

# APAREAMIENTO DE PUNTOS Y OPTIMIZACION LINEAL

*K. Voss, H. Suesse*

*Universidad Friedrich-Schiller / Jena / Alemania  
Departamento de Matemáticas y Computación  
nkv@uni-jena.de , www.pandora.inf.uni-jena.de*

Trabajo realizado en parte durante de la estancia  
del profesor K.Voss en el CIMAT (mayo 2001)

## **Resumen**

En este trabajo se investiga el problema del apareamiento (*matching*) de conjuntos de puntos para la determinación de transformaciones lineales (traslación, movimiento, transformación afín). Sean dados dos conjuntos de puntos que son relacionados por una transformación afín general (módulo desviaciones pequeñas en las coordenadas). Entonces podemos determinar los seis parámetros  $a_{ik}$  de la transformación a partir de los invariantes de Hu. El algoritmo trabaja en tiempo  $O(n)$  y podemos usar el método en casos de traslaciones, movimientos rígidos, transformaciones homotéticas y transformaciones afines generales

En el caso que hay "puntos de perturbación", es decir puntos del conjunto  $C_1$  que no tienen puntos correspondientes en el conjunto  $C_2$ , entonces se deben determinar las correspondencias óptimal. Para lograr esta meta, usamos dos enfoques nuevos: En el primer enfoque mostramos un teorema sobre distancias geométricas entre dos conjuntos que es válido para transformaciones afines con una matriz simétrica y positiva definida. El segundo enfoque se basa en el método de optimización lineal para eliminar los puntos de perturbación.

La optimización lineal trabaja tan bien que usamos este método también para el ajuste de figuras geométricas (líneas rectas, círculos, elipses,...) en lugar del ajuste con medio del método de mínimos cuadrados.

En la parte última investigamos el método de acumulación como generalización de la transformación de Hough. Mostramos que tanto el ajuste de conjuntos de puntos para lograr figuras geométricas como la determinación de transformaciones se pueden realizar a partir de este método de acumulación.

## Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Invariantes afines e invariantes de Hu</b>	<b>4</b>
2.1	Transformaciones afines . . . . .	4
2.2	Normalización e invariantes afines de conjuntos . . . . .	7
2.3	Momentos complejos e invariantes de Hu . . . . .	11
2.4	Invariantes de puntos . . . . .	14
2.5	Determinación de correspondencias . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Apareamiento por optimización lineal</b>	<b>19</b>
3.1	Minimización de las distancias geométricas . . . . .	19
3.2	Puntos correspondientes . . . . .	21
3.3	Apareamiento y optimización lineal . . . . .	22
3.4	Determinación de transformaciones afines . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Ajuste de figuras por optimización lineal</b>	<b>28</b>
4.1	Optimización lineal . . . . .	28
4.2	Ajuste de líneas rectas . . . . .	29
4.3	Ajuste de círculos . . . . .	30
4.4	Ajuste de elipses . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Acumulación en espacios de parámetros</b>	<b>32</b>
5.1	Hough, Radon y acumulación . . . . .	32
5.2	Acumulación para círculos y elipses . . . . .	37
5.3	Detección de traslaciones y movimientos rígidos . . . . .	40
5.4	Transformaciones afines . . . . .	46

## 1 Introducción

El apareamiento de conjuntos  $C_1$  y  $C_2$  de puntos (*point pattern matching*) es un problema muy importante en el campo de procesamiento de imágenes. Ya en 1993, Cox y Jager han escrito un artículo de revisión sobre distintos tipos de transformaciones y métodos [3]. Por un lado han diferenciado las siguientes tareas:

- apareamiento (*matching*): hay una correspondencia biunívoca entre los puntos de los dos conjuntos  $C_1$  y  $C_2$ ,
- detección (*detection*): hay puntos adicionales en los conjuntos  $C_1$  y  $C_2$  los cuales no tienen una correspondencia en otro conjunto (*disturbing points*, DP),
- reconocimiento (*recognition*): hay muchos DP's en conjunto  $C_1$  y en conjunto  $C_2$ .

Por otro lado podemos investigar el problema del apareamiento de puntos para tipos distintos de transformaciones como

- traslaciones (*translations*): desplazamiento de todos los puntos en la dirección  $x$  y en la dirección  $y$ ,
- movimientos rígidos (*rigid motions*): traslación y rotación,
- transformaciones homotéticas (*similarity transformations*): traslación, rotación y escalamiento isotrópico,
- transformaciones afines especiales (*restricted affine transformations*): traslación, rotación, escalamiento anisotrópico y estiramiento (*shearing, stretching*), siempre con determinantes positivos,
- transformaciones afines generales (*general affine transformations*): traslación, rotación, escalamiento anisotrópico y estiramiento. También las reflexiones se permiten.

Hasta hoy hay sólo unos pocos trabajos que se dedican al problema de la transformación afín general (*affine point pattern matching*, APPM). Un primer artículo fue escrito por Hong and Tan [8] y describe un algoritmo

de la complejidad  $O(n)$  con  $n$  como el número de los puntos basado en la *forma canónica* de conjuntos de puntos sin DP's. Pero en ese artículo la investigación de las rotaciones no fue tratado correctamente. Más tarde, en 1996, fue descrito un método que proporciona la determinación de la forma canónica a partir de la *normalización*. Este enfoque usa los momentos invariantes de conjuntos de puntos en donde los momentos son invariantes bajo transformaciones afines [1]. Ambos métodos trabajan solo sin DP's y dan por resultado la transformación correcta entre los dos conjuntos  $C_1$  y  $C_2$  en tiempo de orden  $O(n)$ .

Contraria a estos enfoques, el nuevo método descrito en la primera parte (sección 2) del presente trabajo, soluciona el problema APPM por apareamiento de puntos en el espacio de invariantes afines de Hu. El algoritmo es numéricamente muy estable bajo perturbaciones de las coordenadas de los puntos y también estable bajo DP's.

En sección 3 introducimos un nuevo enfoque para la determinación de una transformación afín. Como única restricción requerimos que la matriz de la transformación homogénea sea simétrica y positiva definida (por ejemplo en casos de traslación y escalamiento anisotrópico). Este método permite la separación de las determinaciones de la correspondencia correcta y de los parámetros de la transformación afín. La búsqueda de una correspondencia correcta se realiza por medio de la optimización lineal (*linear programming*).

El método de la optimización lineal (método Simplex) es adecuado también para el ajuste de figuras como líneas rectas o círculos a conjuntos de puntos y para la determinación de transformaciones afines a partir de conjuntos de puntos con DP's. Estas tareas son investigadas (por primera vez en la literatura) en la sección 4.

Finalmente en la sección 5 describimos nuevos enfoques para el ajuste de figuras y para la determinación de transformaciones. El método de la acumulación conocido como transformación de Hough para el ajuste de líneas rectas es extendido aquí a muchas otras tareas.

## 2 Invariantes afines e invariantes de Hu

### 2.1 Transformaciones afines

En esta sección investigamos las transformaciones geométricas bidimensionales, en especial las traslaciones, los movimientos rígidos, las transformaciones de similaridad (transformaciones homotéticas) y las transformaciones afines. En cada caso transformamos un punto  $\mathbf{p}$  al punto  $\mathbf{p}'$ , es decir transformamos las coordenadas  $(x, y)$  a las coordenadas  $(x', y')$ . Las transforma-

ciones más simples son las traslaciones:

$$x' = x + c \quad , \quad y' = y + d \quad \circ \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Aquí y en lo siguiente los símbolos  $c$  y  $d$  son los coeficientes de la traslación.

Los movimientos rígidos describen en forma general las transformaciones de los cuerpos rígidos y especialmente las transformaciones de las figuras bidimensionales:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Aquí el ángulo  $\varphi$  describe una rotación con respecto al origen  $(0,0)$  y los parámetros  $c$  y  $d$  determinan un desplazamiento. Un movimiento rígido (o, más simple, un movimiento) no cambia las distancias entre dos puntos cualesquiera y tampoco cambia los ángulos entre dos líneas rectas cualesquiera.

También las transformaciones homotéticas conservan los ángulos, pero todas las distancias se escalan por el mismo factor  $a$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= a \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cdot x \\ a \cdot y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De esta manera una transformación homotética describe un escalamiento isotrópico (un cambio de escala isotrópico).

Como generalización de estas transformaciones especiales usamos las transformaciones afines

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix} \quad (1)$$

las cuales son descritas por 6 parámetros  $a_{ik}$  (4 parámetros pertenecen a la matriz  $\mathbf{A}$ ). Esta fórmula (1) describe como caso particular también los escalamientos anisotrópicos

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

y los estiramientos (*shearing*, *stretching*), por ejemplo en la dirección  $x$ :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Desde el punto de vista algebraico, las transformaciones afines son las transformaciones lineales más generales. Por simplicidad podemos escribir la fórmula (1) con de una única ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Si los parámetros  $a_{10}$  y  $a_{20}$  desaparecen, entonces se llama a la transformación (2), una transformación homogénea. La fórmula (2) nos permite invertir simplemente la transformación por la ecuación

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} &= \mathbf{B}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} & a_{12}a_{20} - a_{22}a_{10} \\ -a_{21} & a_{11} & a_{21}a_{10} - a_{11}a_{20} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

El término  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  es el determinante de la matriz  $\mathbf{A}$  y asimismo el determinante de la matriz  $\mathbf{B}$ :

$$\det \mathbf{A} = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (4)$$

Para que sea posible invertir una transformación afín  $\mathbf{B}$  es necesario que la inversa  $\mathbf{B}^{-1}$  exista, es decir que el determinante  $\det(\mathbf{B}) = |\mathbf{B}|$  no sea cero. Finalmente una fórmula más para completar esta sección: la fórmula para las transformaciones proyectivas es

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u/w \\ v/w \end{pmatrix}$$

donde designamos las coordenadas  $u, v, w$  como "coordenadas homogéneas".

Cada transformación afín se puede descomponer en un producto de transformaciones más simples (separación de transformaciones). Tales separaciones son relativamente fáciles de encontrar para las transformaciones afines homogéneas. Siempre puede encontrarse una traslación  $\mathbf{T}$ , un estiramiento  $\mathbf{D}$ , un cambio de escala anisotrópico  $\mathbf{S}$  y una rotación  $\mathbf{R}$ , de manera que la

transformación afín puede expresarse como el producto de dichas transformaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{RSDT} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

o

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha \cos \varphi & \alpha \gamma \cos \varphi - \beta \sin \varphi \\ \alpha \sin \varphi & \alpha \gamma \sin \varphi + \beta \cos \varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La prueba para la factorización  $\mathbf{A} = \mathbf{RSD}$  se puede hacer simplemente. Primero se determinan los parámetros de la transformación y a partir de las ecuaciones  $a_{11} = \alpha \cos \varphi$  y  $a_{21} = \alpha \sin \varphi$  se obtiene

$$\alpha = \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2} \quad , \quad \sin \varphi = \frac{a_{21}}{\alpha} \quad , \quad \cos \varphi = \frac{a_{11}}{\alpha}$$

Posteriormente, con las dos ecuaciones

$$a_{12} = \alpha \gamma \cos \varphi - \beta \sin \varphi \quad , \quad a_{22} = \alpha \gamma \sin \varphi + \beta \cos \varphi$$

se pueden determinar unívocamente los parámetros restantes:

$$\gamma = \frac{a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22}}{a_{11}^2 + a_{21}^2} \quad , \quad \beta = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$$

## 2.2 Normalización e invariantes afines de conjuntos

Usamos el método de la normalización desarrollada para el teoría de invariantes afines de objetos planares [19]. Este método usa la factorización de la matriz  $\mathbf{B}$  de una transformación afín general como  $\mathbf{B} = \mathbf{RSDT}$  según la fórmula (5). Primero, definimos los momentos  $M_{j,k}$  del conjunto  $P$  de puntos:

$$M_{j,k} = \sum_{p=(x,y) \in P} x^j y^k \quad (6)$$

Aquí  $M_{0,0} = n = |P|$  es el número de puntos y  $(\bar{x}, \bar{y})$  es el centroide del conjunto  $P$ :

$$\bar{x} = \frac{M_{1,0}}{M_{0,0}} = \frac{1}{n} \sum_{p=(x,y) \in P} x \quad , \quad \bar{y} = \frac{M_{0,1}}{M_{0,0}} = \frac{1}{n} \sum_{p=(x,y) \in P} y$$

Los momentos centrales  $m_{j,k}$  están dados por una traslación  $\mathbf{T}$  con  $x - \bar{x} \rightarrow x'$ ,  $y - \bar{y} \rightarrow y'$  de los puntos, es decir

$$m'_{j,k} = \sum_{(x',y') \in P'} (x')^j \cdot (y')^k = \sum_{(x,y) \in P} (x - \bar{x})^j \cdot (y - \bar{y})^k \quad (7)$$

Llamando  $P'$  al conjunto de los puntos transformados, obtenemos  $m'_{1,0} = 0$  y  $m'_{0,1} = 0$  después del primer paso de la normalización. Los parámetros  $c$  y  $d$  de la traslación  $\mathbf{T}$  en la fórmula (5) están dados por  $c = -\bar{x}$  y  $d = -\bar{y}$ .

En el segundo paso de la normalización se realiza un estiramiento  $\mathbf{D}$  con  $x' + \gamma y' \rightarrow x''$  y  $y' \rightarrow y''$  en la dirección  $x$ . De esta manera, se transforman los momentos viejos  $m'_{j,k}$  a nuevos momentos  $m''_{j,k}$ :

$$m''_{j,k} = \sum_{(x'',y'') \in P''} (x'')^j \cdot (y'')^k = \sum_{(x',y') \in P'} (x' + \gamma y')^j \cdot (y')^k$$

Obtenemos la siguiente fórmula para  $m''_{1,1}$

$$m''_{1,1} = \sum_{(x',y') \in P'} (x' + \gamma y') \cdot y' = m'_{1,1} + \gamma m'_{0,2} \quad (8)$$

Imponiendo la restricción  $m''_{1,1} = 0$  se determina el parámetro  $\gamma$  del estiramiento:

$$\gamma = -m'_{1,1}/m'_{0,2}$$

Ahora podemos calcular todos los momentos centrales  $m''_{j,k}$  bajo los valores normalizados  $(m''_{1,0}, m''_{0,1}, m''_{1,1}) = (0, 0, 0)$  medio de las fórmulas (7) y (8).

Al final obtenemos los momentos  $m'''_{j,k}$  por un escalamiento anisotrópico  $\mathbf{S}$  con  $\alpha x'' \rightarrow x'''$  y  $\beta y'' \rightarrow y'''$  a partir de la fórmula siguiente:

$$m'''_{j,k} = \sum_{(x''',y''') \in P'''} (x''')^j \cdot (y''')^k = \sum_{(x'',y'') \in P''} (\alpha x'')^j \cdot (\beta y'')^k = \alpha^j \beta^k m''_{j,k} \quad (9)$$



Se normalizan los momentos  $m_{2,0}'''$  y  $m_{0,2}'''$  a los valores 1, de modo que los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  se determinan como

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{m_{2,0}''}} \quad , \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{m_{0,2}''}}$$

En resumen, los momentos de órdenes más pequeños se normalizan a los valores estándares

$$(m_{1,0}''', m_{0,1}''', m_{1,1}''', m_{2,0}''', m_{0,2}''') = (0, 0, 0, 1, 1) \quad (10)$$

y todos los otros momentos normalizados se pueden determinar medio de las fórmulas (7), (8) y (9).

