

Un procedimiento práctico para estimar el parámetro de forma de la distribución Gaussiana Generalizada

J. Armando Domínguez-Molina

Universidad de Guanajuato

jadguez@cimat.mx

Graciela González-Farías

Centro de Investigación en Matemáticas, México

farias@cimat.mx

Ramón M. Rodríguez-Dagnino

ITESM Campus Monterrey

Resumen. Se propone un método de aproximación para obtener un estimador del parámetro de forma p , en la distribución Gaussiana generalizada, a través del método de momentos. El estimador por el método de momentos para p no siempre existe. Sin embargo, en la mayoría de las situaciones prácticas que nos son de interés, se puede mostrar que la solución existe con una probabilidad muy alta. También se presenta un procedimiento numérico-analítico para obtener intervalos de confianza exactos para p . Finalmente se ilustran los procedimientos con datos obtenidos en una aplicación del codificador de Audio MP3.

Palabras claves: Distribución Gaussiana generalizada, método de momentos, función de razón Gaussiana generalizada (frgg), función de razón Gaussiana generalizada muestral (frggm), desigualdad de Gurland, aproximación de Stirling, intervalos de confianza.

1 Introducción

La literatura de procesamiento de señales ha hecho un uso extensivo del supuesto de ruido Gaussiano. Sin embargo, se pueden encontrar numerosos ejemplos, como ruido atmosférico, señales con codificación en subbandas, etc. donde dicho supuesto no es válido, por lo que se han buscado alternativas para modelar ruidos no Gaussianos. Entre estas se pueden mencionar distribuciones K, distribuciones estables alpha, mezclas de Gaussianas, y Gaussiana generalizada. Como hacen notar K. Sharifi y A. Leon-García (1995), muchas señales, incluyendo audio/speech, resultan mejor modeladas por una distribución Gaussiana generalizada y muchos de los trabajos en el área de DOA (Direction Of Arrival), ICA (Independent Component Analysis, Choi et al, 2000), BSS (Blind Signal Separation, Wu & Principe, 1998), GARCH, (MathSoft, 1996), etc. hacen uso de esta distribución, por mencionar sólo algunas áreas de investigación actual.

La Gaussiana generalizada (GG) se puede reparametrizar de forma tal que su media y varianza¹ coincidan con la Gaussiana, esto es, μ y σ^2 . Se tiene además el parámetro de forma p , el cual mide el “peakednes” de la distribución y para el cual no se tiene un estimador con forma cerrada. El parámetro p determina la forma de la distribución, por ejemplo, la distribución normal ($p = 2$), la distribución de Laplace ($p = 1$), cuando $p \rightarrow 0$ se obtiene una distribución “cercana” a la uniforme. Debido a que en las aplicaciones de mayor interés, la media es típicamente 0, consideraremos sólo el caso de la estimación del parámetro de forma de una distribución GG con dos parámetros, esto es, bajo $\mu = 0$.

Varanasi y Aazhang (1989), discuten la estimación de los parámetros de la distribución GG, usando métodos de momentos (directamente sobre los parámetros) y máxima verosimil-

¹Ver Apéndice A

itud. Rodríguez-Dagnino y León-García (1998), presentan un estimador de forma cerrada, basado en la desigualdad de Gurland. En el primer caso, se advierten las dificultades computacionales para hacer estos cálculos debidos fundamentalmente al manejo de las funciones relacionadas con la función gama. En el segundo, la aproximación funciona sólo para un rango de valores de p de .3 a 3, el cual es importante para subbandas compresoras de señales de video (subband encoding of video signals) y otras aplicaciones relacionadas. Sin embargo no es un intervalo suficientemente ancho para cubrir satisfactoriamente a todos los casos. En particular, en el ejemplo de este trabajo obtuvimos valores de p entre 0.18 y 1.32 (ver Sección 5).

Proponemos en este trabajo, un método de estimación muy sencillo que prescinde de las ecuaciones trascendentales en la estimación del parámetro de forma. Este método, que funciona para todo valor de p , se basa en estimadores de momentos, siguiendo en principio, las ideas de J. López (2000). Sin embargo, a diferencia de éste último, quién presenta aproximaciones aceptable sólo para valores de p en $(.3, 3)$, se construyen intervalos de confianza² para p , con probabilidad de cobertura prefijada.

