

Sea $\mathcal{K}$ una familia de funciones.

Definition
Dos medidas μ y ν en $\mathbb{R}$ satisfacen $\mu \preceq_{\mathcal{K}} \nu$ si para $V \in \mathcal{K}$ integrable,

$$\int_{\mathbb{R}} V(x)\mu(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} V(x)\nu(dx).$$

- Si $\mathcal{K} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ; } f \text{ es convexa}\}$, decimos ν domina convexamente a μ

Dominación

Sea $\mathcal{K}$ una familia de funciones.

Definition
Dos medidas μ y ν en $\mathbb{R}$ satisfacen $\mu \preceq_{\mathcal{K}} \nu$ si para $V \in \mathcal{K}$ integrable,

$$\int_{\mathbb{R}} V(x)\mu(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} V(x)\nu(dx).$$

- Si $\mathcal{K} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ f \quad \text{es convexa}\}$, decimos ν domina convexamente a μ ($\mu \preceq_c \nu$).

Dominación

Sea $\mathcal{K}$ una familia de funciones.

Definition
Dos medidas μ y ν en $\mathbb{R}$ satisfacen $\mu \preceq_{\mathcal{K}} \nu$ si para $V \in \mathcal{K}$ integrable,

$$\int_{\mathbb{R}} V(x)\mu(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} V(x)\nu(dx).$$

- Si $\mathcal{K} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ f \ \text{ es convexa}\}$, decimos ν domina convexamente a μ ($\mu \preceq_c \nu$).
- Si $\mathcal{K} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ f \ \text{ es creciente y convexa}\}$, decimos ν domina en orden convexo creciente a μ

Dominación

Sea $\mathcal{K}$ una familia de funciones.

Definition
Dos medidas μ y ν en $\mathbb{R}$ satisfacen $\mu \preceq_{\mathcal{K}} \nu$ si para $V \in \mathcal{K}$ integrable,

$$\int_{\mathbb{R}} V(x)\mu(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} V(x)\nu(dx).$$

- Si $\mathcal{K} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ f \ \text{ es convexa}\}$, decimos ν domina convexamente a μ ($\mu \preceq_c \nu$).
- Si $\mathcal{K} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ f \ \text{ es creciente y convexa}\}$, decimos ν domina en orden convexo creciente a μ ($\mu \preceq_{ic} \nu$).

Teorema de Boutsikas y Vaggelatou

Usaremos la notación $\langle f, \gamma \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)\gamma(dx)$ y $m_k[\gamma] := \langle x^k, \gamma \rangle$.

Teorema de Boutsikas y Vaggelatou

Usaremos la notación $\langle f, \gamma \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)\gamma(dx)$ y $m_k[\gamma] := \langle x^k, \gamma \rangle$.

Definition
Definimos la 2-métrica de Zolotarev, con $m \in \mathbb{N}$, como

$$\zeta_2(\mu, \nu) := \int_{t \in \mathbb{R}} |\langle (x-t)_+, \nu \rangle - \langle (x-t)_+, \mu \rangle| dt.$$

Teorema de Boutsikas y Vaggelatou

Usaremos la notación $\langle f, \gamma \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)\gamma(dx)$ y $m_k[\gamma] := \langle x^k, \gamma \rangle$.

Definition
Definimos la 2-métrica de Zolotarev, con $m \in \mathbb{N}$, como

$$\zeta_2(\mu, \nu) := \int_{t \in \mathbb{R}} |\langle (x-t)_+, \nu \rangle - \langle (x-t)_+, \mu \rangle| dt.$$

Theorem (Boutsikas and Vaggelatou, 2002)
Si $\mu \preceq_c \nu$, entonces,

$$\zeta_2(\mu, \nu) \leq \frac{1}{2}(m_2[\nu] - m_2[\nu]). \tag{1}$$

Instancias simples de dominación convexa

Familias muy generales que exhiben dominación convexa

Instancias simples de dominación convexa

Familias muy generales que exhiben dominación convexa

- Martingalas, submartingalas y supermartingalas

Instancias simples de dominación convexa

Familias muy generales que exhiben dominación convexa

- Martingalas, submartingalas y supermartingalas
- Medidas con dos cruces en su densidad

Instancias simples de dominación convexa

Familias muy generales que exhiben dominación convexa

- Martingalas, submartingalas y supermartingalas
- Medidas con dos cruces en su densidad
- Funciones de vectores positivamente asociados

Instancias simples de dominación convexa

Familias muy generales que exhiben dominación convexa

- Martingalas, submartingalas y supermartingalas
- Medidas con dos cruces en su densidad
- Funciones de vectores positivamente asociados
- Variables compuestas

Instancias simples de dominación convexa

Familias muy generales que exhiben dominación convexa

- Martingalas, submartingalas y supermartingalas
- Medidas con dos cruces en su densidad
- Funciones de vectores positivamente asociados
- Variables compuestas

Instancias simples de dominación convexa

Familias muy generales que exhiben dominación convexa

- Martingalas, submartingalas y supermartingalas
- Medidas con dos cruces en su densidad
- Funciones de vectores positivamente asociados
- Variables compuestas

Preguntas naturales

Instancias simples de dominación convexa

Familias muy generales que exhiben dominación convexa

- Martingalas, submartingalas y supermartingalas
- Medidas con dos cruces en su densidad
- Funciones de vectores positivamente asociados
- Variables compuestas

Preguntas naturales

- Podemos utilizar una métrica diferente?