En la figura 0 se muestra un ejemplo. Un conjunto  $C_0$  de 20 puntos (arriba a la izquierda) se transforma afínmente muchas veces (estas transformaciones también contienen errores pequeños en las coordenadas transformadas). Todos los conjuntos transformados  $C_i$  con  $i = 1, 2, \dots$  son acumulados (arriba a la derecha). Si se desplazan los conjuntos  $C_i$  de manera que todos los centroides están en el origen (es decir, en la mitad de la imagen), se obtiene la tercera imagen parcial que muestra la acumulación de todas las imágenes desplazadas. La eliminación de los estiramientos para todos los conjuntos  $C_i$  proporciona la cuarta imagen parcial. Esta imagen de la acumulación ya tiene un poco más de estructura.

La eliminación de los escalamientos anisotrópicos y la acumulación de todas las imágenes transformadas proporciona la quinta imagen parcial. Aquí los lugares de los puntos dependen solamente de los ángulos de rotación. Si eliminamos a partir de la fórmula (12) estos ángulos, entonces obtenemos los resultados de la sexta imagen parcial. Reconocemos que los puntos están colocados en posiciones que son independientes de las transformaciones afines en regiones restringidas, es decir, las influencias de las transformaciones son aproximadamente eliminadas.

En la séptima imagen parcial se muestran los momentos  $m_{3,1}'''$  y  $m_{1,3}'''$  son distribuidos en el plano de estos momentos (hay relaciones algebraicas entre ellos momentos). Pero si eliminamos la influencia de la rotación, entonces los invariantes de Hu son más o menos estables como muestra el ejemplo de la octava imagen parcial para los invariantes  $H_8$  y  $H_{11}$  (ver tabla 1).

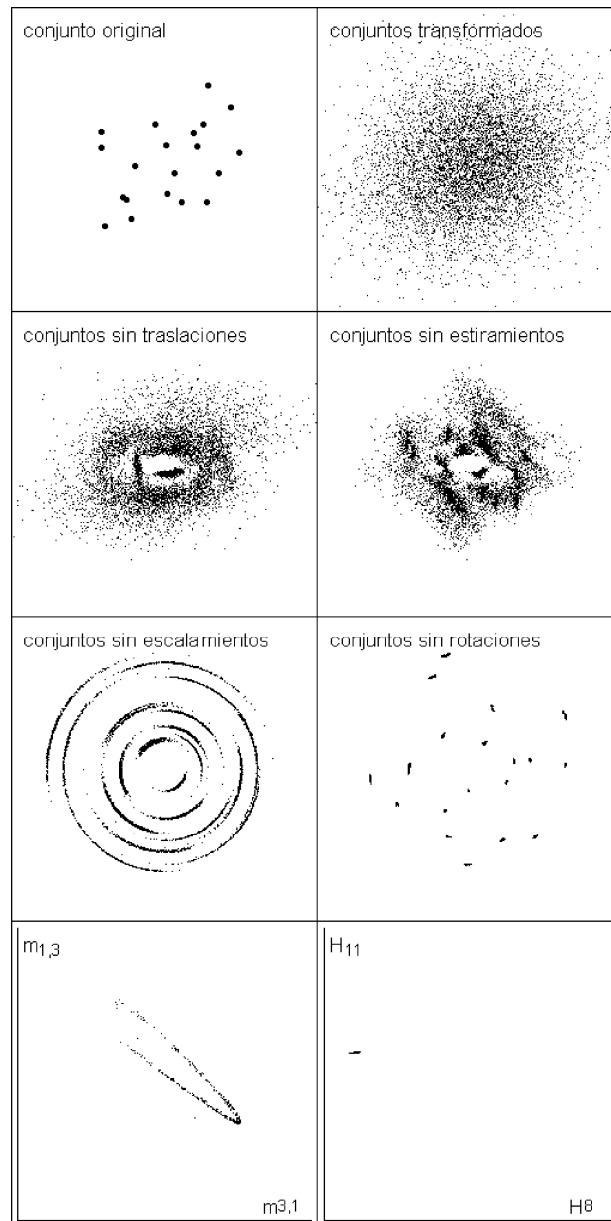


Figura 0: Normalización de conjuntos de puntos

### 2.3 Momentos complejos e invariantes de Hu

El sexto parámetro  $\varphi$  de la transformación  $\mathbf{B} = \mathbf{RSDT}$  es un ángulo de rotación. Para obtenerlo, se debe realizar la transformación

$$x'''' = x''' \cos \varphi - y''' \sin \varphi \quad , \quad y'''' = x''' \sin \varphi + y''' \cos \varphi \quad (11)$$

obtienen los nuevos momentos

$$m_{j,k}'''' = \sum_{(x''', y''') \in P'''} (x''' \cos \varphi - y''' \sin \varphi)^j \cdot (x''' \sin \varphi + y''' \cos \varphi)^k$$

y en especial los momentos de orden tres:

$$\begin{aligned} m_{3,0}'''' &= m_{3,0}''' \cos^3 \varphi - 3m_{2,1}''' \cos^2 \varphi \sin \varphi + 3m_{1,2}''' \cos \varphi \sin^2 \varphi - m_{0,3}''' \sin^3 \varphi \\ m_{2,1}'''' &= m_{2,1}''' \cos^3 \varphi - (m_{3,0}''' - 2m_{1,2}''') \cos^2 \varphi \sin \varphi \\ &\quad + (m_{0,3}''' - 2m_{2,1}'') \cos \varphi \sin^2 \varphi + m_{1,2}''' \sin^3 \varphi \\ m_{1,2}'''' &= m_{1,2}''' \cos^3 \varphi - (m_{0,3}''' - 2m_{2,1}'') \cos^2 \varphi \sin \varphi \\ &\quad + (m_{3,0}''' - 2m_{1,2}'') \cos \varphi \sin^2 \varphi - m_{2,1}''' \sin^3 \varphi \\ m_{0,3}'''' &= m_{0,3}''' \cos^3 \varphi + 3m_{1,2}''' \cos^2 \varphi \sin \varphi + 3m_{2,1}''' \cos \varphi \sin^2 \varphi + m_{3,0}''' \sin^3 \varphi \end{aligned}$$

Usamos como restricción de normalización la ecuación

$$m_{3,0}'''' + m_{1,2}'''' = (m_{3,0}''' + m_{1,2}''') \cos \varphi - (m_{0,3}''' + m_{2,1}'') \sin \varphi = 0$$

(descrita en [17] y [20]) de donde puede obtenerse  $\varphi$ . Sin embargo la ecuación

$$\tan \varphi = \frac{m_{3,0}''' + m_{1,2}'''}{m_{0,3}''' + m_{2,1}''} \quad (12)$$

para la determinación del parámetro  $\varphi$  es numéricamente muy inestable cuando los momentos de orden tres son pequeños. Este caso puede ocurrir, por ejemplo si los puntos están distribuidos más o menos simétricamente (ver [16, 18, 19]).

Por esta razón buscamos combinaciones algebraicas de los momentos que no dependan del ángulo  $\varphi$  de rotación. Tales combinaciones fueron introducidas por Hu ([10]). La derivación de estas combinaciones por Hu es muy complicada, así que usamos en su lugar el método de los momentos complejos (ver [18] y [21]). Los momentos complejos están definidos, para

puntos del plano complejo como

$$\begin{aligned}
C_{n,m} &= \sum_{z=x+iy \in P} z^n (z^*)^m = \sum_{z=x+iy \in P} (x+iy)^n (x-iy)^m \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \binom{n}{k} \binom{m}{l} (-1)^{m-l} i^{n-k+m-l} \sum_{(x,y) \in P} x^{k+l} y^{n-k+m-l} \quad (13) \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \binom{n}{k} \binom{m}{l} (-1)^{m-l} i^{n-k+m-l} M_{k+l, n-k+m-l}
\end{aligned}$$

donde  $z^*$  es el conjugado del número complejo  $z$ . Supongamos que los centroides de los conjuntos están en el origen así que  $M_{p,q} = m_{p,q}$ . En este caso se pueden expresar los momentos  $C_{n,m}$  por medio de sumas sobre los momentos  $M_{p,q}$  (ver fórmula (6)).

La rotación descrita por las fórmulas (11) se puede escribir de manera compleja usando una única ecuación con  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ :

$$\begin{aligned}
z' &= x' + iy' \\
&= (x \cos \varphi - y \sin \varphi) + i(x \sin \varphi + y \cos \varphi) = (x + iy) e^{i\varphi} = z e^{i\varphi}
\end{aligned}$$

Entonces obtenemos para los momentos complejos nuevos la ecuación

$$C'_{n,m} = \sum_{z' \in P} (z')^n (z'^*)^m = \sum_{z \in P} (z e^{i\varphi})^n (z^* e^{-i\varphi})^m = C_{n,m} e^{i(n-m)\varphi} \quad (14)$$

Aquí el símbolo  $i$  describe la unidad de los números imaginarios. Vemos que los momentos complejos se transforman de manera muy simple. Para los momentos nuevos de los ordenes hasta 4 obtenemos a partir de (13) y (14) las fórmulas siguientes:

$$C'_{0,0} = M_{0,0}$$

$$\begin{aligned}
C'_{1,0} &= (M_{1,0} + iM_{0,1}) e^{i\varphi} \\
C'_{0,1} &= (M_{1,0} - iM_{0,1}) e^{-i\varphi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C'_{2,0} &= (M_{2,0} + 2iM_{1,1} - M_{0,2}) e^{2i\varphi} \\
C'_{1,1} &= M_{2,0} + M_{0,2} \\
C'_{0,2} &= (M_{2,0} - 2iM_{1,1} - M_{0,2}) e^{-2i\varphi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C'_{3,0} &= (M_{3,0} + 3iM_{2,1} - 3M_{1,2} - iM_{0,3}) e^{3i\varphi} \\
C'_{2,1} &= (M_{3,0} + iM_{2,1} + M_{1,2} + iM_{0,3}) e^{i\varphi} \\
C'_{1,2} &= (M_{3,0} - iM_{2,1} + M_{1,2} - iM_{0,3}) e^{-i\varphi} \\
C'_{0,3} &= (M_{3,0} - 3iM_{2,1} - 3M_{1,2} + iM_{0,3}) e^{-3i\varphi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C'_{4,0} &= (M_{4,0} + 4iM_{3,1} - 6M_{2,2} - 4iM_{1,3} + M_{0,4}) e^{4i\varphi} \\
C'_{3,1} &= (M_{4,0} + 2iM_{3,1} + 2iM_{1,3} - M_{0,4}) e^{2i\varphi} \\
C'_{2,2} &= M_{4,0} + 2M_{2,2} + M_{0,4} \\
C'_{1,3} &= (M_{4,0} - 2iM_{3,1} - 2iM_{1,3} - M_{0,4}) e^{-2i\varphi} \\
C'_{0,4} &= (M_{4,0} - 4iM_{3,1} - 6M_{2,2} + 4iM_{1,3} + M_{0,4}) e^{-4i\varphi}
\end{aligned}$$

Por la estructura especial de estas ecuaciones puede eliminarse muy simplemente el ángulo  $\varphi$  de rotación. Obtenemos por ejemplo los invariantes "clásicos" descritos por Hu como

$$\begin{aligned}
H_1 &= C'_{1,1} = M_{2,0} + M_{0,2} \\
H_2 &= C'_{2,0}C'_{0,2} = (M_{2,0} - M_{0,2})^2 + 4M_{1,1}^2 \\
H_3 &= C'_{3,0}C'_{0,3} = (M_{3,0} - 3M_{1,2})^2 + (3M_{2,1} - M_{0,3})^2 \\
H_4 &= C'_{2,1}C'_{1,2} = (M_{3,0} + M_{1,2})^2 + (M_{2,1} + M_{0,3})^2 \\
H_5 &= C'_{3,0} (C'_{1,2})^3 + C'_{0,3} (C'_{2,1})^3 \\
H_6 &= i (C'_{3,0} (C'_{1,2})^3 - C'_{0,3} (C'_{2,1})^3) \\
H_7 &= C'_{2,0} (C'_{1,2})^2 + C'_{0,2} (C'_{2,1})^2
\end{aligned}$$

Hemos derivado otros cinco invariantes que describimos como  $H_8$  hasta  $H_{12}$  (ver [18]):

$$\begin{aligned}
H_8 &= C'_{3,1}C'_{1,3} \\
H_9 &= C'_{4,0}C'_{0,4} \\
H_{10} &= C'_{3,1}C'_{0,2} + C'_{1,3}C'_{2,0} \\
H_{11} &= C'_{2,2} \\
H_{12} &= C'_{4,0} (C'_{0,2})^2 + C'_{0,4} (C'_{2,0})^2
\end{aligned}$$

Debido a la normalización (10) de los momentos centrales, algunos momentos son triviales o desaparecen, como por ejemplo

$$\begin{aligned}
H_1 &= M_{20} + M_{02} = 2 \\
H_{10} &= 2(M_{4,0} - M_{0,4})(M_{2,0} - M_{0,2}) + 8(M_{3,1}M_{1,1} + M_{1,3}M_{1,1}) = 0
\end{aligned}$$

orden	invariantes de Hu
4	$H_{11} = m_{4,0}''' + 2m_{2,2}''' + m_{0,4}'''$
6	$H_3 = (m_{3,0}''' - 3m_{1,2}''')^2 + (3m_{2,1}''' - m_{0,3}''')^2$
6	$H_4 = (m_{3,0}''' + m_{1,2}''')^2 + (m_{2,1}''' + m_{0,3}''')^2$
8	$H_8 = (m_{4,0}''' - m_{0,4}''')^2 + 4(m_{3,1}''' + m_{1,3}''')^2$
8	$H_9 = (m_{4,0}''' + m_{0,4}''')^2 + 16(m_{3,1}''' - m_{1,3}''')^2 - 12m_{2,2}'''(m_{0,4}''' - 3m_{2,2}''' + m_{4,0}''')$

Tabla 1: Invariantes de Hu hasta el orden 8

Hasta el orden 8 en las potencias de las coordenadas  $x$  y  $y$  tenemos solo cinco invariantes no triviales (ver la tabla 1). Si insertamos los momentos (9) que son invariantes bajo traslaciones, estiramientos y escalaciones anisotrópicas, entonces las expresiones  $H_3, H_4, H_8, H_9$  y  $H_{11}$  son invariantes también bajo rotaciones y por consiguiente invariantes bajo todas las transformaciones afines.

## 2.4 Invariantes de puntos

A partir de las fórmulas de la tabla1, podemos determinar los invariantes de Hu  $H_k(P)$  de conjuntos  $P$  que son invariantes bajo transformaciones afines generales  $\mathbf{B}$  (ver fórmula (5)). La ecuación  $H_k(P) = H_k(Q)$  es válida para cada transformación  $Q = \mathbf{B}P$ , también en el caso de una reflexión  $(x, y) \rightarrow (-x, y)$ . Si tenemos las relaciones  $H_k(P) = H_k(Q)$  para  $k = 3, 4, 8, 9, 11$  entonces la suposición  $Q = \mathbf{B}P$  es correcta con alta probabilidad. Sin embargo, queda la cuestión de cuál punto  $q \in Q$  es el punto correspondiente al punto  $p \in P$ . Esta es la pregunta que queremos solucionar en la presente sección. Si se elimina un punto  $p_i \in P$ , entonces se obtiene otro conjunto  $P_i = P - \{p_i\}$ . Este conjunto  $P_i$  tiene su propios invariantes

$$h_k(p_i) = H_k(P_i) = H_k(P - \{p_i\})$$

puntos $p = (x, y)$	$h_3(p)$	$h_4(p)$	$h_8(p)$	$h_9(p)$	$h_{11}(p)$
(164,320)	0.014	0.645	0.084	0.134	0.755
(422,314)	.127	.531	.042	.104	.609
(150,425)	.232	.687	.020	.182	.732
(89,75)	.345	.544	.081	.123	.670
(242,398)	.324	.855	.033	.505	.897
(324,434)	.288	.776	.049	.399	.851
(91,189)	.334	.609	.117	.200	.721
(339,417)	.184	.739	.045	.297	.834
(263,355)	.242	.693	.031	.481	.877
(448,112)	.323	.483	.037	.107	.561

Tabla 2: Valores de los invariantes de Hu

y estos valores  $h_k(p_i)$  se asocian univocamente al punto  $p_i \in P$ . Es claro que de  $Q = \mathbf{B}P$  resultan también las relaciones  $\{q_i\} = \mathbf{B}\{p_i\}$  o

$$Q - \{q_i\} = \mathbf{B}P - \mathbf{B}\{p_i\} = \mathbf{B}(P - \{p_i\})$$

y por tanto obtenemos la invariancia  $h_k(p_i) = h_k(q_i)$  para puntos correspondientes  $p_i \in P$  y  $q_i \in Q$ . De esta manera asociamos a cada punto  $p_i \in P$  su propios invariantes de Hu  $h_k(p_i)$ .