2 Distribución Gaussiana generalizada

Una variable aleatoria X tiene distribución Gaussiana generalizada si la función de densidad la distribución de X está dada por

$$gg(x; \mu, \sigma, p) = \frac{1}{2\Gamma(1 + 1/p) A(p, \sigma)} e^{-\left|\frac{x-\mu}{A(p, \sigma)}\right|^p}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

²El programa en Splus esta disponible previa requisición a jadguez@cimat.mx

donde $\mu \in \mathbb{R}$, $p, \sigma > 0$ y $A(p, \sigma) = \left[\frac{\sigma^2 \Gamma(1/p)}{\Gamma(3/p)} \right]^{1/2}$. El parámetro μ es la media de la distribución, la función $A(p, \sigma)$ es un factor de escala que permite que $\text{Var}(X) = \sigma^2$. El parámetro p es el parámetro de forma, llamado así, dado que indica la forma de la distribución. Por ejemplo, $p = 1$ corresponde a la distribución de Laplace o doble exponencial, $p = 2$ a la distribución normal. En los casos límites se cumple que si $p \rightarrow +\infty$ la distribución con densidad (1) converge a una distribución uniforme en $(\mu - \sqrt{3}\sigma, \mu + \sqrt{3}\sigma)$ y cuando $p \rightarrow 0+$ la distribución es degenerada en $x = \mu$ (ver apéndice A).

Utilizaremos la notación $X \sim \text{GG}(\mu, \sigma, p)$ para indicar que X es una variable aleatoria con función de densidad (1). Por convención $\text{GG}(\sigma, p) = \text{GG}(0, \sigma, p)$

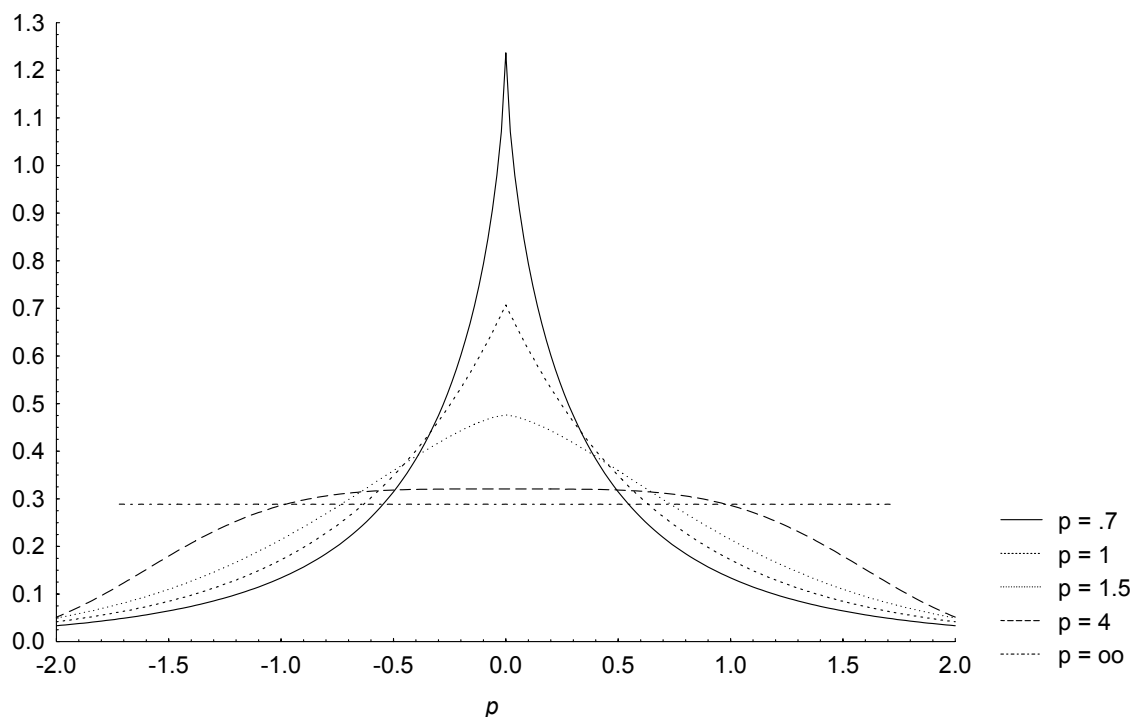


Figura 1: Gráficas de la función de densidad Gaussiana generalizada, para distintos valores de p . De arriba hacia abajo: $p = .7, 1, 1.5, 2, 4$.