Instancias simples de dominación convexa

Familias muy generales que exhiben dominación convexa

- Martingalas, submartingalas y supermartingalas
- Medidas con dos cruces en su densidad
- Funciones de vectores positivamente asociados
- Variables compuestas

Preguntas naturales

- Podemos utilizar una métrica diferente?
- Que temas interesantes son abordables mediante esta metodología?

Instancias simples de dominación convexa

Familias muy generales que exhiben dominación convexa

- Martingalas, submartingalas y supermartingalas
- Medidas con dos cruces en su densidad
- Funciones de vectores positivamente asociados
- Variables compuestas

Preguntas naturales

- Podemos utilizar una métrica diferente?
- Que temas interesantes son abordables mediante esta metodología?
- Que tipo de extensiones naturales surgen?

Un cálculo clave de Rachev y Ruschendorf

Sea $\mathcal{C}$ una clase de funciones.

Un cálculo clave de Rachev y Ruschendorf

Sea $\mathcal{C}$ una clase de funciones. Definimos

$$d_{\mathcal{C}}(\mu, \nu) = \sup_{f \in \mathcal{C}} (\langle f, \mu \rangle - \langle f, \nu \rangle)$$

Sea $\mathcal{C}$ una clase de funciones. Definimos

$$d_{\mathcal{C}}(\mu,\nu) = \sup_{f\in\mathcal{C}}(\langle f,\mu\rangle - \langle f,\nu\rangle)$$

Luego, si $a \in \mathbb{R}$ es arbitrario,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x \int_a^s f''(t)dtds$$

Un cálculo clave de Rachev y Ruschendorf

Sea $\mathcal{C}$ una clase de funciones. Definimos

$$d_{\mathcal{C}}(\mu, \nu) = \sup_{f \in \mathcal{C}} (\langle f, \mu \rangle - \langle f, \nu \rangle)$$

Luego, si $a \in \mathbb{R}$ es arbitrario,

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \int_a^x \int_a^s f''(t) dt ds$$

podemos llegar a

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \int_{\mathbb{R}} \Phi_{a,t}(x) f''(t) dt,$$

donde

$$\Phi_{a,t}(x) := [x - t]_+ \mathbb{1}_{\{\{t \geq a\}\}} + [t - x]_+ \mathbb{1}_{\{\{t < a\}\}}.$$

Un cálculo clave de Rachev y Ruschendorf

Observación: si $\mu \preceq_c \nu$, entonces $\langle \Phi_{a,t}, \nu \rangle - \langle \Phi_{a,t}, \nu \rangle \geq 0$.

Un cálculo clave de Rachev y Ruschendorf

Observación: si $\mu \preceq_c \nu$, entonces $\langle \Phi_{a,t}, \nu \rangle - \langle \Phi_{a,t}, \nu \rangle \geq 0$. Para $f \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}\langle f, \nu \rangle - \langle f, \mu \rangle &= (m_1[\nu] - m_1[\nu]) f'(a) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \langle \Phi_{a,t}, \nu \rangle - \langle \Phi_{a,t}, \mu \rangle f''(t) dt.\end{aligned}$$

Un cálculo clave de Rachev y Ruschendorf

Observación: si $\mu \preceq_c \nu$, entonces $\langle \Phi_{a,t}, \nu\rangle - \langle \Phi_{a,t}, \nu\rangle \geq 0$. Para $f \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}\langle f, \nu\rangle - \langle f, \mu\rangle &= (m_1[\nu] - m_1[\nu])f'(a)\\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \langle \Phi_{a,t}, \nu\rangle - \langle \Phi_{a,t}, \mu\rangle f''(t)dt.\end{aligned}$$

Concuimos que

$$\begin{aligned}\langle f, \nu\rangle - \langle f, \mu\rangle &\leq \|f''\|_\infty \int_{\mathbb{R}} (\langle \Phi_{a,t}, \nu\rangle - \langle \Phi_{a,t}, \mu\rangle)dt\\ &= \|f''\|_\infty (m_2[\nu] - m_2[\mu]).\end{aligned}$$

Distancias y convexidad

Definimos

$$d_2(\mu,\nu) := \sup_{\|f''\|\leq 1} \left(\langle f,\mu\rangle - \langle f,\nu\rangle\right)$$

Distancias y convexidad

Definimos

$$d_2(\mu,\nu) := \sup_{\|f''\|\leq 1} \left(\langle f,\mu\rangle - \langle f,\nu\rangle\right)$$

Si μ, ν son medidas en $\mathbb{Z}$, entonces

$$d_{TV} \leq 6 d_2(\mu,\nu).$$

Si las medias de μ y ν coinciden, entonces d_2 es la distancia de Zolotarev

Distancias y convexidad

Definimos

$$d_2(\mu, \nu) := \sup_{\|f''\| \leq 1} \left(\langle f, \mu \rangle - \langle f, \nu \rangle \right)$$