### Teorema 1

Sean dados dos conjuntos de puntos  $P$  y  $Q$  que se asocian por la transformación afín  $Q = \mathbf{B}P$ . Para cada punto se definen los invariantes puntuales  $h_k(p_i) = H_k(P - \{p_i\})$  y  $h_k(q_j) = H_k(Q - \{q_j\})$ .

Dos puntos  $p \in P$  y  $q \in Q$  son puntos correspondientes si y solamente si  $(h_3(p), h_4(p), h_8(p), \dots) = (h_3(q), h_4(q), h_8(q), \dots)$ .

La tabla 2 muestra valores numéricos de los invariantes de Hu para un conjunto de 10 puntos. Es importante tener en cuenta que cada transformación afín de este conjunto de 10 puntos conserva los valores de los invariantes de Hu.

Mostramos un ejemplo en figura 1. Los puntos del conjunto  $P$  (caracterizados por el símbolo  $\circ$ ) son distribuidos en una imagen del tamaño  $256 \times 256$  píxeles y las coordenadas  $x$  y  $y$  de los puntos tienen una distribución normal con errores de  $\pm 1.0$  píxeles. Los puntos del conjunto  $Q$  son caracterizados por el símbolo  $\bullet$ . Ambos conjuntos se relacionan por transformaciones

afines, en un caso con una rotación adicional de  $-119^\circ$  (arriba a la izquierda en la figura 1) y en otro caso con una rotación de  $+40^\circ$  y una reflexión adicional (abajo a la izquierda). Es muy difícil buscar las correspondencias entre los puntos, aunque los errores de coordenadas son pequeños y no hay DP's (puntos de perturbación).

Pero si calculamos los invariantes puntuales, entonces en el espacio de invariantes  $(h_3, h_4)$  es muy simple detectar las parejas de los puntos correspondientes (arriba a la derecha y abajo a la derecha).

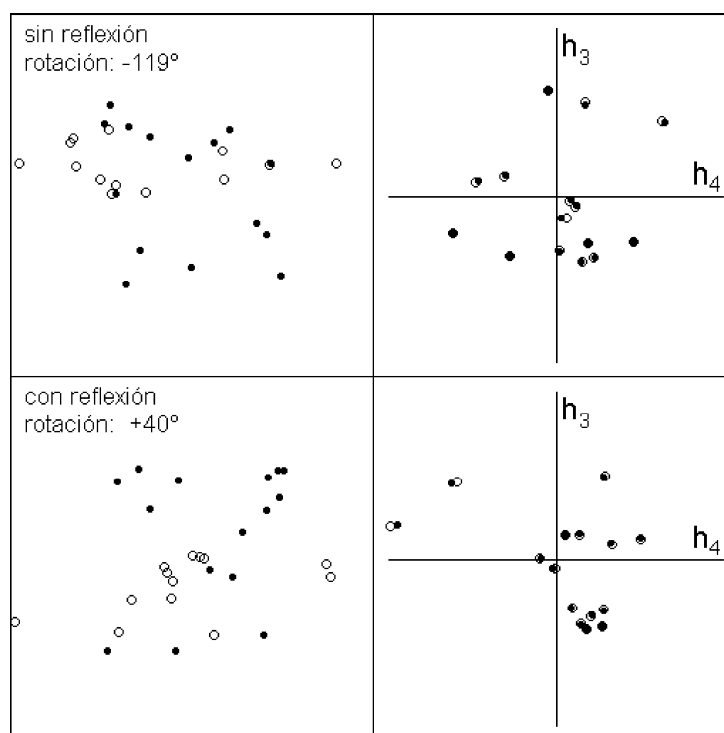


Figura 1: Invariantes puntuales de Hu  $h_3$  y  $h_4$  para los puntos de dos conjuntos transformados afinmente

## 2.5 Determinación de correspondencias

Ahora tenemos solucionar la tarea de la determinación de puntos correspondientes. Sea  $L_P = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n)$  la lista de las características  $c_{i,k}$  de los puntos  $p_i \in P$  resumidas como un vector  $\mathbf{p}_i = (c_{i,1}, c_{i,2}, \dots, c_{i,K})$  y



$L_Q = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n)$  la lista de las características  $c_{j,k}$  de los puntos  $q_j \in Q$  resumidas como un vector  $\mathbf{q}_j = (c_{j,1}, c_{j,2}, \dots, c_{j,K})$ . En nuestro caso las características son los invariantes puntuales de Hu. Definimos  $p_i$  y  $q_j$  como puntos vecinos si la distancia

$$d(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = |\mathbf{p}_i - \mathbf{q}_j| = \sqrt{\sum_{k=1}^K (c_{i,k} - c_{j,k})^2}$$

es menor que todas de las demás distancias  $|\mathbf{p} - \mathbf{q}_j|$  entre los vectores  $\mathbf{p} \in P$  y  $\mathbf{q}_j$  y menor que todas de las demás distancias  $|\mathbf{p}_i - \mathbf{q}|$  entre los vectores  $\mathbf{q} \in Q$  y  $\mathbf{p}_i$ .

Una búsqueda de puntos correspondientes en las partes izquierdas de la figura 1 es difícil, pero la búsqueda por puntos vecinos en las partes derechas, es decir en el espacio de invariantes puntuales, es mucho más simple. Dado que en la práctica las características de dos puntos correspondientes no son iguales necesitamos una definición precisa:

### Definición 1

Si el punto  $\mathbf{q}$  es el vecino más próximo del punto  $\mathbf{p}$  y al mismo tiempo el punto  $\mathbf{p}$  es el vecino más próximo del punto  $\mathbf{q}$ , entonces decimos que  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  son puntos vecinos y se escribe  $\mathbf{p} \rightleftharpoons \mathbf{q}$ .

Una transformación afín está determinada si conocemos tres parejas de puntos correspondientes. Sean  $p_i = (x_i, y_i)$  y  $q_i = (x'_i, y'_i)$  para  $i = 1, 2, 3$  puntos correspondientes. Entonces las siguientes ecuaciones son válidas:

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{10} + a_{11}x_1 + a_{12}y_1 & y'_1 &= a_{20} + a_{21}x_1 + a_{22}y_1 \\ x'_2 &= a_{10} + a_{11}x_2 + a_{12}y_2 & y'_2 &= a_{20} + a_{21}x_2 + a_{22}y_2 \\ x'_3 &= a_{10} + a_{11}x_3 + a_{12}y_3 & y'_3 &= a_{20} + a_{21}x_3 + a_{22}y_3 \end{aligned} \quad (15)$$

Podemos escribir estas ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{20} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} \quad (16)$$

La solución de estas ecuaciones matriciales proporciona los coeficientes  $a_{ik}$  de la transformación afín. Dado que necesitamos solo tres parejas de

puntos correspondientes y la búsqueda de un vecino más próximo requiere  $n$  operaciones (con  $n$  como el número de los puntos), la complejidad para la determinación de una transformación afín es  $O(n)$ .

Debido a que siempre hay errores pequeños de las coordenadas de los puntos, los coeficientes  $a_{ik}$  son dependientes de las tres parejas de puntos correspondientes escogidos. La determinación de la transformación afín es más precisa si tenemos en cuenta todas las parejas de puntos correspondientes. Entonces obtenemos en lugar de (15) un sistema sobre-especificado de  $2n$  ecuaciones para los 6 coeficientes  $a_{ik}$ :

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{10} + a_{11}x_1 + a_{12}y_1 & y'_1 &= a_{20} + a_{21}x_1 + a_{22}y_1 \\ x'_2 &= a_{10} + a_{11}x_2 + a_{12}y_2 & y'_2 &= a_{20} + a_{21}x_2 + a_{22}y_2 \\ x'_3 &= a_{10} + a_{11}x_3 + a_{12}y_3 & y'_3 &= a_{20} + a_{21}x_3 + a_{22}y_3 \\ &\dots & &\dots \\ x'_n &= a_{10} + a_{11}x_n + a_{12}y_n & y'_n &= a_{20} + a_{21}x_n + a_{22}y_n \end{aligned} \quad (17)$$

La ecuación matricial para los coeficientes  $a_{10}, a_{11}, a_{12}$  es

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} = \mathbf{x}'$$

Aquí  $\mathbf{M}$  es una matriz con 3 columnas y  $N$  filas y  $\mathbf{x}'$  es un vector con  $n$  componentes. El vector  $\mathbf{d} = \mathbf{M}\mathbf{a}_1 - \mathbf{x}'$  de desviaciones es en el caso ideal igual al vector  $\mathbf{o}$  todos cuyos coeficientes son ceros. Pero en realidad las desviaciones no son ceros, sino valores pequeños. Por eso requerimos

$$S = |\mathbf{M}\mathbf{a}_1 - \mathbf{x}'|^2 = \sum_{i=1}^n (a_{10} + a_{11}x_i + a_{12}y_i - x'_i)^2 \rightarrow \text{mínimo} \quad (18)$$

La suma  $S$  es dependiente de los coeficientes  $a_{10}, a_{11}$  y  $a_{12}$ . Para solucionar esta tarea de optimización  $S \rightarrow \text{mínimo}$  se tiene que derivar parcialmente la función  $S$  con respecto a los coeficientes  $a_{10}, a_{11}$  y  $a_{12}$ :

$$\frac{\partial S}{\partial a_{10}} = \frac{\partial S}{\partial a_{11}} = \frac{\partial S}{\partial a_{12}} = 0$$

o

$$\begin{pmatrix} \sum 1 & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum y_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x'_i \\ \sum x'_i x_i \\ \sum x'_i y_i \end{pmatrix}$$

o en forma matricial

$$\mathbf{M}^T \mathbf{M} \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{M}^T \mathbf{x}' \quad (19)$$

Los coeficientes  $a_{20}$ ,  $a_{21}$  y  $a_{22}$  se determinan de la misma manera (19) donde se reemplaza el vector  $\mathbf{x}'$  por el vector  $\mathbf{y}'$ .

Este enfoque para la determinación de los coeficientes de la transformación afín se llama *método de mínimos cuadrados*.

### 3 Apareamiento por optimización lineal

#### 3.1 Minimización de las distancias geométricas

En el caso del apareamiento de puntos bajo transformaciones afines podemos solucionar dos problemas: la detección de los puntos correspondientes y la determinación de los parámetros de la transformación. Si conocemos los puntos correspondientes, entonces podemos calcular los parámetros de la transformación por ajuste (ver sección 2.5). Por otro lado, si conocemos la transformación correcta, entonces podemos determinar las parejas de puntos correspondientes (por ejemplo a partir del método de los vecinos más cercanos). ¿Pero cuál es la solución si ambas informaciones faltan? La existencia de los muchos trabajos que se ocupan del problema de apareamiento de puntos tiene su razón en esta conexión entre las correspondencias y la transformación [1, 3].

En la presente sección mostramos que hay una propiedad de dos conjuntos de puntos, la *medida de correspondencia*, que es invariante bajo casi cada transformación afín. La única proposición es que la matriz de la transformación tiene eigenvalores (valores propios) positivos. Basados en esta propiedad podemos determinar primero los puntos correspondientes y después los parámetros de la transformación.

Sean dados dos conjuntos de puntos  $P$  y  $Q$  con el mismo número  $n$  de puntos. Sean los puntos  $p_i = (x_i, y_i) \in P$  y  $q_{k_i} = (u_{k_i}, v_{k_i}) \in Q$  dos puntos correspondientes (pero no conocemos cual índice  $k_i$  del conjunto  $Q$  se asocia al índice  $i$  del conjunto  $P$ ). En adelante supondremos que existe una transformación afín entre las coordenadas de los puntos:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{t}$$

Para solucionar el problema del apareamiento tenemos que determinar la transformación  $\mathbf{B} = (\mathbf{A}, \mathbf{t})$  y la correspondencia  $\mathfrak{C}$ . La correspondencia  $\mathfrak{C}$  describe cualquiera de las  $n!$  permutaciones posibles entre los índices  $k_i$  y los índices  $i$ .

Sean dados  $\mathbf{B}$  y  $\mathfrak{C}$ . Entonces obtenemos la suma de los cuadrados de las distancias geométricas entre los puntos correspondientes como

$$S(\mathbf{B}, \mathfrak{C}) = \sum_{i=1}^n |\mathbf{p}_i - \mathbf{q}_{k_i}|^2 = \sum_{i=1}^n |\mathbf{p}_i - \mathbf{A}\mathbf{p}_{k_i} - \mathbf{t}|^2$$

es decir, la suma  $S(\mathbf{B}, \mathfrak{C})$  es dependiente de la transformación  $\mathbf{B}$  y de la correspondencia  $\mathfrak{C}$ . Ahora podemos formular el problema de optimización

$$S(\mathbf{B}, \mathfrak{C}) = \sum_{i=1}^n |\mathbf{p}_i - \mathbf{q}_{k_i}|^2 = \sum_{i=1}^n |\mathbf{p}_i - \mathbf{A}\mathbf{p}_{k_i} - \mathbf{t}|^2 \rightarrow \text{mínimo} \quad (20)$$

o

$$S(\mathbf{B}, \mathfrak{C}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_i - 2 \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i^T \mathbf{A}\mathbf{p}_{k_i} - 2 \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i^T \mathbf{t} + \sum_{i=1}^n |\mathbf{A}\mathbf{p}_{k_i} + \mathbf{t}|^2 \rightarrow \text{mínimo} \quad (21)$$

Sin pérdida de la generalidad podemos desplazar ambos conjuntos  $P$  y  $Q$  por un vector común de modo que el centro de la gravedad del conjunto  $P$  esté en el origen del sistema de coordenadas, es decir  $\sum \mathbf{p}_i = \sum \mathbf{p}_{k_i} = 0$ . Entonces el primer término de la fórmula (21) es independiente de  $\mathbf{B}$  y  $\mathfrak{C}$  y el tercer término es cero. El cuarto término proporciona, bajo una transformación fija, un valor constante (es decir, este término no depende de  $\mathfrak{C}$ ):

$$c = c(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{p}_{k_i}^T \mathbf{A}^T + \mathbf{t}^T) (\mathbf{A}\mathbf{p}_{k_i} + \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_{k_i}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{p}_{k_i} + n\mathbf{t}^T \mathbf{t}$$

Para una transformación dada  $\mathbf{B} = (\mathbf{A}, \mathbf{t})$  sólo el segundo término en la fórmula (21) es dependiente de la correspondencia  $\mathfrak{C}$ . Así obtenemos el problema de maximización (búsqueda de un máximo sobre todas las correspondencias bajo una transformación dada)

$$S_{\mathbf{A}}^*(\mathfrak{C}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i^T \mathbf{A}\mathbf{p}_{k_i} \rightarrow \text{máximo} \quad (22)$$

### 3.2 Puntos correspondientes

Si la matriz  $\mathbf{A}$  es simétrica y positiva definida, entonces ambos eigenvalores de  $\mathbf{A}$  son positivos y podemos escribir la matriz  $\mathbf{A}$  como un producto  $\mathbf{A} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$  con  $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}$ . La fórmula (22) se cambia por la fórmula

$$S_{\mathbf{A}}^*(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{p}_{k_i} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{C} \mathbf{p}_i)^T \mathbf{C} \mathbf{p}_{k_i} \rightarrow \text{máximo}$$

La transformación  $\mathbf{C}$  transforma todos de los puntos  $\mathbf{p} \in P$  a puntos  $\mathbf{r} = \mathbf{C} \mathbf{p}$  así que se obtiene

$$S_{\mathbf{A}}^*(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_{k_i} \rightarrow \text{máximo} \quad (23)$$

Esta ecuación requiere una búsqueda por correspondencias  $\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_{k_i}$  de modo que  $S_{\mathbf{A}}^*(\mathcal{C})$  sea un máximo. Si escribimos (23) con  $\mathbf{r}^T = (\xi, \eta)$  como

$$S_{\mathbf{A}}^*(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_{k_i} = \sum_{i=1}^n \xi_i \xi_{k_i} + \sum_{i=1}^n \eta_i \eta_{k_i} \rightarrow \text{máximo}$$

entonces podemos usar la desigualdad general

$$\sum_i a_i^2 \cdot \sum_i b_i^2 \geq \left( \sum_i a_i b_i \right)^2$$

Ahora obtenemos para el término con  $\xi$  la desigualdad

$$\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n \xi_{k_i}^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \geq \left( \sum_{i=1}^n \xi_i \xi_{k_i} \right)^2$$

(la suma sobre todos de los  $\xi_{k_i}^2$  es igual de la suma sobre todos de los  $\xi_i^2$ ) y finalmente obtenemos

$$\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \geq \sum_{i=1}^n \xi_i \xi_{k_i}$$

La misma desigualdad es correcta para las coordenadas  $\eta_i$  y  $\eta_{k_i}$ . En otras palabras:  $S_{\mathbf{A}}^*(\mathcal{C})$  es un máximo si y solo si las correspondencias  $\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_{k_i}$  son las identidades  $\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_i$ . Esta proposición es correcta sin información adicional sobre la transformación afín  $\mathbf{B}$ , aparte de que la matriz  $\mathbf{A}$  es simétrica y positiva definida.