Momentos de la distribución GG

Dada la simetría con respecto a μ de la distribución GG, los momentos centrales impares son cero, i.e.,

$$E(X - \mu)^r = 0, \quad r = 1, 3, 5, \dots$$

Las expresiones de los momentos pares centrados, se obtienen de los momentos absolutos centrados, los cuales son

$$E|X - \mu|^r = \left[\frac{\sigma^2 \Gamma(1/p)}{\Gamma(3/p)} \right]^{r/2} \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{p}\right)}{\Gamma(1/p)}. \quad (2)$$

En particular, la varianza de X es

$$\text{Var}(X) = E(X - EX)^2 = E(X - \mu)^2 = EY^2 = \sigma^2.$$

Las justificaciones a estos resultados se encuentran en el Apéndice A.

3 Existencia del estimador de momentos

3.1 Procedimiento estándar

Varanasi & Aazhang (1989) estudian el problema de estimar los parámetros de la distribución $GG(\mu, \sigma, p)$. En su trabajo, presentan tres procedimientos: el método de máxima verosimilitud, el método de momentos y un procedimiento que se basa en los dos anteriores.

En este trabajo nos concentramos en el problema de estimación del parámetro de forma de la distribución GG, por el método de momentos.

En general el método de momentos se puede describir como sigue: Se forma el sistema de ecuaciones $EX^k = M_k$, iniciando con $k = 1$ y continuando hasta tener suficientes ecuaciones que provean una solución única. En forma equivalente, se puede formar el sistema de ecuaciones

$$E(X) = \bar{X} \text{ y } E(X - EX)^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k, \quad k \geq 2.$$

Entonces los estimadores por el método de momentos (EMM) para el parámetro de localización μ , y para la varianza σ^2 , están dados por

$$\tilde{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \tilde{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (3)$$

Para estimar el parámetro de forma Varanasi & Aazhang (1989) sugieren utilizar cualquier momento par mayor o igual que 4 y resolver la siguiente ecuación

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^r = \frac{[A(\tilde{p}_n)]^r \Gamma\left(\frac{r+1}{\tilde{p}_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\tilde{p}_n}\right)}, \quad \tilde{p}_n > 0, \quad r \geq 4, \quad r = 2m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad m \geq 2.$$

Siguiendo el procedimiento del método de momentos, el estimador, \tilde{p}_n , de p estará dado por aquel valor que satisfaga la siguiente igualdad:

$$\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{\tilde{p}_n}\right)\right]^{r/2-1} \Gamma\left(\frac{r+1}{\tilde{p}_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\tilde{p}_n}\right)} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^r}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right]^{r/2}} \quad (4)$$

Sin embargo, Varanasi & Aazhang (1989) no mencionan que la ecuación (4), no siempre tiene solución, debido a que, para cada $r \geq 1$, la función de la izquierda es una función decreciente en $(0, \infty)$ y satisface los siguientes límites:

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right]^{r/2-1} \Gamma\left(\frac{r+1}{p}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{3}{p}\right)\right]^{r/2}} = \infty, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right]^{r/2-1} \Gamma\left(\frac{r+1}{p}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{3}{p}\right)\right]^{r/2}} = \frac{3^{\frac{r}{2}}}{1+r}. \quad (5)$$

El límite de la derecha de (5) se obtiene aplicando (E.3). Mientras que la función de la derecha satisface la siguiente desigualdad (ver Apéndice C),

$$1 \leq \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^r}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]^{r/2}} \leq n^{\frac{r}{2}-1}$$

La desigualdad es válida sólo para $r \geq 2$ y $r = 2m$, $m \geq 1$.