Si μ, ν son medidas en $\mathbb{Z}$, entonces

$$d_{TV} \leq 6 d_2(\mu, \nu).$$

Si las medias de μ y ν coinciden, entonces d_2 es la distancia de Zolotarev

Theorem (Boutsikas y Vaggelatou)
Para μ, ν con 2 momentos t.q. $\mu \preceq_c \nu$,

$$d_2(\mu, \nu) = \frac{1}{2}(Var[\nu] - Var[\mu]).$$

Distancias y convexidad

Definimos

$$d_{1,2}(\mu,\nu) := \sup_{\|f'\|,\|f''\|\leq 1} \left(\langle f,\mu\rangle - \langle f,\nu\rangle \right).$$

Distancias y convexidad

Definimos

$$d_{1,2}(\mu,\nu) := \sup_{\|f'\|,\|f''\|\leq 1} \left(\langle f,\mu\rangle - \langle f,\nu\rangle \right).$$

Entonces

Theorem (Jaramillo Melbourne (2023))
Para μ,ν con 2 momentos t.q. $\mu \preceq_{ic} \nu$,

$$d_{1,2}(\mu,\nu) \leq (m_1[\nu] - m_1[\mu]) + \frac{1}{2}(m_2[\nu] - m_2[\mu]).$$

Distancias y convexidad

Definimos

$$d_{1,2}(\mu,\nu) := \sup_{\|f'\|,\|f''\|\leq 1} \left(\langle f,\mu\rangle - \langle f,\nu\rangle\right).$$

Entonces

Theorem (Jaramillo Melbourne (2023))
Para μ,ν con 2 momentos t.q. $\mu \preceq_{ic} \nu$,

$$d_{1,2}(\mu,\nu) \leq (m_1[\nu] - m_1[\mu]) + \frac{1}{2}(m_2[\nu] - m_2[\mu]).$$

Si además $m_1[\mu] = m_2[\nu]$,

$$d_2(\mu,\nu) \leq \frac{1}{2}(Var[\nu] - Var[\mu]).$$

Theorem
Sea $J \subset \mathbb{R}_+$ *no acotado y* $X = \{X_t\}_{t \in J}$ *una martingala cuadrado integrable con ley* μ_t*.*

Theorem
Sea $J \subset \mathbb{R}_+$ no acotado y $X = \{X_t\}_{t \in J}$ una martingala cuadrado integrable con ley μ_t. Para $s \leq t$,

$$d_2(\mu_s, \mu_t) = \frac{1}{2}(Var[\mu_t] - Var[\mu_s]).$$

Aplicaciones: Martingalas

Theorem
Sea $J \subset \mathbb{R}_+$ no acotado y $X = \{X_t\}_{t \in J}$ una martingala cuadrado integrable con ley μ_t. Para $s \leq t$,

$$d_2(\mu_s, \mu_t) = \frac{1}{2}(Var[\mu_t] - Var[\mu_s]).$$

Si $\sup_{t \in J} m_2[\mu_t] < \infty$,

$$d_2(\mu_s, \mu_\infty) = \frac{1}{2}(Var[\mu_\infty] - Var[\mu_s]).$$

Aplicaciones: Martingalas

Theorem
Sea $J \subset \mathbb{R}_+$ no acotado y $X = \{X_t\}_{t \in J}$ una martingala cuadrado integrable con ley μ_t. Para $s \leq t$,

$$d_2(\mu_s, \mu_t) = \frac{1}{2}(Var[\mu_t] - Var[\mu_s]).$$

Si $\sup_{t \in J} m_2[\mu_t] < \infty$,

$$d_2(\mu_s, \mu_\infty) = \frac{1}{2}(Var[\mu_\infty] - Var[\mu_s]).$$

Versión submartingala y versión supermartingala están disponibles con $d_{1,2}$ y desigualdad.

Proceso de Galton Watson en ambiente variable

Un proceso de Galton-Watson en ambiente variable (GWVE) $Z = \{Z_n : n \geq 0\}$ se construye como sigue.

Proceso de Galton Watson en ambiente variable

Un proceso de Galton-Watson en ambiente variable (GWVE) $Z = \{Z_n : n \geq 0\}$ se construye como sigue. Sean $Q = \{q_n : n \geq 1\}$ medidas de proba en $\mathbb{Z}_+$.

$$Z_0 = 1 \quad \text{y} \quad Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} \chi_i^{(n)}, \qquad n \geq 1,$$

donde $\{\chi_i^{(n)} : i, n \geq 1\}$ son variables independientes con $\chi_i^{(n)} \sim q_n$.

Proceso de Galton Watson en ambiente variable

Un proceso de Galton-Watson en ambiente variable (GWVE) $Z = \{Z_n : n \geq 0\}$ se construye como sigue. Sean $Q = \{q_n : n \geq 1\}$ medidas de proba en $\mathbb{Z}_+$.

$$Z_0 = 1 \quad \text{y} \quad Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} \chi_i^{(n)}, \qquad n \geq 1,$$

donde $\{\chi_i^{(n)} : i, n \geq 1\}$ son variables independientes con $\chi_i^{(n)} \sim q_n$.