Dado que  $S_{\mathbf{A}}^*(\mathfrak{C})$  en la fórmula (22) alcanza su máximo para  $\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_i$  o  $\mathbf{p}_i \leftrightarrow \mathbf{p}_i$ , también  $S(\mathbf{B}, \mathfrak{C})$  en la fórmulas y (20) alcanza su mínimo para las correspondencias  $\mathbf{p}_i \leftrightarrow \mathbf{q}_i$ .

### Teorema 2

Sean dados dos conjuntos de puntos  $P$  y  $Q$  que son equivalentes hasta una transformación afín con una parte homogénea simétrica y positiva definida. Entonces podemos obtener las correspondencias correctas entre los puntos  $p_i \in P$  y los puntos  $q_j \in Q$  mediante una minimización de la suma de las distancias cuadradas de los puntos

$$\mathfrak{C} \text{ es correcta si } S(\mathbf{B}, \mathfrak{C}) = \sum_{i=1}^n |\mathbf{p}_i - \mathbf{q}_{k_i}|^2 \rightarrow \text{mínimo}$$

### 3.3 Apareamiento y optimización lineal

Dado que la suma  $S(\mathbf{B}, \mathfrak{C})$  es dependiente de la correspondencia  $\mathfrak{C}$ , tenemos que calcular el valor mínimo de la función  $S(\mathbf{B}, \mathfrak{C})$  para todas las  $n!$  permutaciones entre los puntos  $p_i \in P$  y los puntos  $q_{k_i} \in Q$ . Sin embargo la estructura relativamente simple de nuestro problema permite usar un algoritmo que trabaja en un tiempo polinomial  $O(n^s)$  con un pequeño valor de  $s$ . Este algoritmo trabaja por ayuda del método de la optimización lineal (*linear programming*, ver [13]).

Definimos las distancias cuadradas

$$D(p, q) = (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2$$

entre los dos puntos  $p \in P$  y  $q \in Q$  así como un "peso de correspondencia"  $w(p, q) = S_0 - D(p, q)$  con una constante positiva  $S_0$ , de modo que tenemos que buscar un máximo de la función  $W$ :

$$W(\mathfrak{C}) = \sum_{i=1}^n w(p_i, q_{k_i}) = \sum_{i=1}^n (S_0 - D(p_i, q_{k_i})) \rightarrow \text{máximo} \quad (24)$$

Para solucionar el problema (24) definimos un "peso de punto" y el "peso permitido".

### Definición 2

Sean dados dos conjuntos de puntos  $P$  y  $Q$ . Asignamos a cada uno de los puntos un "peso de punto"  $g(p)$  y  $g(q)$ . Entonces decimos que estos pesos son "pesos permitidos" si  $g(p) + g(q) \geq w(p, q)$ .

### Teorema 3

Sean dados dos conjuntos de puntos  $P$  y  $Q$ . Si todas las parejas  $(p_i, q_{k_i})$  de puntos correspondientes  $p_i \in P$  y  $q_{k_i} \in Q$  de una correspondencia  $\mathfrak{C}^*$  cumplen la ecuación  $g(p_i) + g(q_{k_i}) = w(p_i, q_{k_i})$ , entonces  $\mathfrak{C}^*$  es una correspondencia maximal con  $W(\mathfrak{C}^*) = W^* \rightarrow \text{máximo}$  o  $\mathfrak{C}^*$  garantiza que  $S(\mathbf{B}, \mathfrak{C}^*)$  de la fórmula (20) es un mínimo.

La prueba de este teorema es bastante simple: Para una correspondencia arbitraria  $\mathfrak{C}$  tenemos

$$W(\mathfrak{C}) = \sum_{(p,q) \in \mathfrak{C}} w(p,q) \leq \sum_{(p,q) \in \mathfrak{C}} g(p) + g(q) = \sum_{p \in P} g(p) + \sum_{q \in Q} g(q) = W^*$$

es decir, todos los valores  $W(\mathfrak{C})$  son menores o iguales que  $W^*$ . Por otro lado la correspondencia  $\mathfrak{C}^*$  minimal tiene por el teorema 3 el valor

$$W(\mathfrak{C}^*) = \sum_{(p',q') \in \mathfrak{C}^*} g(p') + g(q') = W^*$$

y por tanto obtenemos el hecho que todas de las correspondencias  $\mathfrak{C}$  tienen valores de la función  $W$  menores o iguales que  $W(\mathfrak{C}^*)$ :

$$W(\mathfrak{C}) \leq W(\mathfrak{C}^*) \quad \text{para todas las correspondencias } \mathfrak{C}$$

Ahora buscamos la solución más pequeña de todos los valores maximales  $W^*$ . De esta manera obtenemos un problema de optimización lineal:

1. Sean dadas todas las distancias cuadradas  $D(p, q)$  para  $p \in P, q \in Q$ .
2. Busca pesos permitidos  $g(p_i)$  y  $g(q_j)$  con  $g(p_i) + g(q_j) \geq w(p_i, q_j)$  y  $w(p, q) = S_0 - D(p, q)$  de manera que  $\sum_i g(p_i) + g(q_{k_i}) \rightarrow \text{mínimo}$
3. Entonces la correspondencia  $\mathfrak{C}^*$  tiene la suma más pequeña de las distancias cuadradas entre los puntos.
4. Si los conjuntos  $P$  y  $Q$  están relacionados por una transformación afín con una matriz  $\mathbf{A}$  homogénea simétrica y positiva definida, entonces las correspondencias  $p_i \longleftrightarrow q_{k_i}$  dados por  $\mathfrak{C}^*$  son las correspondencias entre los puntos correspondientes.

(25)

Como ejemplo sean dados los dos conjuntos  $P = \{(1, 1), (1, 5), (3, 2)\}$  y  $Q = \{(5, 6), (6, 4), (9, 3)\}$ . Entonces obtenemos los pesos  $w(p, q) = 100 - D(p, q)$  de la tabla siguiente:

$D(p, q)$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$p_1$	59	66	32
$p_2$	83	74	32
$p_3$	80	87	63

Asignamos a los puntos del conjunto  $P$  los pesos puntuales  $x, y, z$  y asignamos a los puntos del conjunto  $Q$  los pesos puntuales  $r, s, t$ . Ahora podemos formular el siguiente problema de optimización lineal:

$$\left[ \begin{array}{l} x + y + z + r + s + t \rightarrow \text{mínimo} \\ x + r \geq 59 \\ x + s \geq 66 \\ x + t \geq 32 \\ y + r \geq 83 \\ y + s \geq 74 \\ y + t \geq 32 \\ z + r \geq 80 \\ z + s \geq 87 \\ z + t \geq 63 \end{array} \right]$$

La solución de esta tarea  $W = x + y + z + r + s + t \rightarrow \text{mínimo}$  es  $(x, y, z, r, s, t) = (66, 74, 87, 9, 0, -24)$  con  $W^* = 212$ , así que surge la tabla

$g(p) + g(q)$	$r$	$s$	$t$
$x$	75	<b>66</b>	42
$y$	<b>83</b>	<b>74</b>	50
$z$	96	<b>87</b>	<b>63</b>

Las correspondencias con pesos permitidos, es decir las relaciones con  $w(p, q) = g(p) + g(q)$ , están marcados. Con las sumas  $x + s = 66$ ,  $y + r = 83$ ,  $z + t = 63$  hemos determinado también la correlación óptima  $p_1 \leftrightarrow q_2$ ,  $p_2 \leftrightarrow q_1$ ,  $p_3 \leftrightarrow q_3$ , es decir  $\mathcal{C}^*$ , y la suma mínima de las distancias es  $D(\mathcal{C}^*) = 88$  con  $W(\mathcal{C}^*) = 212$ .

### 3.4 Determinación de transformaciones afines

En ambos casos de la determinación de puntos correspondientes, por los invariantes de Hu (ver sección 2) y por el teorema  $S(\mathbf{B}, \mathcal{C}) \rightarrow \text{mínimo}$ , hay



posiblemente puntos de perturbación (DP's). Entonces es necesario determinar los coeficientes de la transformación por un método de optimización (minimización de los errores).

La minimización de los errores se suele realizar por el método de mínimos cuadrados (ver el párrafo 2.5). Pero si usamos este método con la norma  $L_2$ , es decir trabajamos a partir de los cuadrados de los errores, entonces hay una gran inestabilidad. Se sabe que la norma  $L_1$ , es decir utilizando los valores absolutos de los errores, es más estable con respecto a valores fugitivos (*outliers*). Un ejemplo demuestra este hecho.

Sean dados  $n$  puntos unidimensionales (o valores)  $x_1 \dots x_n$  distribuidos estocásticamente con una distribución normal (distribución de Gauss) con un valor medio de  $\mu = 0$  y una desviación estándar  $\sigma = 1$  (sin pérdida de generalidad podemos elegir también otra desviación). En adelante sean  $m$  puntos de los  $n$  puntos distribuidos por una distribución normal con  $\mu = 0$  y  $\sigma = 10$ . Estos  $m$  puntos son con una probabilidad alta puntos fugitivos o puntos atípicos. Si usamos la norma  $L_p$  para la determinación del valor medio  $\bar{x}$  de la muestra (*sample*) de los  $n$  puntos, entonces tenemos que solucionar el problema de optimización

$$S(\bar{x}) = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow \text{mínimo}$$

Esta tarea es solucionable analíticamente solamente en el caso de  $p = 2$  y - como mostraremos - en el caso  $p = 1$ . Sin embargo, siempre podemos determinar numericamente un valor óptimo aproximado  $\bar{x}$ . Para un conjunto dado de puntos, este valor óptimo depende de  $p$  y de  $n$ , es decir  $\bar{x} = \bar{x}(p, n)$ .

En la figura 2 se muestran los resultados de estos experimentos para  $n - m = 95$  puntos normales y  $m = 5$  puntos fugitivos. Los valores teóricos  $\bar{x}^*(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}(p, n)$  deben ser cero. Para un número finito de puntos, se vé que los valores  $\bar{x}(p, n, m)$  están distribuidos para cada valor  $p$  en torno del cero (la línea negra horizontal). Si la influencia de los puntos fugitivos es grande, entonces las curvas se desvian fuertemente de cero. Reconocemos que la norma  $L_1$  es mejor que la norma  $L_2$  (ver fórmula (18)) porque la influencia de los puntos fugitivos es menor.

Debido a esta investigación experimental, usaremos la norma  $L_1$ , es decir trabajaremos con el método de la minimización de los errores absolutos. Se puede escribir formalmente un ajuste a partir de los errores absolutos como

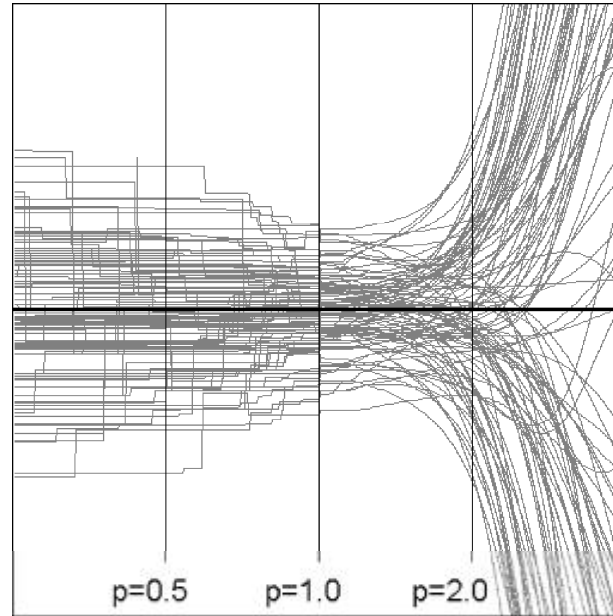


Figura 2: Valores  $\bar{x} = \bar{x}(p, n, m)$  dependiendo de la norma  $L_p$  para conjuntos de  $n$  puntos

sigue:

$$\sum_{i=1}^n |x'_i - a_{11}x_i - a_{12}y_i - a_{10}| + |y'_i - a_{21}x_i - a_{22}y_i - a_{20}| \rightarrow \text{mínimo} \quad (26)$$

Una solución analítica no es posible porque se no pueden calcular derivadas de funciones como  $|x|$ . Sin embargo existe un enfoque de cambiar la tarea (26) a una tarea de la optimización lineal, de modo que podemos solucionar esta tarea por el método de simplex (ver por ejemplo [11]). Este enfoque es escasamente conocido (hemos hallado solamente las referencias [14, 12, 7]). Pero la idea es bastante simple. Sea dada la tarea

$$\sum_{i=1}^n |d_i| \rightarrow \text{mínimo} \quad (27)$$

Ahora introducimos en lugar de  $d_i$  dos nuevas variables  $d'_i$  y  $d''_i$  que son no negativas:

$$d_i = d'_i - d''_i \quad , \quad d'_i \geq 0 \quad , \quad d''_i \geq 0$$

Entonces podemos escribir el valor absoluto como

$$|d_i| = |d'_i - d''_i| = \begin{cases} d'_i & \text{if } d''_i = 0 \\ d''_i & \text{if } d'_i = 0 \end{cases}$$

Si construimos la tarea

$$\sum_{i=1}^n d'_i + d''_i \rightarrow \text{mínimo} \quad \text{con los condiciones } d'_i, d''_i \geq 0 \text{ y } d'_i - d''_i = d_i \quad (28)$$

entonces tenemos un problema de optimización lineal. Se puede ver simplemente que esta tarea es equivalente a  $\sum |d'_i + d''_i| \rightarrow \text{mínimo}$  porque los valores  $|d_i|$  son mínimos solamente en los casos  $d'_i = 0$  o  $d''_i = 0$ .