Entonces cuando

$$1 \leq \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^r}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]^{r/2}} \leq \frac{3^{\frac{r}{2}}}{1+r}, \quad (6)$$

la ecuación (4) no tiene solución.

Consideremos, por ejemplo, $r = 4$, el EMM, \tilde{p}_n , para p estará dado por la solución a:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\tilde{p}_n}\right) \Gamma\left(\frac{5}{\tilde{p}_n}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{3}{\tilde{p}_n}\right)} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right)^2}. \quad (7)$$

Para los datos de la Tabla F.3 tenemos que

$$\bar{x} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} x_i = 0.27353, \quad \frac{\frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} (x_i - 0.27353)^4}{\left(\frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} (x_i - 0.27353)^2\right)^2} = 1.63664,$$

Para los datos de la Tabla F.4 se obtiene:

$$\bar{z} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} z_i = 0.032141, \quad \frac{\frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} (z_i - 0.032141)^4}{\left(\frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} (z_i - 0.032141)^2\right)^2} = 1.5207$$

En vista de que

$$\frac{3^{\frac{4}{2}}}{1+4} = \frac{9}{5} = 1.8 < \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\tilde{p}_n}\right)\Gamma\left(\frac{5}{\tilde{p}_n}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{3}{\tilde{p}_n}\right)},$$

concluimos que (7) no tiene solución. Es decir, para los datos de las Tabla F.3 y F.4, no existe r , tal que se pueda resolver (4), por lo tanto el estimador de momentos para p no existe.

La probabilidad de existencia del EMM de p está determinada por la probabilidad del evento (6). Ahora esta probabilidad es positiva y depende sólo de n y p . Notemos que no depende ni de μ ni de σ . Debido a la consistencia de los EMM tenemos que si r es fijo y tomamos n grande, la probabilidad de existencia del EMM aumenta. También, como se ilustra en la siguiente sección, la probabilidad de existencia depende fuertemente de p . Se observa que para p grande se deben aumentar el tamaño de muestra para garantizar, con una alta probabilidad, la de existencia del EMM.

3.2 Función razón Gaussiana generalizada

Para la estimación de p , supondremos μ conocida y σ desconocida. Consideremos los primeros dos momentos absolutos como se definió en (2), para obtener los EMM de σ y p , esto es,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|^k = E |X - \mu|^k$$

De la ecuación (A.17) se tiene que,

$$E |X| = \sigma \sqrt{M(p)}, \quad y \quad EX^2 = \sigma^2, \quad (8)$$

donde

$$M(p) = \frac{(E|X|)^2}{EX^2} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{2}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{3}{p}\right)}, \quad (9)$$

el recíproco de la función $M(p)$ se conoce como *función razón Gaussiana generalizada (frgg)*.

De las relaciones en (8) obtenemos que los estimadores de σ y p por el método de momentos se encuentran al resolver las ecuaciones:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i| = \sigma \sqrt{M(\bar{p})} \quad \text{y} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|^2 = \sigma^2. \quad (10)$$

Despejando σ y $M(\bar{p})$ de las ecuaciones en (10) obtenemos que

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|^2 \quad \text{y} \quad M(\bar{p}) = \bar{M}(X) = \frac{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|\right)^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|^2}. \quad (11)$$

Al recíproco de $\bar{M}(X)$ se le denomina, *la estadística función razón Gaussiana generalizada muestral (frggm)*.

El problema para resolver (10) estriba en la ecuación

$$M(\bar{p}) = \bar{M}(X),$$

la cual no siempre tiene solución debido a que el rango de la función³ $M(p)$ es $(0, \frac{3}{4})$, y la frggm cumple⁴ con $\frac{1}{n} \leq \bar{M}(X) \leq 1$, lo que indica que, cuando $\frac{3}{4} < \bar{M}(X) \leq 1$, no se pueden resolver las ecuaciones en (10).