Conexión con convexidad:

El proceso $Z_n/\mathbb{E}[Z_n]$ es una martingala.

Proceso de Galton Watson en ambiente variable

Corollary

Sea μ_n la ley de Z_n. Entonces, bajo hipótesis adecuadas,

$$
\begin{aligned}
d_{TV}(\mu_n, \mu_\infty) &\leq 6 d_2(\mu_n, \mu_\infty) \\
&= 3 \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(m_2[q_n] - m_1[q_n])/m_1[q_n]^2}{m_1[q_1] \cdots m_1[q_k]} - \frac{1}{m_1[q_1] \cdots m_1[q_n]} \right).
\end{aligned}
$$

Corollary
Sea μ_n la ley de Z_n. Entonces, bajo hipótesis adecuadas,

$$\begin{aligned} d_{TV}(\mu_n, \mu_\infty) &\leq 6 d_2(\mu_n, \mu_\infty) \\ &= 3\left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(m_2[q_n] - m_1[q_n])/m_1[q_n]^2}{m_1[q_1]\cdots m_1[q_k]} - \frac{1}{m_1[q_1]\cdots m_1[q_n]}\right). \end{aligned}$$

Si q_n es constante sobre n, igual a γ,

$$d_{TV}(\mu_n, \mu_\infty) \leq 6 d_{\mathcal{K}}(\mu_n, \mu_\infty) = \frac{3 Var[\gamma]}{m_1[\gamma](m_1[\gamma]-1)} m_1[\gamma]^{-n}.$$

Log-concavidad relativa

Definition
Decimos que ν es log-concava con respecto a μ si

Log-concavidad relativa

Definition
Decimos que ν es log-concava con respecto a μ si (i) ν es absolutamente continua respecto a μ y $\log(\frac{d\nu}{d\mu})$ es cóncava.

Log-concavidad relativa

Definition
Decimos que ν es log-concava con respecto a μ si (i) ν es absolutamente continua respecto a μ y $\log(\frac{d\nu}{d\mu})$ es cóncava.

Ejemplos

- $\nu \sim$ Binomial y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ Suma de Bernoulli's independients y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ *Volumen intrínseco aleatorio* y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ *Matroide aleatorio* y $\mu \sim$ Poisson.

Log-concavidad relativa

Definition
Decimos que ν es log-concava con respecto a μ si (i) ν es absolutamente continua respecto a μ y $\log(\frac{d\nu}{d\mu})$ es cóncava.

Ejemplos

- $\nu \sim$ Binomial y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ Suma de Bernoulli's independients y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ *Volumen intrínseco aleatorio* y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ *Matroide aleatorio* y $\mu \sim$ Poisson.

Lemma
Si ν es log-cóncava respecto a μ y $m_1[\mu] = m_1[\nu]$, entonces $\nu \preceq_c \mu$.

Ejemplos interesantes de log-concavidad

Sean $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$ v.a.i. Bernoulli con $p_i := \mathbb{P}[\xi_i = 1]$. Decimos que S_n tiene distribución Poisson binomial si $S_n \stackrel{Ley}{=} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$.

Ejemplos interesantes de log-concavidad

Sean $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$ v.a.i. Bernoulli con $p_i := \mathbb{P}[\xi_i = 1]$. Decimos que S_n tiene distribución Poisson binomial si $S_n \overset{Ley}{=} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$.

Theorem (Liggett, 1997)
Si ν_1 y ν_2 son log-cóncavas con respecto a distribuciones binomiales de tamaños m y n respectivamente, entonces $\nu_1 * \nu_2$ es log-cóncava con respecto a cualquier distribución binomial de tamaño $m+n$.

Consecuencias

- $S_n \preceq_c B_n$, si B_n es Binomial con tamaño n y éxito $p = m_1[S_n]/n$.
- $S_n \preceq_c M_n$, si M_n es Poisson con media $m_1[S_n]$.

Corollary

Si S_n es suma de Bernoulli's independientes, B_n es Binomial con tamaño n y éxito $p = m_1[S_n]/n$ y M_n es Poisson con media $m_1[S_n]$,

$$d_{TV}(S_n, B_n) \leq 3d_2(S_n, B_n) = 3n\left(\sum_{k=1}^{n} p_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right)^2\right)$$

$$d_{TV}(S_n, M_n) \leq 3d_2(S_n, M_n) = 3\sum_{k=1}^{n} p_k^2.$$

Matroides

Definition
Un matroide $\mathcal{M}$ es un par $\mathcal{M} = (X, \mathcal{I})$, con $\mathcal{I} \subset 2^X$ t.q.

- Si $S \subset T$ y $T \in \mathcal{I}$, entonces $S \in \mathcal{I}$,

Matroides

Definition
Un matroide $\mathcal{M}$ es un par $\mathcal{M} = (X, \mathcal{I})$, con $\mathcal{I} \subset 2^X$ t.q.

- Si $S \subset T$ y $T \in \mathcal{I}$, entonces $S \in \mathcal{I}$,
- Si $S, T \in \mathcal{I}$ y $|S| < |T|$, entonces existe $x \in T \backslash S$ t.q. $S \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

Matroides

Definition
Un matroide $\mathcal{M}$ es un par $\mathcal{M} = (X, \mathcal{I})$, con $\mathcal{I} \subset 2^X$ t.q.