En la tarea (26) podemos separar los dos problemas

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x'_i - a_{11}x_i - a_{12}y_i - a_{10}| &\rightarrow \text{mínimo} \\ \sum_{i=1}^n |y'_i - a_{21}x_i - a_{22}y_i - a_{20}| &\rightarrow \text{mínimo} \end{aligned}$$

como en el caso del método de mínimos cuadrados en el párrafo 2.5. Entonces, con ayuda de las fórmulas (27) y (28), obtenemos por ejemplo para los parámetros  $a_{1k}$  las restricciones (con  $a_{ik} = a'_{ik} - a''_{ik}$ )

$$a'_{11}x_i + a'_{12}y_i + a'_{10} - a''_{11}x_i - a''_{12}y_i - a''_{10} - x'_i = d'_i - d''_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \quad (29)$$

y las variables de holgura  $d'_i$  y  $d''_i$ . Finalmente debemos solucionar la tarea

$$\sum_{i=1}^n d'_i + d''_i \rightarrow \text{mínimo} \quad (30)$$

bajo las 6 restricciones  $a'_{11}, a'_{12}, a'_{10}, a''_{11}, a''_{12}, a''_{10} \geq 0$  y las  $2n$  restricciones  $d'_i, d''_i \geq 0$ .

Si tenemos dos listas cada una con  $n$  puntos, entonces tenemos  $n$  restricciones y  $2n + 6$  variables (incluido todas de las variables de holgura). En la gran mayoría de los casos prácticos, la complejidad del método simplex es de orden  $O(n)$  como se menciona en [11]. Para determinar los parámetros  $a_{2k}$ , tenemos que solucionar un problema equivalente a las fórmulas (29) y (30) cambiando los parámetros  $a_{1k} \rightarrow a_{2k}$  y los valores  $x'_i \rightarrow y'_i$ .

## 4 Ajuste de figuras por optimización lineal

### 4.1 Optimización lineal

El método de optimización lineal (*linear programming, linear optimization*) investiga un problema de valores extremos de funciones lineales en muchas variables y restricciones en forma de ecuaciones lineales y desigualdades lineales. La forma más general de un problema de optimización lineal es la siguiente:

Sea dada una función lineal

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

de las  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  con los coeficientes reales  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Además tenemos restricciones en forma de ecuaciones

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = a_r$$

o en forma de desigualdades

$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n \leq a_s$$

con números reales arbitrarios  $a_{ij}$ . Las desigualdades se pueden reemplazar por ecuaciones introduciendo nuevas variables:

$$\begin{aligned} a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n &\leq a_s && \text{es igual a} \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n + x_{n+1} &= a_s && \text{con } x_{n+1} \geq 0 \end{aligned}$$

Denotamos la variable adicional  $x_{n+1}$  como variable de holgura (*slack variable*). De esta manera surge la forma normal de un problema de la optimización lineal:

$$\begin{aligned} c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n &\rightarrow \text{mínimo} \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= a_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= a_m \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ &\dots \\ x_n &\geq 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones describen un subespacio del espacio  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$  y se busca un mínimo de la función  $f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$  en el cuadrante positivo del espacio  $\mathbb{R}^n$ .

Para solucionar las tareas de este tipo se usa el método de simplex. El algoritmo de este método es conocido desde 1947 (ver [4]). Hay muchos manuales sobre el método de simplex y también herramientas en los sistemas de software con capacidad de cálculo simbólico, por ejemplo MATHEMATICA o MAPLE.

## 4.2 Ajuste de líneas rectas

Para el ajuste de una línea recta a un conjunto de puntos usamos la ecuación

$$a_1x + a_2y + a_3 = 0$$

así que debemos solucionar el problema de optimización

$$S(a_1, a_2, a_3) = \sum_{i=1}^n |a_1x_i + a_2y_i + a_3| \rightarrow \text{mínimo} \quad (31)$$

Es claro que la solución trivial  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$  no es correcta. Necesitamos una restricción adicional lineal como  $a_3 = 1$ . Pero entonces no podemos describir líneas rectas que pasan el origen. También la restricción  $a_1 + a_2 = 1$  no es suficiente porque entonces no podemos escribir líneas como las descritas por la ecuación  $y = x + a_3$ .

Por eso solucionamos el problema (31) primero con la restricción  $a_1 + a_2 = 1$  y obtenemos el valor mínimo  $S_+$  para los parámetros  $(a_1^+, a_2^+, a_3^+)$ . Después calculamos la solución con la restricción  $a_1 - a_2 = 1$  y obtenemos el valor mínimo  $S_-$  para los parámetros  $(a_1^-, a_2^-, a_3^-)$ . Finalmente elegimos los parámetros que logran el valor más pequeño, es decir,  $S_{\min} = \min(S_+, S_-)$ . Por supuesto tenemos que escribir los parámetros  $a_i$  siempre en la forma  $a_i = a_i' - a_i''$  con  $a_i', a_i'' \geq 0$ .

En la figura 3 mostramos un ejemplo. El método del ajuste a partir de las distancias absolutas (*least absolute distance method*, LAD) es muy estable con respecto a puntos fugitivos (*outliers*). El método de mínimos cuadrados (*least square method*, LSM) no logra soluciones estables cuando hay puntos de perturbación.

Esta diferencia entre de los dos métodos LAD y LSM es típica para la optimización con respecto a la norma  $L_1$  con distancias absolutas y la norma

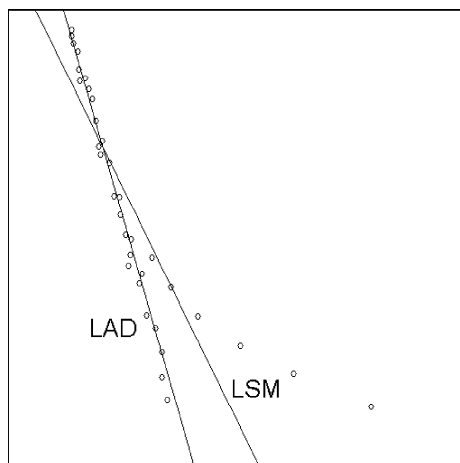


Figura 3: Ajuste de una línea por los métodos LAD y LSM

$L_2$  con distancias cuadradas (ver figura 2):

$$L_1 = \sum_{i=1}^n |f_i| \quad , \quad L_2 = \sum_{i=1}^n |f_i|^2 = \sum_{i=1}^n (f_i)^2$$

Hay métodos adaptables para eliminar las influencias de los puntos fugitivos también en el caso de  $L_2$  (ver por ejemplo [18] o [21]). Pero estos métodos son - al contrario del método simple LSM - más complicados y por tanto es recomendable usar el método LAD.

### 4.3 Ajuste de círculos

Para el ajuste de un círculo a un conjunto de puntos usamos la ecuación

$$a_1 (x^2 + y^2) + a_2x + a_3y + a_4 = 0$$

así que debemos solucionar el problema de la optimización

$$S(a_1, a_2, a_3, a_4) = \sum_{i=1}^n |a_1 (x_i^2 + y_i^2) + a_2x_i + a_3y_i + a_4| \rightarrow \text{mínimo} \quad (32)$$

Claro que la solución trivial  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$  no es correcta. Necesitamos de nuevo una restricción lineal adicional, en este caso como  $a_1 = 1$  (si  $a_1 = 0$ , entonces (32) no describe un círculo). Por supuesto tenemos que

escribir los parámetros  $a_i$  siempre en la forma  $a_i = a'_i - a''_i$  con  $a'_i, a''_i \geq 0$ . La figura 4 muestra la calidad y la estabilidad del método LAD comparado con el método LSM.

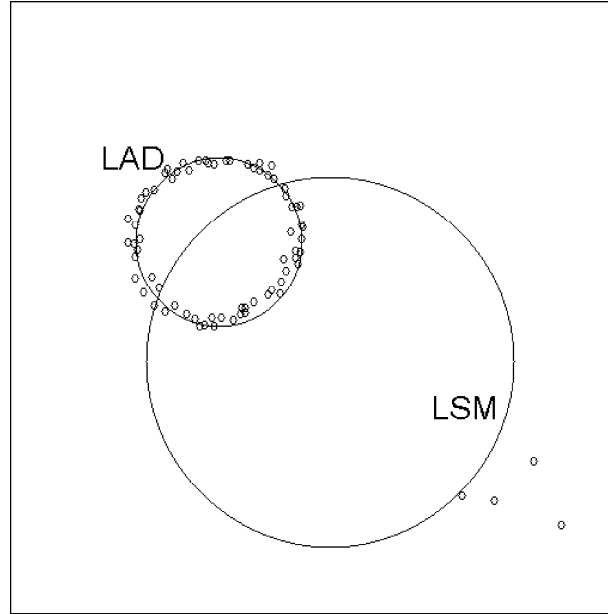


Figura 4: Ajuste de un círculo por los métodos LAD y LSM

Por último, en este párrafo queremos escribir de nuevo las ecuaciones de la minimización (ver las fórmulas (29) y (30)). Las ecuaciones son las siguientes

$$(a'_1 - a''_1)(x_i^2 + y_i^2) + (a'_2 - a''_2)x_i + (a'_3 - a''_3)y_i + a'_4 - a''_4 + d'_i - d''_i = 0$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$  y

$$a'_1 + a''_1 + a'_2 + a''_2 + a'_3 + a''_3 + a'_4 + a''_4 + \sum_{i=1}^n (d'_i + d''_i) = s$$

Esta ecuación adicional con un valor  $s \geq 0$  bastante grande es necesaria para garantizar que la región de búsqueda es un dominio acotado. Entonces la tarea de la minimización es

$$\sum_{i=1}^n (d'_i + d''_i) \rightarrow \text{mínimo}$$

#### 4.4 Ajuste de elipses

Para el ajuste de una elipse (como un tipo de una curva del grado 2) usamos la ecuación general

$$a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6 = 0$$

así que debemos solucionar el problema de la optimización

$$S(a_1, \dots, a_6) = \sum_{i=1}^n |a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6| \rightarrow \text{mínimo} \quad (33)$$

Es claro que la solución trivial  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$  no es correcta. Necesitamos de nuevo una restricción lineal, en este caso  $a_1 + a_3 = 1$ . Cuando hemos calculado los parámetros  $a_i$ , entonces debemos probar si los parámetros describen una elipse u otra curva de grado 2, como por ejemplo una hipérbola. En el caso de una elipse, los parámetros deben cumplir la relación  $a_1a_3 - a_2^2 > 0$ .

La figura 5 muestra la calidad y la estabilidad del método LAD comparado con el método LSM. Solo tres puntos fugitivos causan que la elipse determinada por el método LSM no sea correcta. Aún con muchos puntos situados en una región muy cercana a la elipse no podemos evitar que los parámetros determinados por el método LSM sean erróneos.

Los tiempos para realizar el ajuste de líneas, círculos o elipses a partir de la optimización lineal LAD son 0.01 segundos para  $n = 100$  puntos, 0.04 segundos para  $n = 200$  puntos y 0.09 segundos para  $n = 300$  puntos usando un procesador Pentium a 500 Mhz. Si empleamos el método LSM, entonces los tiempos se reducen por un factor de 20.

## 5 Acumulación en espacios de parámetros

### 5.1 Hough, Radon y acumulación

Hemos visto en sección 4 cómo funciona el método de la optimización lineal para el ajuste y que este método da buenos resultados. Pero en la práctica algunas veces aparecen problemas como los mostrados en la figura 6. En estos casos tampoco la optimización lineal puede lograr líneas rectas.

La solución de tareas de este tipo se puede realizar a partir de la transformación de Radon o de la transformación de Hough. La transformación de Radon fue introducida en matemáticas en 1917 ([15], ver también [2, 6]). Se



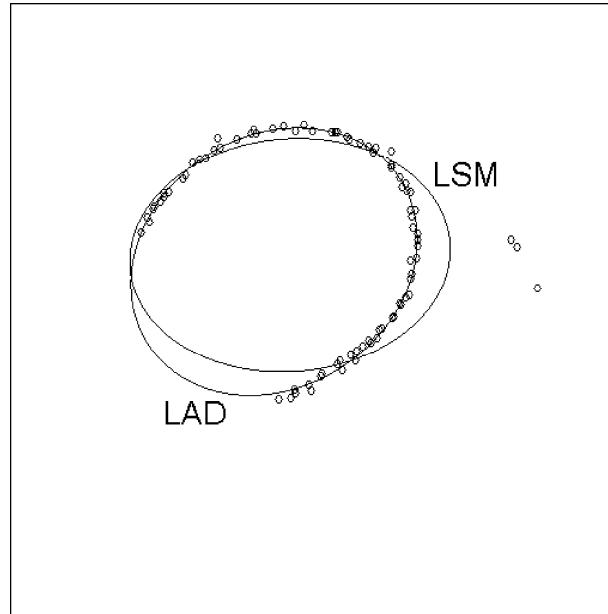


Figura 5: Ajuste de una elipse a un conjunto de puntos por el métodos LAD y LSM

integran o suman valores de una función bidimensional  $f(x, y)$  a lo largo de una línea recta que es desrita por la forma normal:

$$R_f(p, \varphi) = \iint_{x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi = p} f(x, y) dx dy$$

Es claro que en las imágenes de la figura 6 para las líneas "correctas" esta integral tiene un valor mayor que para otras líneas, donde las integrales proporcionan valores menores. Si interpretamos estos valores como valores de gris de una imagen (el eje de la abscisa describe los ángulos  $0 < \varphi < 180^\circ$ , y el eje de las ordenadas describe las distancias  $-s < p < s$  con  $s$  como el tamaño de la imagen original), entonces obtenemos las imágenes de de la figura 7 (la distancia  $p$  se refiere a el centro de las imágenes). Las líneas correctas impresionan por los picos marcados en las funciones de valores de gris de las imágenes de Radon. Si hemos determinado más o menos precisamente los lugares  $(p, \varphi)$  de estos picos, entonces podemos seleccionar todos los puntos  $(x, y)$  de las imágenes de la figura 6 con una distancia

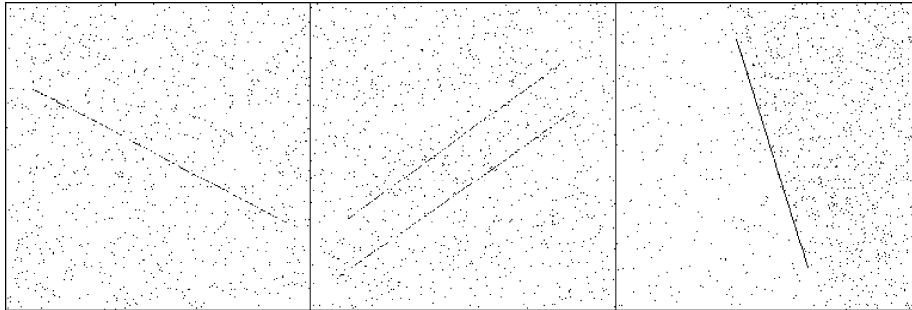


Figura 6: Imágenes de líneas rectas con muchos puntos de perturbación



Figura 7: Imágenes de Radon de las imágenes originales (fig. 6)

pequeña

$$d = |x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi - p|$$

a la línea provisional (quiza con pesos inversamente proporcionales a las distancias). Al final obtenemos, por el método de mínimos cuadrados o por la optimización lineal, las líneas rectas precisas.

Por desgracia no tenemos transformaciones del tipo Radon para otras figuras como círculos o elipses. Pero en 1962 Hough describió un enfoque por el que se puede extender la transformación de Radon a otras figuras ([9]). Hough interpretó la ecuación  $x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi = p$  como una ecuación con parámetros  $(x, y)$  y variables  $(p, \varphi)$  en lugar de una ecuación con parámetros  $(p, \varphi)$  y variables  $(x, y)$ . Todas las parejas  $(p, \varphi)$  que cumplen la ecuación  $x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi = p$  para coordenadas dadas  $x$  y  $y$  describen líneas rectas que pasan por el punto  $(x, y)$ . Estas parejas  $(p, \varphi)$  describen en el espacio

bidimensional de las variables  $p$  y  $\varphi$  una curva  $p = x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi$  (una curva de tipo seno o coseno). Ahora se acumulan todas estas curvas en el espacio de las variables  $p$  y  $\varphi$  (el "espacio de acumulación" o "espacio de Hough"). El resultado es mostrado en figura 8.