Si $\frac{1}{n} < \bar{M}(X) < \frac{3}{4}$, la solución de las ecuaciones (10) está dada por

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|^2 \quad \text{y} \quad M(\bar{p}) = \bar{M}(X), \quad (12)$$

³Ver Apéndice E

⁴Ver Apéndice C

El EMM para p es

$$\bar{p} = M^{-1} [\bar{M}(X)], \quad (13)$$

donde $M^{-1}(\cdot)$ representa la función inversa de M .

En la mayoría de las situaciones prácticas el método de momentos genera estimadores consistentes. En ese caso debido a que la distribución GG tiene todos los momentos positivos, tenemos que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|^2$ y $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|$ convergen en probabilidad a σ^2 y $\sigma\sqrt{M(p)}$ respectivamente. Por lo tanto la *frggm* es un estimador consistente de $M(p)$.

Es conveniente hacer las siguientes observaciones:

1. La distribución del estimador de momentos para p no depende de σ .
2. El hecho de que $\bar{M}(x) \geq \frac{1}{n}$, impide que p tome valores dentro de $M^{-1}([0, \frac{1}{n}]) = [0, M^{-1}(\frac{1}{n})]$.
3. Cuando la muestra es grande y p es pequeño ($p < 5$), lo cual es común en la práctica, el evento $\frac{3}{4} \leq \bar{M}(x) \leq 1$ ocurre con probabilidad muy pequeña (ver Figura 2). Esta probabilidad se puede interpretar como la *probabilidad de existencia el estimador de momentos de p* . Entonces si observamos un evento x tal que $\frac{3}{4} \leq \bar{M}(x) \leq 1$ y n es grande, tendremos una indicación de que p es muy grande o de que la distribución de los datos no es Gaussiana generalizada⁵.

⁵En el Apéndice E se mencionan algunas distribuciones alternativas útiles en las aplicaciones como son la lognormal y la gama generalizada. Cuando buscamos familias de distribución que satisfagan que para una muestra de tamaño n la *frggm* es $\geq \frac{3}{4}$, no estamos sugiriendo estimar p (o el parámetro correspondiente en la nueva familia) con la *frggm*. Ya encontrada la familia que satisfaga $\bar{M} \geq \frac{3}{4}$ se procede a estudiar como estimar el parámetro de interés.

4. La Figura 2 muestra el mínimo tamaño de muestra para el cual, la probabilidad del evento $\bar{M}(x) \geq \frac{3}{4}$ es menor o igual que 0.05. Es decir, el mínimo tamaño de muestra para que la probabilidad de que exista el estimador por el método de momentos de p sea 0.95. Observe que el mínimo n^* es una función creciente de p . Por ejemplo, el mínimo tamaño de muestra tal que $\Pr(\bar{M}(x) \geq \frac{3}{4})$ este cercana a cero, cuando p toma valores en el intervalo $[0.3, 3]$, (los cuales son típicos en las aplicaciones mencionadas en la introducción), es $n = 61$, y cuando $p \leq 5$ el mínimo tamaño de muestra es 216. Cualquiera de los valores de n anteriores es comúnmente rebasado en la práctica.

5. Cuando la muestra es grande, tenemos que $\frac{1}{n}$ es pequeño lo que permite valores estimados para p cercanos a cero.