- Si $S \subset T$ y $T \in \mathcal{I}$, entonces $S \in \mathcal{I}$,
- Si $S, T \in \mathcal{I}$ y $|S| < |T|$, entonces existe $x \in T \setminus S$ t.q. $S \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

Matroides

Definition
Un matroide $\mathcal{M}$ es un par $\mathcal{M} = (X, \mathcal{I})$, con $\mathcal{I} \subset 2^X$ t.q.

- Si $S \subset T$ y $T \in \mathcal{I}$, entonces $S \in \mathcal{I}$,
- Si $S, T \in \mathcal{I}$ y $|S| < |T|$, entonces existe $x \in T \backslash S$ t.q. $S \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

Definimos $I_k := |\{S \in \mathcal{I} \ ; \ |S| = k\}|$.

Definition
Un matroide $\mathcal{M}$ es un par $\mathcal{M} = (X, \mathcal{I})$, con $\mathcal{I} \subset 2^X$ t.q.

- Si $S \subset T$ y $T \in \mathcal{I}$, entonces $S \in \mathcal{I}$,
- Si $S, T \in \mathcal{I}$ y $|S| < |T|$, entonces existe $x \in T \backslash S$ t.q. $S \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

Definimos $I_k := |\{S \in \mathcal{I} \; ; \; |S| = k\}|$. Sea $\mu_{\mathcal{M}}$ la medida

$$\mu_{\mathcal{M}}[k] := cI_k,$$

para $1 \leq k \leq n$ y c adecuada.

Conjetura de Mason

En 1972, John Mason conjeturó que si $\mathcal{M}$ con espacio base de tamaño n,

- $I_k^2 \geq I_{k-1} I_{k+1}$.

Conjetura de Mason

En 1972, John Mason conjeturó que si $\mathcal{M}$ con espacio base de tamaño n,

- $I_k^2 \geq I_{k-1} I_{k+1}$.
- $I_k^2 \geq (1 + \frac{1}{k}) I_{k-1} I_{k+1}$.

Conjetura de Mason

En 1972, John Mason conjeturó que si $\mathcal{M}$ con espacio base de tamaño n,

- $I_k^2 \geq I_{k-1} I_{k+1}$.
- $I_k^2 \geq (1 + \frac{1}{k}) I_{k-1} I_{k+1}$.
- $I_k^2 \geq (1 + \frac{1}{k})(1 + \frac{1}{n-k}) I_{k-1} I_{k+1}$.

Conjetura de Mason

En 1972, John Mason conjeturó que si $\mathcal{M}$ con espacio base de tamaño n,

- $I_k^2 \geq I_{k-1} I_{k+1}$.
- $I_k^2 \geq (1 + \frac{1}{k}) I_{k-1} I_{k+1}$.
- $I_k^2 \geq (1 + \frac{1}{k})(1 + \frac{1}{n-k}) I_{k-1} I_{k+1}$.

Conjetura de Mason

En 1972, John Mason conjeturó que si $\mathcal{M}$ con espacio base de tamaño n,

- $I_k^2 \geq I_{k-1} I_{k+1}$.
- $I_k^2 \geq (1 + \frac{1}{k}) I_{k-1} I_{k+1}$.
- $I_k^2 \geq (1 + \frac{1}{k})(1 + \frac{1}{n-k}) I_{k-1} I_{k+1}$.

La log-concavidad fue resuelta por Adiprasito (2018).

Conjetura de Mason

En 1972, John Mason conjeturó que si $\mathcal{M}$ con espacio base de tamaño n,

- $I_k^2 \geq I_{k-1} I_{k+1}$.
- $I_k^2 \geq (1 + \frac{1}{k}) I_{k-1} I_{k+1}$.
- $I_k^2 \geq (1 + \frac{1}{k})(1 + \frac{1}{n-k}) I_{k-1} I_{k+1}$.

La log-concavidad fue resuelta por Adiprasito (2018). La ultra log-concavidad fue demostrada por Huh (2018).

Conjetura de Mason

En 1972, John Mason conjeturó que si $\mathcal{M}$ con espacio base de tamaño n,

- $I_k^2 \geq I_{k-1} I_{k+1}$.
- $I_k^2 \geq (1 + \frac{1}{k}) I_{k-1} I_{k+1}$.
- $I_k^2 \geq (1 + \frac{1}{k})(1 + \frac{1}{n-k}) I_{k-1} I_{k+1}$.

La log-concavidad fue resuelta por Adiprasito (2018). La ultra log-concavidad fue demostrada por Huh (2018). La ultra log-concavidad de grado n fue demostrada por Anari, (2018).