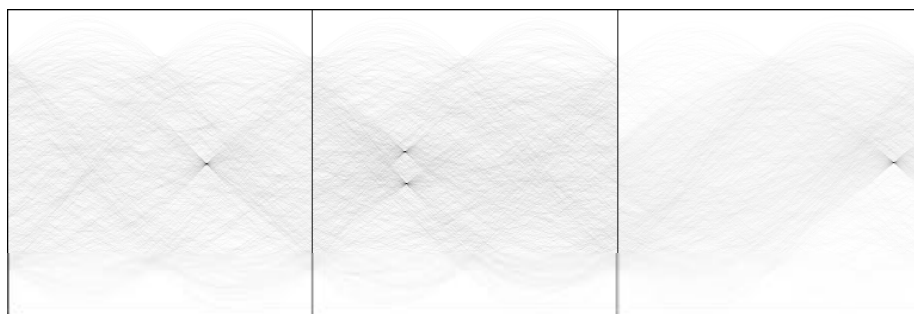


Figura 8: Imágenes de Hough de las imágenes originales (fig. 6)

Hay muchas instancias en que la transformación de Hough es extendible a otras figuras como círculos o elipses. Por ejemplo la ecuación de un círculo es  $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$  con  $(c, d)$  como el centro del círculo y  $r$  como el radio. Si  $x$  y  $y$  son los parámetros y  $(c, d, r)$  las variables, entonces esta ecuación describe un cono doble en el espacio tridimensional de las variables  $(c, d, r)$ . Usando el método de Hough se deben acumular todos estos conos para cada pareja de parámetros  $(x, y)$  y la acumulación resulta en una función tridimensional. El pico marcado  $(c_p, d_p, r_p)$  de esta función indica más o menos precisamente el círculo que pasa aproximadamente por los puntos  $(x, y)$  del plano euclideo.

La idea de la extensión del método de Hough a más de dos dimensiones es buena. Pero no conocemos trabajos donde esta idea sea explotada sin una proyección de la tarea a un espacio bidimensional (por ejemplo en una búsqueda de círculos con un radio  $r$  fijo donde tenemos efectivamente solo dos variables  $c$  y  $d$ , ver también [5]).

Aquí queremos presentar un método nuevo que se puede generalizar a muchas otras tareas.

Sean dados dos puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ . Entonces podemos determinar muy simplemente los parámetros  $p$  y  $\varphi$  de la línea que pasa por estos puntos:

$$\varphi = -\arctan \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}, \quad p = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$$

Si tenemos  $n$  puntos sobre una línea  $L$ , entonces obtenemos este (correcto) resultado  $N_c = n(n-1)/2$  veces. Si existen  $m$  puntos más que son distribuidos arbitrariamente en el plano euclideo, entonces obtenemos

$$N_o = \frac{(m+n)(m+n-1) - n(n-1)}{2} = \frac{m(m+2n-1)}{2}$$

otros resultados  $(p', \varphi')$  que no están relacionados con nuestra línea  $L$ . Los  $N_o$  resultados están distribuidos sobre el todo espacio bidimensional  $(p, \varphi)$ . Pero los  $N_c$  resultados correctos están concentrados en un pico semejante a los picos en los espacios de Radon o de Hough (ver figura 9). Los picos son más marcados que los picos en las imágenes de Radon o en las imágenes de Hough.

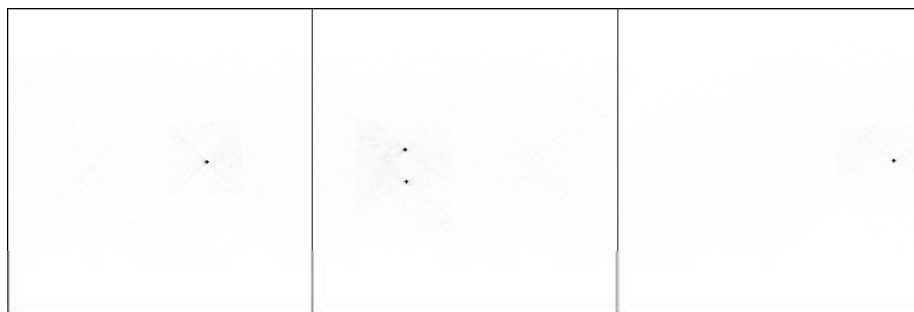


Figura 9: Imágenes de acumulación de las imágenes originales (fig. 6)

En la figura 10 acumulamos los resultados  $(p, \varphi)$  en células del tamaño  $s^2$  (en lugar de las  $256^2 = 65536$  células del tamaño  $1^2$  en la imagen media de la figura 9). A pesar de que la precisión de los picos es menor que en el caso de  $s = 1$ , podemos localizar los picos y por tanto también podemos determinar los valores  $(p_1, \varphi_1)$  y  $(p_2, \varphi_2)$  para las dos líneas en la imagen media de la figura 6.

Un beneficio del enfoque con  $s > 1$  es que necesitamos una acumulación de solo 7281 o 1820 o 455 o 113 células. Pero la ventaja más grande del método de acumulación es que es generalizable a muchos otros problemas.

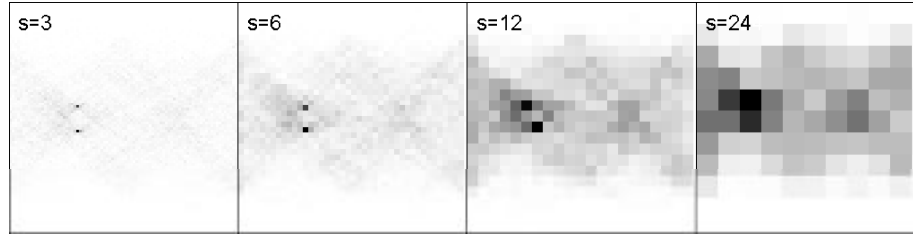


Figura 10: Acumulación de los resultados  $(p, \varphi)$  en células del tamaño  $s^2$

## 5.2 Acumulación para círculos y elipses

En el caso de la detección de círculos tenemos que solucionar tres ecuaciones porque tres puntos no colineales determinan unívocamente un círculo:

$$\begin{aligned} (x_1 - c)^2 + (y_1 - d)^2 &= r^2 \\ (x_2 - c)^2 + (y_2 - d)^2 &= r^2 \\ (x_3 - c)^2 + (y_3 - d)^2 &= r^2 \end{aligned} \quad (34)$$

Obtenemos dos ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2c(x_3 - x_1) + 2d(y_3 - y_1) &= x_3^2 + y_3^2 - x_1^2 - y_1^2 \\ 2c(x_3 - x_2) + 2d(y_3 - y_2) &= x_3^2 + y_3^2 - x_2^2 - y_2^2 \end{aligned}$$

para las incógnitas  $c$  y  $d$ . Estas ecuaciones proporcionan las soluciones

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2} \frac{(y_2 - y_3)(x_3^2 + y_3^2 - x_1^2 - y_1^2) - (y_1 - y_3)(x_3^2 + y_3^2 - x_2^2 - y_2^2)}{(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)} \\ d &= \frac{1}{2} \frac{(x_1 - x_3)(x_3^2 + y_3^2 - x_2^2 - y_2^2) - (x_2 - x_3)(x_3^2 + y_3^2 - x_1^2 - y_1^2)}{(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)} \end{aligned}$$

El radio  $r$  se puede calcular a partir de una de las ecuaciones (34).

Es claro que debe realizarse la acumulación en un espacio tridimensional de los parámetros  $(c, d, r)$  y por eso no es posible mostrar este espacio en una ilustración. Pero podemos proyectar el espacio  $(c, d, r)$  a los tres planos  $(c, d)$ ,  $(d, r)$  y  $(r, c)$ . Un ejemplo: Si calculamos los parámetros  $c$ ,  $d$  y  $r$  para todas las tripletas de puntos  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  de la imagen arriba a la izquierda de la figura 11, entonces obtenemos los planos de acumulación mostrados en figura 11. Los picos son bastante marcados. Pero debemos tener en cuenta que los planos son afectados por la proyección, es decir, la proyección del espacio amplifica los parámetros incorrectos. Al contrario de

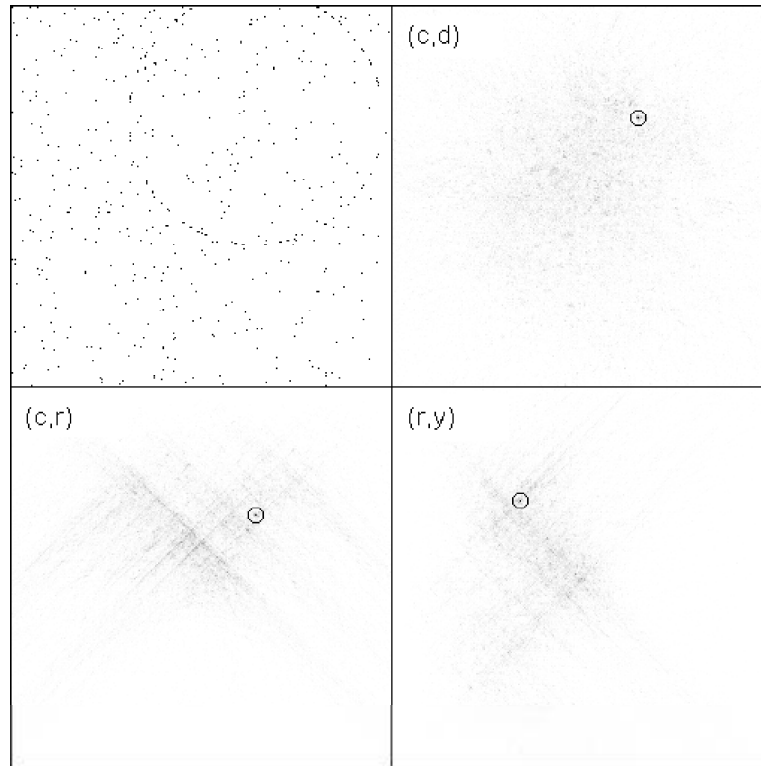


Figura 11: Tres planos de acumulación para la determinación de un círculo

esto, las células de acumulación en el espacio tridimensional se ocupan más escasamente. Solo la célula del pico acumula muchas soluciones  $(c, d, r)$ .

Por tanto, es mejor si acumulamos los parámetros en el espacio tridimensional  $(c, d, r)$ . En la figura 12 puntos circulares y puntos de perturbación forman las imágenes originales. Por el método de la acumulación determinamos los parámetros del círculo y mostramos los resultados en las imágenes derechas. Los valores *ratio* describen la proporción entre la altura del primer pico en el espacio de la acumulación y la altura del segundo pico (si esta proporción es más grande de 2, entonces la probabilidad de que el primer pico  $(c_{\max}, d_{\max}, r_{\max})$  describa el círculo es alta). El tiempo necesario para las acumulaciones están entre 0.1 y 0.5 segundos con un procesador Athlon a 900 MHz.

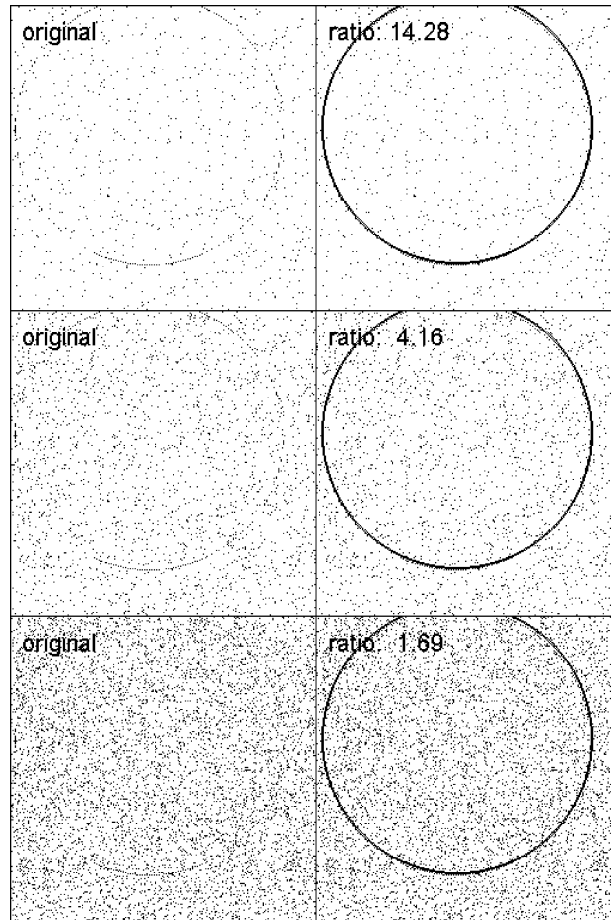


Figura 12: Ajuste de un círculo con conjuntos diferentes de puntos de perturbación

Una elipse se determina por cinco parámetros  $(c, d, a, b, \varphi)$ , es decir por su centro  $(c, d)$ , sus ejes  $a, b$  y por el ángulo  $\varphi$  del eje mayor contra el eje  $x$ . Por tanto necesitamos cinco puntos  $p_i = (x_i, y_i)$  que cumplan con la ecuación de una función del grado dos (ver por ejemplo [21], capítulo 7):

$$Ax_i^2 + By_i^2 + Cx_i + Dy_i + Ex_iy_i = 1 \quad , \quad i = 1 \dots 5$$

De estas cinco ecuaciones lineales para las incógnitas  $A, B, C, D, E$  podemos determinar las incógnitas con ayuda del álgebra lineal. Después determi-

namos los parámetros geométricos  $(c, d, a, b, \varphi)$ :

$$c = \frac{ED/4 - BC/2}{AB - E^2/4} \quad , \quad d = \frac{EC/4 - AD/2}{AB - E^2/4}$$

Con las variables auxiliares

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left( A + B + \sqrt{(A - B)^2 + E^2} \right) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left( A + B - \sqrt{(A - B)^2 + E^2} \right) \end{aligned}$$

y

$$h = 1 - Ac^2 - Bd^2 - Cc - Dd - Ecd$$

obtenemos con  $\lambda_1 < \lambda_2$  los ejes

$$a = 2\sqrt{\frac{h}{\lambda_1}} \quad , \quad b = 2\sqrt{\frac{h}{\lambda_2}}$$

Al final determinamos el ángulo  $\varphi$  por la ecuación

$$\varphi = \arctan \frac{B - A + \sqrt{(A - B)^2 + E^2}}{E}$$

Por supuesto no se puede garantizar que con los parámetros  $A, B, C, D, E$  se haya encontrado una elipse. En caso de una elipse, los valores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  deben ser positivos (de otra manera se ha obtenido una hipérbola o una parábola). Si los parámetros  $A, B, C, D, E$  describen una elipse, entonces acumulamos estos parámetros  $A, B, C, D, E$  en un espacio 5-dimensional (o los parámetros geométricos  $c, d, a, b, \varphi$  en otro espacio). La proyección a espacios bidimensionales logra en muchos casos la detección de un pico (ver figura 13).

### 5.3 Detección de traslaciones y movimientos rígidos

También para tareas de la detección de una transformación podemos usar el método de acumulación. Consideremos la transformación afín unidimensional  $x' = ax + b$ . Sean dadas las listas  $L_1$  y  $L_2$  de puntos. Las listas contienen puntos correspondientes y puntos de perturbación.