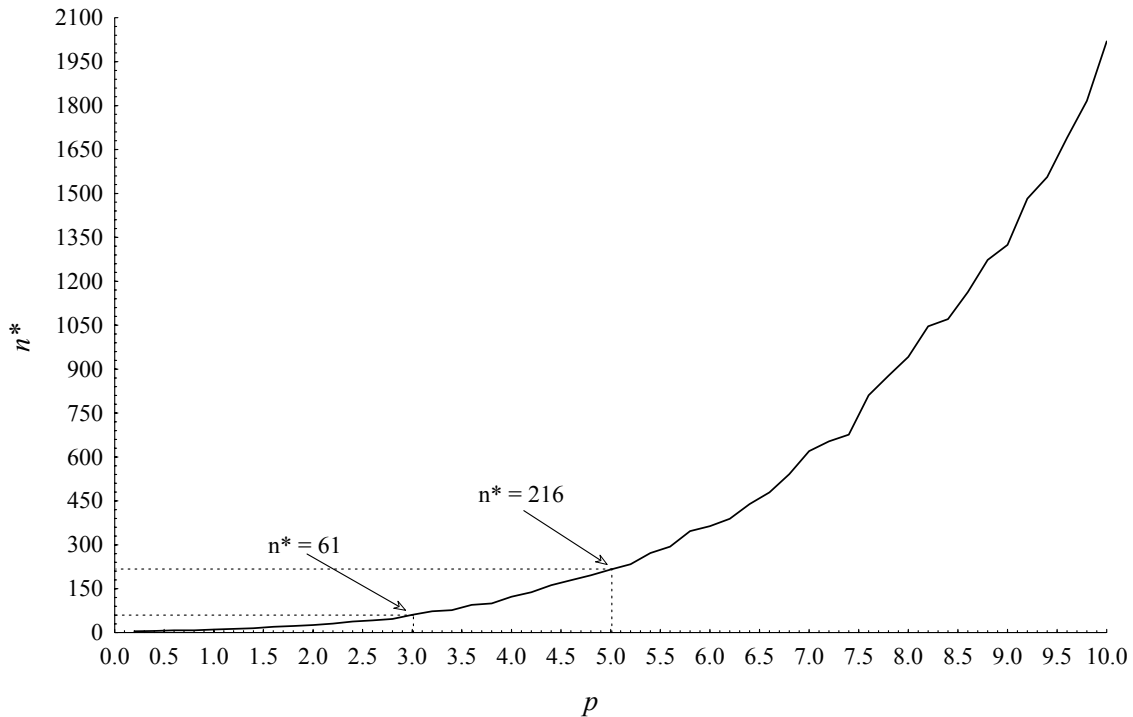


Figura 2.. Gráfica de p contra $n^* = \min \{n : \Pr(\bar{M}(X) \geq \frac{3}{4}; p) > 0.05\}$, $p \in (0, 10)$.

6. Si se considera μ desconocida, el EMM $\bar{\mu}$, de μ , es $\bar{\mu} = \bar{X}$. Entonces el EMM de σ y p es el mismo que (12) y (13) con μ reemplazada por \bar{X} .

7. Cabe señalar que los problemas de existencia del EMM para p son los mismos si se considera μ desconocido o no. En la aplicación que consideramos en este trabajo, μ se supone conocido e igual a cero.

8. Para los datos de las Tablas F.3 y F.4 se cumple que $\bar{x} = -0.27353$ y $\bar{z} = 0.032141$ y

$$\frac{\left(\frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} |x_i|\right)^2}{\frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} x_i^2} = 0.7786, \quad \frac{\left(\frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} |x_i - 0.27353|\right)^2}{\frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} (x_i - 0.27353)^2} = 0.8151$$

$$\frac{\left(\frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} |z_i|\right)^2}{\frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} z_i^2} = 0.8402, \quad \frac{\left(\frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} |z_i - 0.032141|\right)^2}{\frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} (z_i - 0.032141)^2} = 0.8517,$$

por lo que la solución no existe independientemente de si μ es conocida o no.

3.3 Aproximación de $M(p)$

Es claro que la función $M(p)$ no es invertible de manera explícita. Por ello, se propone una aproximación que tenga como primera característica, ser invertible y segunda, que el nivel de aproximación, al menos para el rango de valores de p de nuestro interés, sea aceptable.

De la Figura 3 observamos que la función $M(p)$ se comporta diferente en cuatro regiones ajenas del conjunto de los reales positivos.