Resultados límite para medidas matroidales

Corollary (Jaramillo-Melbourne)
Si $X \sim \mu_{\mathcal{M}}$ y B es binomial de tamaño n, con la misma media que X,

$$d_{TV}(\mu_{\mathcal{M}}, \mu_B) \leq 6 d_{\mathcal{K}}(\mu_{\mathcal{M}}, \mu_B) = 3\left(m_1[\mu_{\mathcal{M}}] - m_2[\mu_{\mathcal{M}}]\right).$$

Corollary (Jaramillo-Melbourne)
Si $X \sim \mu_{\mathcal{M}}$ y B es binomial de tamaño n, con la misma media que X,

$$d_{TV}(\mu_{\mathcal{M}}, \mu_B) \leq 6 d_{\mathcal{K}}(\mu_{\mathcal{M}}, \mu_B) = 3\left(m_1[\mu_{\mathcal{M}}] - m_2[\mu_{\mathcal{M}}]\right).$$

Corollary
Sean $\{\mathcal{M}_k\}_{k=1}^{n}$ *submatroides de* $\mathcal{S}$.

Corollary
Sean $\{\mathcal{M}_k\}_{k=1}^n$ *submatroides de* $\mathcal{S}$*. Definimos*

$$\mathcal{E}_n^1 := |Var[\mu_{\mathcal{S}}] - \sum_{k=1}^n Var[\mu_{\mathcal{M}_k}]| \tag{2}$$

$$\mathcal{E}_n^2 := \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} x^2 \mathbb{1}_{\{\{x\geq 2\}\}}(x)\mu_{\mathcal{M}_k}(dx), \tag{3}$$

y sea μ_B *como antes.*

Corollary
Sean $\{\mathcal{M}_k\}_{k=1}^n$ submatroides de $\mathcal{S}$. Definimos

$$\mathcal{E}_n^1 := |Var[\mu_{\mathcal{S}}] - \sum_{k=1}^n Var[\mu_{\mathcal{M}_k}]| \tag{2}$$

$$\mathcal{E}_n^2 := \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} x^2 \mathbb{1}_{\{\{x\geq 2\}\}}(x)\mu_{\mathcal{M}_k}(dx), \tag{3}$$

y sea μ_B como antes. Entonces

$$d_{TV}(\mu_{\mathcal{S}}, \mu_P) \leq 6 d_{\mathcal{K}}(\mu_{\mathcal{S}}, \mu_P) \leq 3\left(\mathcal{E}_n^1 + \mathcal{E}_n^2 + \sum_{k=1}^n \left(m_1[\mu_{\mathcal{M}_k}] - \frac{1}{n} m_1[\mu_S]\right)^2\right).$$

Volúmenes intrínsecos

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$. Sea κ_m el volumen de la bola unitaria de $\mathbb{R}^m$.

Volúmenes intrínsecos

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$. Sea κ_m el volumen de la bola unitaria de $\mathbb{R}^m$. Para $j = 0, ..., n$, sea $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la proyección sobre $\mathbb{R}^j \times \{0\}^{n-j}$.

Volúmenes intrínsecos

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$. Sea κ_m el volumen de la bola unitaria de $\mathbb{R}^m$. Para $j = 0, ..., n$, sea $P_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la proyección sobre $\mathbb{R}^j \times \{0\}^{n-j}$. Sea $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con distribución de Haar sobre las matrices ortogonales con determinante igual a uno.

Volúmenes intrínsecos

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$. Sea κ_m el volumen de la bola unitaria de $\mathbb{R}^m$. Para $j = 0, ..., n$, sea $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la proyección sobre $\mathbb{R}^j \times \{0\}^{n-j}$. Sea $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con distribución de Haar sobre las matrices ortogonales con determinante igual a uno. El volumen intrínseco de orden j de K se define como

$$V_j := \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) \frac{\kappa_n}{\kappa_j \kappa_{n-j}} \mathbb{E}[Vol_j(P_j Q(K))],$$

donde Vol_j denota el volumen de dimensión j. Definimos también $V_0 := 1$.

Volúmenes intrínsecos

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$. Sea κ_m el volumen de la bola unitaria de $\mathbb{R}^m$. Para $j = 0, ..., n$, sea $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la proyección sobre $\mathbb{R}^j \times \{0\}^{n-j}$. Sea $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con distribución de Haar sobre las matrices ortogonales con determinante igual a uno. El volumen intrínseco de orden j de K se define como

$$V_j := \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) \frac{\kappa_n}{\kappa_j \kappa_{n-j}} \mathbb{E}[Vol_j(P_j Q(K))],$$

donde Vol_j denota el volumen de dimensión j. Definimos también $V_0 := 1$. La medida de volumenes intrinsecos de K está definida por

$$\gamma_K[j] := (\sum_{l=0}^{n} V_l(K))^{-1} V_j(K).$$

Ejemplos de volúmenes intrínsecos

Para los siguientes $K \subset \mathbb{R}^n$, los volúmenes intrínsecos son explícitos

Ejemplos de volúmenes intrínsecos

Para los siguientes $K \subset \mathbb{R}^n$, los volúmenes intrínsecos son explícitos

Bola euclideana

Si K es la bola euclideana,

$$V_j(K) = \binom{n}{j} \frac{\kappa_n}{\kappa_{n-j}}.$$

Ejemplos de volúmenes intrínsecos

Para los siguientes $K \subset \mathbb{R}^n$, los volúmenes intrínsecos son explícitos

Bola euclideana

Si K es la bola euclideana,

$$V_j(K) = \binom{n}{j} \frac{\kappa_n}{\kappa_{n-j}}.$$

Paralelepípedo

Sean $s_1, \dots, s_n > 0$ fijos. Si

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; x_i \in [0, s_i]\},$$

entonces $V_j(K)$ es la j-ésima función simétrica evaluada en $(s_1, \dots, s_n)$.