Si tenemos dos parejas  $(x_1, x'_1)$  y  $(x_2, x'_2)$  de puntos correspondientes, entonces las dos ecuaciones

$$x'_1 = a \cdot x_1 + b \quad \text{y} \quad x'_2 = a \cdot x_2 + b$$



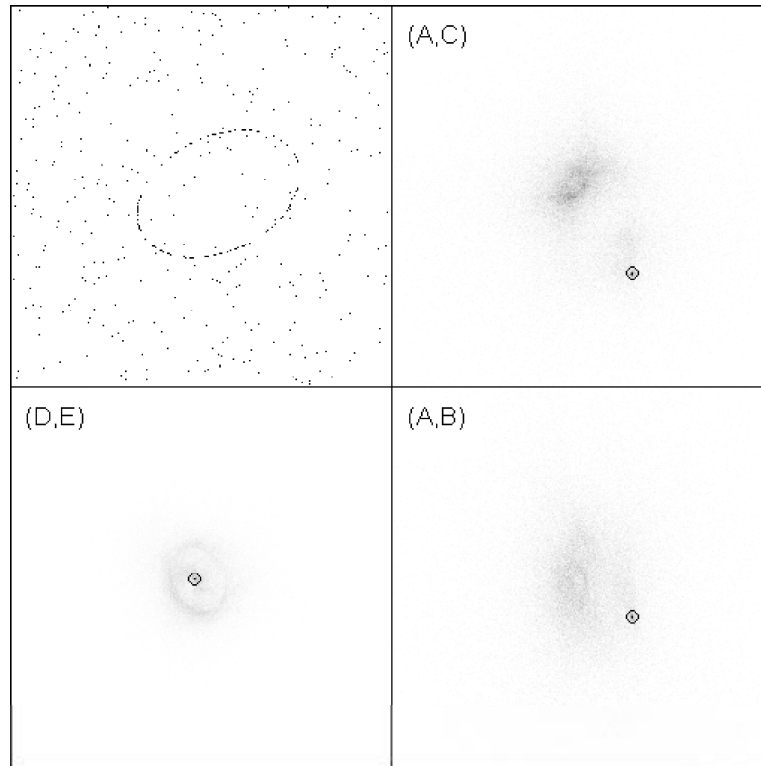


Figura 13: Planos de acumulación para la detección de una elipse

logran las soluciones

$$a = \frac{x'_1 - x'_2}{x_1 - x_2} \quad , \quad b = x'_1 - a \cdot x_1 = x'_2 - a \cdot x_2$$

Pero no sabemos cuales de los puntos son puntos correspondientes. Por eso calculamos todos los valores  $(a, b)$  para todas las parejas  $((x_1, x'_1), (x_2, x'_2))$  y acumulamos estos valores  $(a, b)$  en un espacio bidimensional (ver figura 14). En este ejemplo los valores buscados son  $a = 1.15$  y  $b = 13.81$ . El pico en el plano de las coordenadas  $a$  (la abscisa en la figura 14 izquierda) y  $b$  está bastante marcado (ver la parte derecha de la figura 14) e indica los parámetros resultantes  $(ar, br) = (1.14, 13.60)$ . En este ejemplo, la lista  $L_1$  tenía  $n = 25$  puntos con puntos correspondientes en la lista  $L_2$  (pero en otro orden) y ambas listas tenían  $p = 20$  puntos arbitrarios sin correspondencias.

Por supuesto hay otras posibilidades para solucionar este problema de transformación afín unidimensional. Sin embargo hay tareas más compli-

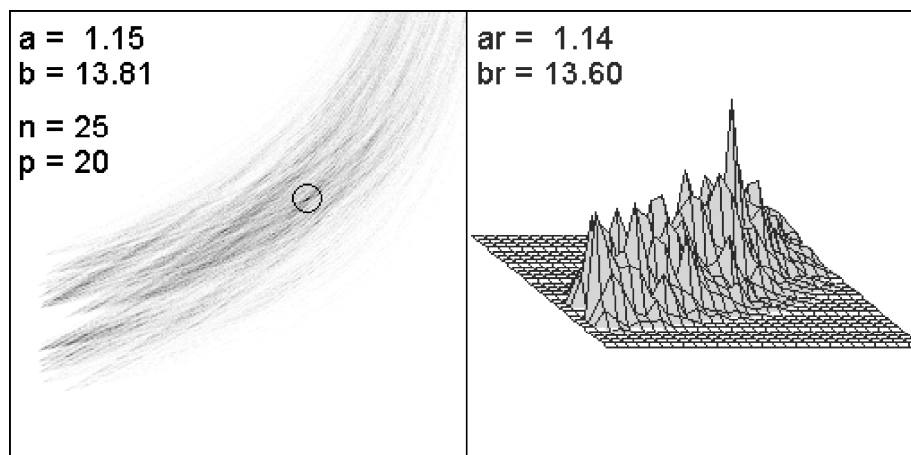


Figura 14: Determinación de una transformación afín unidimensional por acumulación

cadadas. Sean dadas por ejemplo dos listas  $L_1 = ((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_r, y_r))$  y  $L_2 = ((x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), \dots, (x'_s, y'_s))$  de puntos en el plano euclidiano. Las listas contienen parejas  $((x, y), (x', y'))$  donde las coordenadas son relacionadas por

$$x' = x + a \quad \text{y} \quad y' = y + b$$

así que buscamos una translación descrita por los parámetros  $(a, b)$ . Para parejas de puntos correspondientes  $((x, y), (x', y'))$  calculamos

$$a = x' - x \quad \text{y} \quad b = y' - y$$

Si no conocemos las correspondencias y si hay puntos de perturbación, entonces calculamos todos los valores  $(a, b)$  y acumulamos estos valores en un espacio de acumulación. En la figura 15, la tarea consiste en la determinación de los parámetros de la traslación y en la detección de los puntos correspondientes. Los parámetros de la traslación son  $a = 19.36$  y  $b = 18.62$ . Hay sólo 8 parejas de puntos correspondientes y 40 puntos de perturbación en cada una de las listas. ¿Cómo podemos detectar los puntos correspondientes?

La solución de la tarea se muestra en la figura 16. El pico de la acumulación de todas las soluciones

$$(a_{ij}, b_{ij}) = (x'_i - x_j, y'_i - y_j) \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots, 48$$

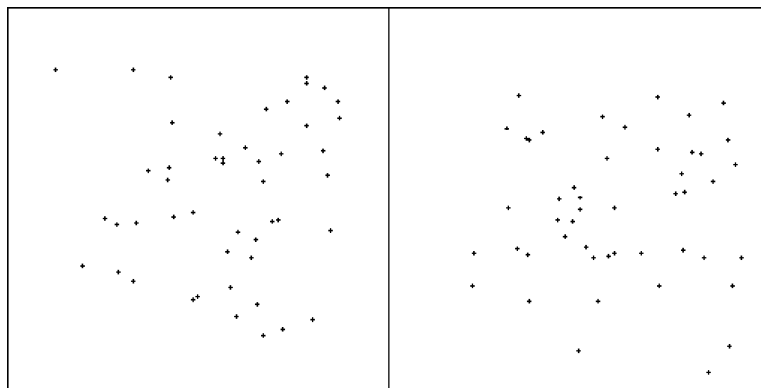


Figura 15: Dos conjuntos de puntos, cada uno con 8 puntos correspondientes y 40 puntos de perturbación

está muy marcado. La posición del pico describe los parámetros de la traslación y a partir de estos parámetros podemos superponer los puntos de la lista  $L_1$  (mostrados por el símbolo  $\bullet$ ) y los puntos desplazados de la lista  $L_2$  (mostrados por el símbolo  $\circ$ , arriba a la derecha de la figura 16). Ahora la detección de los puntos correspondientes es una tarea simple y el resultado mostrado en las dos imágenes inferiores de la figura 16 comprueba la eficacia del método de acumulación.

Para movimientos (traslación y rotación) las ecuaciones adecuadas son las siguientes:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi + c \\y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi + d\end{aligned}$$

Dado que tenemos 3 parámetros, necesitamos 3 ecuaciones para la determinación de estos parámetros. Como en el caso de la determinación de una traslación, se pueden determinar  $k$  parámetros a partir de  $k$  ecuaciones entre las nuevas coordenadas  $x', y'$  y las coordenadas viejas  $x, y$ , es decir, debemos usar por lo menos  $k/2$  puntos para la investigación de un movimiento.

En lugar de esto trabajamos con un número entero de puntos, en este caso con  $k = 2$  puntos. Entonces tenemos  $2k = 4$  ecuaciones para 4 parámetros de una transformación homotética (*similarity transformation*). Las ecuaciones

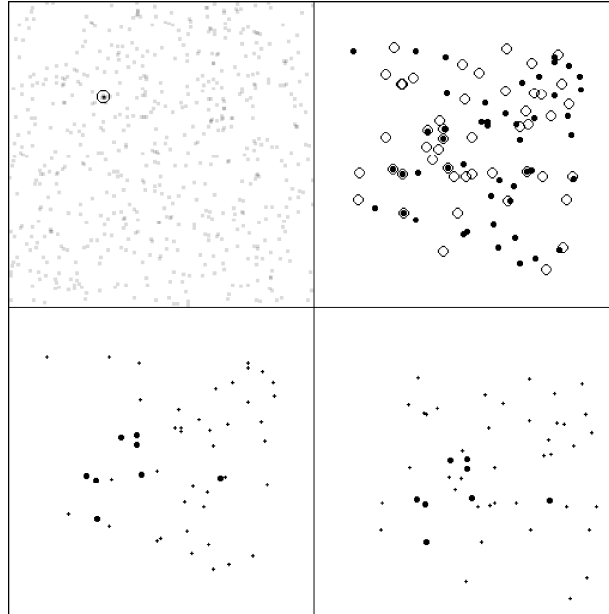


Figura 16: Pico de la acumulación (arriba a la izquierda), detección de la translación (arriba a la derecha) y puntos correspondientes detectados (abajo) en las dos listas de figura 15

son

$$\begin{aligned}x'_1 &= a \cdot x_1 \cos \varphi - a \cdot y_1 \sin \varphi + c \\y'_1 &= a \cdot x_1 \sin \varphi + a \cdot y_1 \cos \varphi + d \\x'_2 &= a \cdot x_2 \cos \varphi - a \cdot y_2 \sin \varphi + c \\y'_2 &= a \cdot x_2 \sin \varphi + a \cdot y_2 \cos \varphi + d\end{aligned}$$

El ángulo  $\varphi$  describe la rotación y el parámetro  $a$  determina la amplificación o la disminución de las distancias entre los puntos.

Se pueden eliminar los parámetros  $c, d$  por sustracción:

$$\begin{aligned}x'_1 - x'_2 &= a \cdot (x_1 - x_2) \cos \varphi - a \cdot (y_1 - y_2) \sin \varphi \\y'_1 - y'_2 &= a \cdot (x_1 - x_2) \sin \varphi + a \cdot (y_1 - y_2) \cos \varphi\end{aligned}$$

Obtenemos

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad , \quad l' = \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2} \quad , \quad a = \frac{l'}{l}$$

y el ángulo  $\varphi$  lo determinamos a partir de las ecuaciones

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)(y'_1 - y'_2) - (y_1 - y_2)(x'_1 - x'_2) &= ll' \sin \varphi \\ (x_1 - x_2)(x'_1 - x'_2) + (y_1 - y_2)(y'_1 - y'_2) &= ll' \cos \varphi\end{aligned}$$

Si conocemos los parámetros  $a$  y  $\varphi$ , entonces podemos determinar la traslación, es decir, los parámetros  $c$  y  $d$ :

$$\begin{aligned}c &= x'_1 - (a \cdot x_1 \cos \varphi - a \cdot y_1 \sin \varphi) \\ d &= y'_1 - (a \cdot x_1 \sin \varphi + a \cdot y_1 \cos \varphi)\end{aligned}$$

En la figura 17, la acumulación de los parejas  $(a, \varphi)$  se muestra en la parte de abajo a la izquierda y la acumulación de los parejas  $(c, d)$  se muestra en la parte de abajo a la derecha. Vemos que el resultado de la transformación (arriba a la derecha) es bueno pese a que los errores de las coordenadas de los puntos son del orden de  $\pm 1$  píxeles.

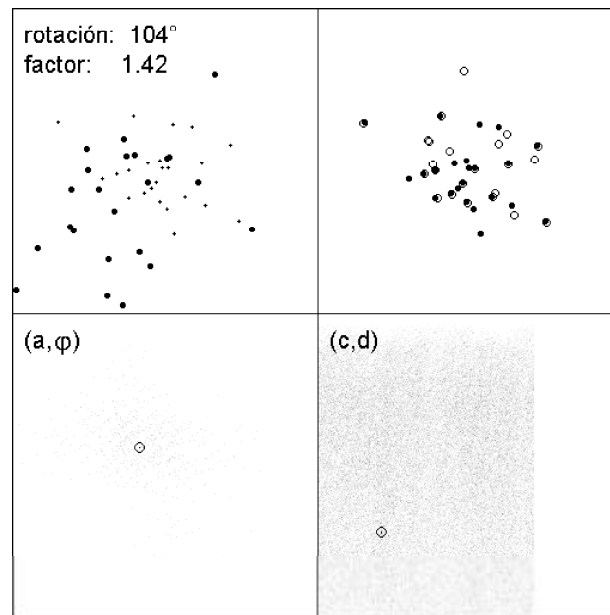


Figura 17: Acumulación en el plano  $(a, \varphi)$  y en el plano  $(c, d)$  para la determinación de una transformación homotética

## 5.4 Transformaciones afines

Una transformación afín está determinada por 6 parámetros y por tanto necesitamos tres puntos correspondientes para una determinación única de estos parámetros (ver las fórmulas (15) y (16)). La determinación de los parámetros es más simple que en el caso de las transformaciones homotéticas porque las ecuaciones para las nuevas coordenadas  $x'$  y  $y'$  no están acopladas.

Obtenemos las ecuaciones matriciales

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x'_2 - x'_1 \\ x'_3 - x'_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y'_2 - y'_1 \\ y'_3 - y'_1 \end{pmatrix}$$

para la determinación de los parámetros de la transformación homogénea y las siguientes ecuaciones para la determinación de los parámetros  $a_{10}$  y  $a_{20}$ :

$$\begin{aligned} a_{10} &= x'_1 - a_{11}x_1 - a_{12}y_1 \\ a_{20} &= y'_1 - a_{21}x_1 - a_{22}y_1 \end{aligned}$$

Se pueden acumular los parámetros  $a_{ik}$  en un espacio 6-dimensional o en tres planos de acumulación. También la acumulación de los parámetros de la descomposición  $\mathbf{B} = \mathbf{RSDT}$  (ver fórmula (5)) es posible. Finalmente hay una descomposición de una transformación afín  $\mathbf{B}$  en factores que describen las influencias de las transformaciones básicas:

$$\mathbf{B} = \mathbf{HST} = \begin{pmatrix} a \cos \varphi & -a \sin \varphi & 0 \\ a \sin \varphi & a \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & s \cdot t & 0 \\ 0 & 1/s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La transformación  $\mathbf{T}$  describe una traslación (si los parámetros  $c$  y  $d$  son ceros, entonces no hay traslación). La transformación  $\mathbf{S}$  describe una transformación afín "pura", es decir, los parámetros  $s$  y  $t$  describen el estiramiento y el escalamiento anisotrópico que determinan una transformación afín que conserva las áreas, porque el determinante de  $\mathbf{S}$  es 1 (si el parámetro  $s$  es 1 y el parámetro  $t$  es 0, entonces no hay deformaciones afines). La tercera matriz  $\mathbf{H}$  describe una transformación homotética como una rotación y un escalamiento isotrópico.