Sea B_n la bola unitaria de dimensión n.

Theorem

Sea $K, \subset \mathbb{R}^n$ un convexo acotado. Si $r > 0$ es tal que $m_1[\gamma_{rB_n}] = m_1[\gamma_K]$ y ρ es Poisson de intensidad $m_1[\gamma_K]$, se tiene

$$d_{TV}(\gamma_{rB_n}, \gamma_K) \leq 6 d_{\mathcal{K}}(\gamma_{rB_n}, \gamma_K) = 3(\mathbb{V}\mathrm{ar}[\gamma_{rB_n}] - \mathbb{V}\mathrm{ar}[\gamma_K])$$

$$d_{TV}(\rho, \gamma_K) \leq 6 d_{\mathcal{K}}(\rho, \gamma_K) = 3(\mathbb{V}\mathrm{ar}[\rho] - \mathbb{V}\mathrm{ar}[\gamma_K]) = 3(m_1[\gamma_K] - \mathbb{V}\mathrm{ar}[\gamma_K]).$$

Volumenes intrinsecos

Corollary (Jaramillo, Melbourne)
Sean $\{K_j\}_{j=1}^{n}$ subconjuntos de un convexo acotado K en $\mathbb{R}^m$, con $n \leq m$.

Volumenes intrinsecos

Corollary (Jaramillo, Melbourne)
Sean $\{K_j\}_{j=1}^n$ subconjuntos de un convexo acotado K en $\mathbb{R}^m$, con $n \leq m$. Definimos

$$\mathcal{E}_n^1 := |Var[\gamma_K] - \sum_{j=1}^n Var[\gamma_{K_j}]| \qquad \mathcal{E}_n^2 := \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} j^2 \mathbb{1}_{\{\{j \geq 2\}\}}, \tag{4}$$

Sea ρ con ley Poisson de intensidad $m_1[\gamma_K]$. Entonces

$$d_{TV}(\gamma_K, \rho) \leq 6 d_{\mathcal{K}}(\gamma_K, \rho) \leq 3 \left(\mathcal{E}_n^1 + \mathcal{E}_n^2 + \sum_{k=1}^n m_1[\gamma_K]^2 \right).$$

Miscelanea de generalizaciones

Qué fue lo que pasó?

Qué fue lo que pasó?

- Ingrediente 1:
  $\mathcal{K} = \{V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ f'' \geq 0\}$, que induce $\mu \preceq_c \nu$.

Miscelanea de generalizaciones

Qué fue lo que pasó?

- Ingrediente 1:
  $\mathcal{K} = \{V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ f'' \geq 0\}$, que induce $\mu \preceq_c \nu$.

- Ingrediente 2:
  $\mathcal{C} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ |f''| \leq 1\}$, que induce $d_2(\mu, \nu)$.

Qué fue lo que pasó?

- Ingrediente 1:
  $\mathcal{K} = \{V : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ f'' \geq 0\}$, que induce $\mu \preceq_c \nu$.

- Ingrediente 2:
  $\mathcal{C} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ |f''| \leq 1\}$, que induce $d_2(\mu, \nu)$.

- Resultado:
  cota de la forma $\langle g, \nu - \mu \rangle - \langle g, \mu \rangle$, donde $g'' = 1$.

Miscelanea de generalizaciones

Sea $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una medida de referencia adecuada.

Miscelanea de generalizaciones

Sea $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una medida de referencia adecuada. Definimos

$$\mathcal{K}_\psi := \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R}) \; ; \; |f''(t)| \leq \psi'' \;\; \text{for all} \;\; t \in \mathbb{R}\}$$
$$d_\psi(\mu,\nu) := \sup_{f \in \mathcal{K}_\psi} (\langle f, \mu\rangle - \langle f, \nu\rangle),$$

Miscelanea de generalizaciones

Sea $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una medida de referencia adecuada. Definimos

$$\mathcal{K}_\psi := \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R}) \ ; \ |f''(t)| \leq \psi'' \ \text{ for all } \ t \in \mathbb{R}\}$$
$$d_\psi(\mu,\nu) := \sup_{f \in \mathcal{K}_\psi} (\langle f,\mu\rangle - \langle f,\nu\rangle),$$

Theorem (Jaramillo, Melbourne)
Sean μ y ν medidas de proba t.q. ψ es integrable y $\mu \preceq_c \nu$ in I. Entonces

$$d_{\mathcal{K}_\psi}(\mu,\nu) = \langle \psi,\nu\rangle - \langle \psi,\mu\rangle.$$

Miscelanea de generalizaciones

Sea $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una medida de referencia adecuada. Definimos

$$\mathcal{K}_\psi := \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R}) \ ; \ |f''(t)| \leq \psi'' \ \text{ for all } \ t \in \mathbb{R}\}$$

$$d_\psi(\mu,\nu) := \sup_{f \in \mathcal{K}_\psi} (\langle f, \mu\rangle - \langle f, \nu\rangle),$$