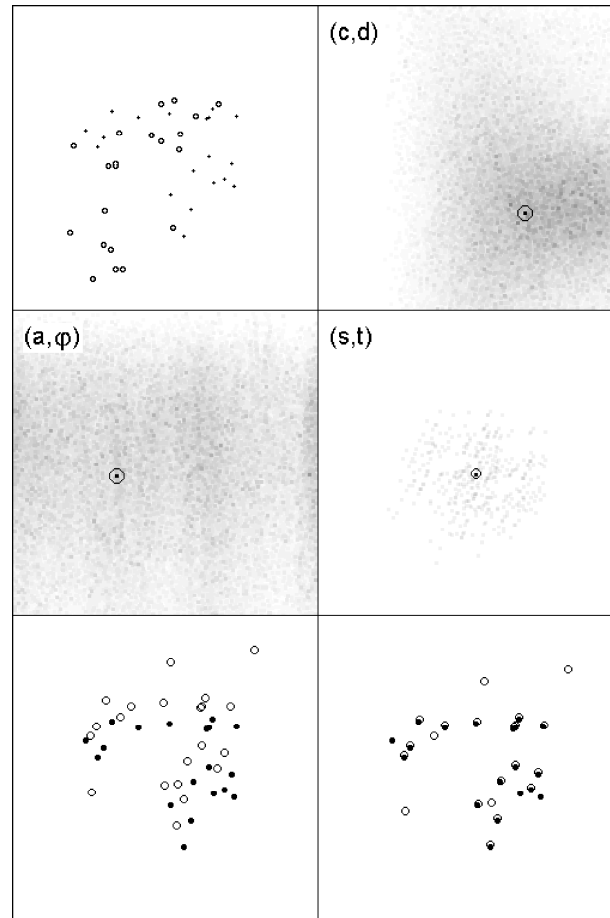


Figura 18: Acumulación de los parámetros de una transformación afín en los planos  $(c, d)$ ,  $(a, \varphi)$  y  $(s, t)$

Los parámetros de esta descomposición describen las transformaciones geoméricamente:

$$\begin{array}{ll}
 c = 0, & d = 0 \quad \text{no hay traslación} \\
 s = 1, & t = 0 \quad \text{no hay efectos afines} \\
 a = 1 & \quad \text{no hay cambio de tamaño} \\
 \varphi = 0 & \quad \text{no hay rotación}
 \end{array}$$

Pequeños valores de  $c$  y  $d$  describen pequeñas traslaciones, un pequeño valor  $t$  describe un estiramiento débil, un pequeño valor  $\varphi$  describe una rotación por un ángulo pequeño. Si la desviación del parámetro  $s$  de 1 es

pequeño, entonces el efecto del escalamiento anisotrópico es apenas observable y una desviación pequeña del parámetro  $a$  de 1 indica solamente un cambio pequeño del tamaño geométrico del conjunto de los puntos.

En la práctica sabemos que muchas veces las condiciones  $(t, \varphi) \approx (0, 0)$  y  $(a, s) \approx (1, 1)$  se satisfacen. Entonces sabemos que el pico de la acumulación está cerca del punto  $(a^*, s^*, t^*, \varphi^*) = (1, 1, 0, 0)$ .

En la figura 18 se muestran las acumulaciones en los planos  $(c, d)$ ,  $(\varphi, a)$  y  $(s, t)$ . Las imágenes parciales de abajo muestran que la transformación afín se determina bien también en el caso que hay puntos de perturbación (imagen abajo a la derecha sin translación).

## Agradecimientos

Los autores agradecen a Dr. José Luis Márroquin de CIMAT por la revisión y corrección de este trabajo, por su apoyo durante la estancia de Dr. Voss en Guanajuato, por su ayuda para preparar el manuscrito como un reporte técnico y por su ayuda con respecto a la redacción en el idioma español.



## Referencias

- [1] S.Abraham, K.Voss, H.Suesse: Affines Matching planarer Punktmen-  
gen mittels Normalisierung über diskrete Momente. Proc. 18. DAGM-  
Symposium, Heidelberg 1996, Springer-Verlag 1996, S. 315-322
- [2] B.Anger, C.Portenier: Radon Integrals. Birkhäuser, Boston MA 1992
- [3] G.S.Cox, G.DeJager: A survey of point pattern matching techniques  
and a new approach to point pattern recognition. Proc. of South African  
Symposium on Communications and Signal Processing 1993, pp. 243-  
248
- [4] G.B.Dantzig: Computational algorithm of the revised simplex method.  
RAND Report, Santa Monica, Calif. 1953
- [5] E.R.Davies: Machine Vision. Academic Press 1990, chapter 9
- [6] S.R.Deans: The Radon Transform and Some of Its Applications. Wiley,  
NewYork 1983
- [7] M. Ben-Ezra, S. Peleg, M. Werman: Real-time motion analysis with  
linear programming. CVIU 78 (1999) 32-52
- [8] J.Hong, X.Tan: A new approach to point pattern matching. Proc. of 9th  
International Conference on Pattern Recognition 1988, Vol.1, pp.82.84
- [9] P.V.C.Hough: Methods and means for recognizing complex patterns.  
US Patent 3069654 (1962)
- [10] M.K.Hu: Visual pattern recognition by moment invariants. IT 8 (1962)  
179-187
- [11] H. Karloff: Linear Programming. Birkhäuser Verlag, Basel 1991.
- [12] A.A.Korbut, J.J.Finkelstein: Diskrete Optimierung. Akademie-Verlag,  
Berlin 1971, S.60
- [13] L.Lovasz, M.Plummer: Matching Theory. North-Holland Publishing  
Co., Amsterdam / New York 1986.

- [14] A.S.Manne: On the job-shop scheduling problem. *Operations Research* 8 (1960) 219-233
- [15] J.Radon: Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. *Berichte und Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften, Math./Nat. Klasse* 69 (1917) 262-277
- [16] I.Rothe, K.Voss, H.Suesse, J.Rothe: A general method to determine invariants. Technical Report 503, University of Rochester, April 1994
- [17] K.Udagawa, J.Toriwaki, K.Sugino: Normalization and recognition of two-dimensional patterns with linear distortion by moments. *Electr. Commun. Japan* 47 (1964) 34-46
- [18] K.Voss, H.Suesse: *Adaptive Modelle und Invarianten für zweidimensionale Bilder*. Shaker-Verlag, Aachen 1995.
- [19] K.Voss, H.Suesse: Invariant fitting of planar objects by primitives. *IEEE Trans. PAMI-19* (1997) 80-84
- [20] K.P.W.Wang: *Affin invariant moment method of three-dimensional object identification*. Ph.D.Thesis, Syracuse University 1977
- [21] K.Voss, H.Suesse, J.L.Marroquin, S.Gutierrez: *Fundamentos y nuevos métodos para la reconstrucción tridimensional*. Manual de Internet, [http://www.cimat.mx/proy\\_comp/libror3d/libror3d.html](http://www.cimat.mx/proy_comp/libror3d/libror3d.html), capítulo 6

## Exercicios

### Tarea 2.1

Sean dados dos puntos  $p_1 = (3, 7)$  y  $p_2 = (6, 5)$ . El punto  $p_1$  se transforma en el punto  $p'_1 = (2, 10)$ . ¿Cuáles son los parámetros de la translación? ¿En cuál punto  $p'_2$  se transforma el punto  $p_2$ ? ¿Cuál translación se logra en caso del desplazamiento  $p_1 \rightarrow p'_1$  y  $p_2 \rightarrow p'_2$ ? Dibuja los vectores de las traslaciones  $p_1 \rightarrow p'_1$  y  $p_2 \rightarrow p'_2$ .

### Tarea 2.2

Sean dadas las listas de puntos  $L = ((3.0, 7.1), (2.1, 7.9), (1.1, 5.0), (3.9, 2.1))$  y  $L' = ((5.1, 9.9), (4.0, 11.0), (2.9, 8.1), (6.0, 5.0))$  de los puntos correspondientes. Calcula y dibuja los vectores de las traslaciones  $p_i \rightarrow p'_i$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Determina una "traslación óptima" para la transformación  $L \rightarrow L'$ .

### Tarea 2.3

Describimos un punto  $p = (x, y)$  como número complejo  $z = x + iy = re^{i\varphi}$ . Determina  $r$  y  $\varphi$  como funciones de  $x$  e  $y$ . Describe una translación a partir de números complejos. ¿Cómo se puede formular una rotación? ¿Cómo se puede describir una transformación homotética?

### Tarea 2.4

¿Por cuántos parámetros son determinadas las traslaciones en los espacios  $n$ -dimensionales? ¿Cuántos puntos  $n$ -dimensionales son necesarios para la determinación de una translación? ¿Por cuántos parámetros son determinadas las transformaciones homotéticas en los espacios  $n$ -dimensionales (cada matriz de rotación con  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$  se puede expresar por  $\mathbf{R} = e^{\mathbf{S}}$  con  $\mathbf{S}^T = -\mathbf{S}$ )? ¿Por cuántas correspondencias de puntos son determinadas las transformaciones afines generales en los espacios  $n$ -dimensionales?

### Tarea 2.5

Sean dadas las listas de puntos  $L$  y  $L'$  de la tarea 2.2. Calcula los momentos  $M_{i,k}$  para  $i, k = 0, 1, 2$  y  $i + k \leq 2$ . Determina los centroides  $c$  y  $c'$  de  $L$  y  $L'$  y la translación  $c \rightarrow c'$ . Compara esta translación con la "traslación óptima" de la tarea 2.2.

### Tarea 2.6

Determina a partir de las fórmulas  $H_8 = C'_{3,1}C'_{1,3}$  y  $H_9 = C'_{4,0}C'_{0,4}$  los invariantes de Hu como se muestran en la tabla 1.

**Tarea 2.7**

Escribe un programa para el cálculo de los invariantes de puntos (ver sección 2.4) y checa este programa con ayuda de los valores de la tabla 2.

**Tarea 3.1**

Determina todas las distancias entre los puntos  $p \in L$  y  $p' \in L'$  de la tarea 2.2. ¿Cuál de las 24 permutaciones  $p_i \leftrightarrow p_{k_i}$  da una suma mínima de las distancias y una suma mínima de los cuadrados de las distancias? Compara esta permutación con la "traslación óptima" de la tarea 2.2.

**Tarea 3.2**

Muestra (o busca una demostración en la literatura) de que la desigualdad  $\sum_i a_i^2 \cdot \sum_i b_i^2 \geq (\sum_i a_i b_i)^2$  es correcta para números reales  $a_1, a_2, \dots, a_n$  y los números reales correspondientes  $b_1, b_2, \dots, b_n$ .

**Tarea 3.3**

Determina numéricamente la solución óptima del problema  $\sum D(p, q) \rightarrow \text{mínimo}$  con los conjuntos de puntos  $P$  y  $Q$  de la sección 3.3 y compara con la solución óptima de la sección 3.3.

**Tarea 4.1**

Sea dada la lista  $L = ((5, 4), (10, 11), (13, 13), (18, 23), (20, 21))$  de puntos  $(x, y)$ . Buscamos numéricamente una línea recta descrita por la fórmula  $y = \alpha x$  de tal manera que la suma de las distancias ortogonales absolutas entre los puntos y la línea sea mínima. Dibuja los puntos y la recta. ¿Cuál línea resulta si usamos para la minimización de la suma los cuadrados de las distancias?

**Tarea 5.1**

Calcula para todas parejas de puntos  $(p, q)$  con  $p, q \in L$  y la lista  $L$  de la tarea 4.1 la pendiente  $\alpha$  y el valor  $\beta$  de la recta  $y = \alpha x + \beta$  determinada por los puntos  $p$  y  $q$ . Dibuja estas parejas  $(\alpha, \beta)$  en un espacio de acumulación y busca una línea recta óptima.

## Biografías de los autores

**Klaus Voss** recibió el grado de doctor en física teórica en 1965 en la Universidad Técnica de Dresden (Alemania), y el grado de doctor habilitado (Dr.habil.) en 1969 en la misma universidad. El ha trabajado como profesor asistente en el Depto. de Física y más tarde en el Depto. de Informática de la Universidad Técnica de Dresden. Desde 1971 ha trabajado en el área del procesamiento digital de imágenes, por ejemplo durante muchos años en el Depto. de Patología del Hospital "Charité" de la Universidad "Humboldt" de Berlín. En 1986 el fue empleado como catedrático y jefe de un nuevo grupo "Procesamiento de Imágenes" en la Universidad "Friedrich Schiller" de Jena (Alemania), y tiene hasta la fecha esta posición.

Klaus Voss ha publicado más que 250 artículos científicos y siete libros sobre aspectos teóricos y prácticos del procesamiento de imágenes. Sus principales áreas de interés actual de investigación son la naturaleza discreta de las imágenes digitales, software interactivo para el procesamiento de imágenes y la reconstrucción 3D en la visión robótica. En años recientes ha trabajado en distintas instituciones científicas en México (CINVESTAV México D.F., CIMAT Guanajuato, LANIA Jalapa, CENIDET Cuernavaca).

**Herbert Suesse** recibió el grado de doctor en matemáticas (análisis numérica) en 1973 en la Universidad Técnica de Merseburg (Alemania) y el grado de doctor habilitado (Dr.habil.) en el campo de la optimización matemática en 1981 en la misma universidad. El ha trabajado como profesor asistente en el Depto. de Matemáticas de esta universidad. Desde 1980 hasta 1987 ha trabajado en el Centro de Computación en Gera (Alemania). En 1987 el fue empleado como profesor asistente en el Depto. de Matemáticas y Ciencias Computacionales de la Universidad "Friedrich Schiller" de Jena, y tiene hasta la fecha esta posición. Las intereses principales de Dr. Suesse son la reconstrucción tridimensional, la teoría y la aplicación de los invariantes así como los métodos estadísticos en el campo de procesamiento de imágenes. Herbert Suesse ha publicado más de 50 artículos científicos y tres libros sobre problemas numéricos en la optimización, el procesamiento de imágenes y reconstrucción tridimensional.

## Índice de Materias

- acumulación para círculos, 37
- acumulación para líneas rectas, 36
- apareamiento, 3
- APPM, 3
  
- centroide, 8, 9
- coordenadas homogéneas, 6
- correspondencia, 16, 20, 22
  
- desigualdad, 21
- determinante, 6
- distancias absolutas, 29
- distancias geométricas, 19
- DP, 3
  
- eliminación del ángulo, 13
- escalamiento anisotrópico, 5
- escalamiento isotrópico, 5
- espacio de acumulación, 35
- espacio de Hough, 35
- espacio de invariantes, 16
- estiramiento, 5
  
- factorización, 7
  
- Hough, 34
  
- imagen de acumulación, 43
- imagen de acumulación, 36, 38, 40
- invariantes de Hu, 13–15
- invariantes de puntos, 15
- invariantes puntuales, 15, 16
- inversión, 6
  
- línea recta, 32
- LAD, 29
  
- método de mínimos cuadrados, 19
- método de simplex, 26, 29
  
- matriz simétrica, 21
- medida de correspondencia, 19
- momentos centrales, 8
- momentos complejos, 11, 12
- momentos de orden tres, 11
- momentos normalizados, 9
- movimiento rígido, 5
  
- normalización, 4, 7
  
- optimización lineal, 22, 28
  
- peso de correspondencia, 22
- peso de punto, 22
- peso permitido, 22, 23
- peso puntual, 22, 24
- puntos atípicos, 25
- puntos correspondientes, 17, 21
- puntos fugitivos, 25, 29
- puntos vecinos, 17
  
- Radon, 33
- reflexión, 16
  
- separación de transformaciones, 6
- sistema sobre-especificado, 18
- suma de distancias cuadradas, 22
  
- transformación afín, 5
- transformación de Hough, 35
- transformación de Radon, 32
- transformación homogénea, 6
- transformación homotética, 5, 43
- transformación inversa, 6
- transformación proyectiva, 6
- traslación, 5, 43
  
- valores estándares, 9
- valores fugitivos, 25

valores normalizados, 8  
variable de holgura, 28