Theorem (Jaramillo, Melbourne)
Sean μ y ν medidas de proba t.q. ψ es integrable y $\mu \preceq_c \nu$ in I. Entonces

$$d_{\mathcal{K}_\psi}(\mu,\nu) = \langle \psi, \nu\rangle - \langle \psi, \mu\rangle.$$

- Aplicación fundamental para el proceso de Galton Watson

Miscelanea de generalizaciones

Sea $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una medida de referencia adecuada. Definimos

$$\mathcal{K}_\psi := \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R}) \; ; \; |f''(t)| \le \psi'' \;\; \text{for all} \;\; t \in \mathbb{R}\}$$
$$d_\psi(\mu,\nu) := \sup_{f \in \mathcal{K}_\psi} (\langle f, \mu\rangle - \langle f, \nu\rangle),$$

Theorem (Jaramillo, Melbourne)
Sean μ y ν medidas de proba t.q. ψ es integrable y $\mu \preceq_c \nu$ in I. Entonces

$$d_{\mathcal{K}_\psi}(\mu,\nu) = \langle \psi, \nu\rangle - \langle \psi, \mu\rangle.$$

- Aplicación fundamental para el proceso de Galton Watson
- Generalización donde se cambia 'tomar derivada de orden 2' por 'tomar derivada fraccionaria'.

Definimos $\psi(x) = e^{-x}$.

Corollary (Jaramillo-Melbourne)
Para $\alpha \in (0,1)$, las medidas μ_n de un Galton-Watson con reproducción q, converge a μ_∞, con

$$d_{\mathcal{K}_\psi}(\mu_n, \mu_\infty) \leq C_\alpha(m_\alpha[q] m_1[q]^{-n(\alpha-1)} + m_1[q]^{-n}). \tag{5}$$

Miscelanea de generalizaciones

Consideremos la familia de funciones

$$\mathcal{K}_{\mathcal{D}^a_{0+}} := \{f \in \mathcal{C}^a_{0+}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})) \ ; \ \|\mathcal{D}^a_{0+}[f]\|_\infty \leq 1\},$$

donde $\mathcal{D}^a_{0+}$ es la derivada de Liouville por derecha en cero de orden a.

Miscelanea de generalizaciones

Consideremos la familia de funciones

$$\mathcal{K}_{\mathcal{D}^a_{0+}} := \{f \in \mathcal{C}^a_{0+}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})) \; ; \; \|\mathcal{D}^a_{0+}[f]\|_\infty \leq 1\},$$

donde $\mathcal{D}^a_{0+}$ es la derivada de Liouville por derecha en cero de orden a. Sea $d_{\mathcal{D}^\alpha}$ la distancia asociada a $\mathcal{K}_{\mathcal{D}^a_{0+}}$

Theorem (Jaramillo, Melbourne)

Si μ, ν tienen momentos absolutos de orden $\alpha \in (0,1)$ y $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ satisfacen $\mu \preceq_{ic} \nu$, entonces

$$d_{\mathcal{D}^\alpha}(\mu,\nu) = \frac{1}{\alpha}(\int_{\mathbb{R}_+} x^\alpha \nu(dx) - \int_{\mathbb{R}_+} x^\alpha \mu(dx)). \tag{6}$$

Trabajo a futuro

Algunos temas que aún quedarán abiertos:

- Ordenes inducidos por $V^{(r)} \geq 0$ en lugar de $V'' \geq 0$ y ejemplos útiles.

Trabajo a futuro

Algunos temas que aún quedarán abiertos:

- Ordenes inducidos por $V^{(r)} \geq 0$ en lugar de $V'' \geq 0$ y ejemplos útiles.
- Ajustes para incluir el TLC.

Trabajo a futuro

Algunos temas que aún quedarán abiertos:

- Ordenes inducidos por $V^{(r)} \geq 0$ en lugar de $V'' \geq 0$ y ejemplos útiles.
- Ajustes para incluir el TLC.
- Instancias particulares de matroides.

Trabajo a futuro

Algunos temas que aún quedarán abiertos:

- Ordenes inducidos por $V^{(r)} \geq 0$ en lugar de $V'' \geq 0$ y ejemplos útiles.
- Ajustes para incluir el TLC.
- Instancias particulares de matroides.
- Teoremas límite universales para volúmenes intrínsecos.

Trabajo a futuro

Algunos temas que aún quedarán abiertos:

- Ordenes inducidos por $V^{(r)} \geq 0$ en lugar de $V'' \geq 0$ y ejemplos útiles.
- Ajustes para incluir el TLC.
- Instancias particulares de matroides.
- Teoremas límite universales para volúmenes intrínsecos.
- Teoremas de Yaglom para procesos de Galton Watson críticos.

Gracias!

Contacto

Arturo Jaramillo
jagil@cimat.mx

References

- Michael V. Boutsikas and Eutichia Vaggelatou (2002). On the distance between convex-ordered random variables, with applications.
- Arturo Jaramillo and James Melbourne (2022). Quantitative limit theorems via relative log-concavity.
- Arturo Jaramillo and James Melbourne (2022). Stochastic orders and limit theorems.