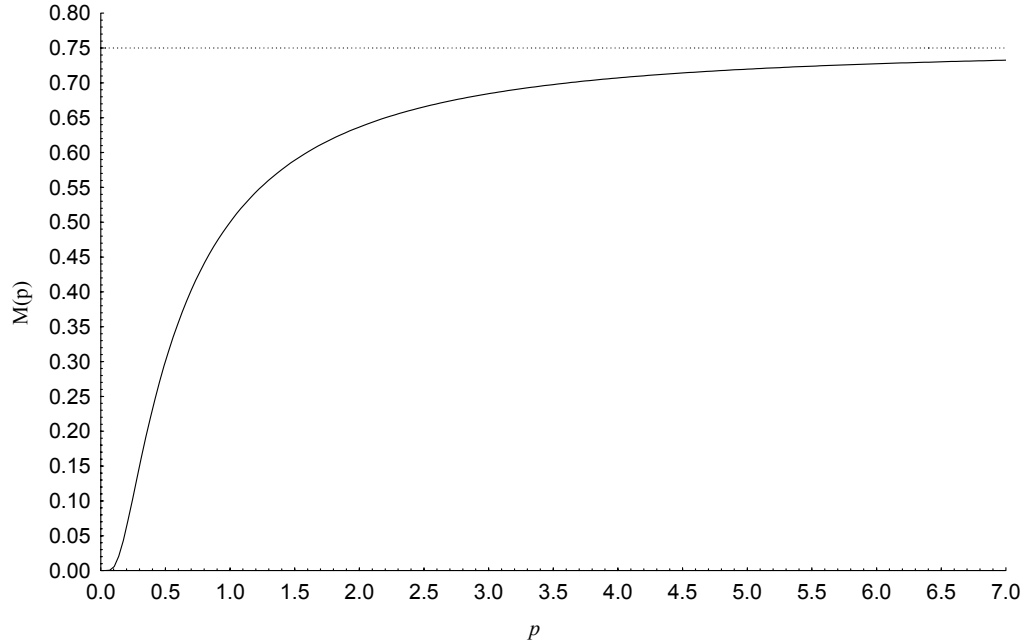


Figura 3. Gráfica de la función $M(p)$

Notemos que $M(p)$ es una función de productos de funciones gama con argumentos proporcionales a $\frac{1}{p}$. De aquí que la aproximación de Stirling resulte adecuada cerca del origen. La aproximación de Stirling para la función gama es

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} [1 + O(x^{-1})], \quad x > 0, \quad (14)$$

ver Gradshteyn & Ryzhik (1994) ec. 8.327. La aproximación de Stirling es muy precisa para x grande, como lo muestra (14).

Gurland (1956) demostró que la función gama satisface la siguiente desigualdad

$$\frac{\Gamma^2(\alpha + \delta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + 2\delta)} \leq \frac{\alpha}{\alpha + \delta^2}, \quad \alpha + \delta > 0, \quad \alpha > 0. \quad (15)$$

Cuando $\alpha = 1/p$ y $\delta = 1/p$ en (15) obtenemos la siguiente desigualdad para $M(p)$

$$M(p) = \frac{\Gamma^2(2/p)}{\Gamma(1/p)\Gamma(3/p)} \leq \frac{p}{1+p}, \quad (16)$$

la igualdad se satisface en $p = 1$. Esto sugiere que, en una región alrededor de $p = 1$ se aproxime a $M(p)$ mediante la función $\frac{b_1 p}{1 + b_2 p + b_3 p^2}$.

Se tiene así, una aproximación adecuada cerca de $p = 0+$ y a través de la desigualdad de Gurland otra buena aproximación cerca de $p = 1$. Sin embargo, existe una región contenida en $(0, 1)$ en la que ninguna de éstas aproximación es satisfactoria para $M(p)$. De la Figura 3 observamos que una aproximación polinómica de la forma $a_1 p^2 + a_2 p + a_3$ pudiese ser un buen candidato.

Para valores de p mayores a 1, y debido a que $M(p)$ tiene como asíntota a la línea horizontal $\frac{3}{4}$ se propone aproximar $M(p)$ mediante la función $\frac{3}{4} - c_1 e^{-c_2 p + c_3 p^2}$.

Obsérvese que las cuatro funciones propuestas son fáciles de invertir. Los valores $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ dependen de las regiones en las que aproximemos cada una de ellas. Para el caso de la aproximación de Stirling, consideraremos que la aproximación es adecuada si el error es menor a 0.001.

Entonces, de (14) si tomamos $\Gamma(x) \cong \Gamma_{\circ}(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}$, se tiene que

$$M(p) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{2}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{3}{p}\right)} \cong \frac{\Gamma_{\circ}^2\left(\frac{2}{p}\right)}{\Gamma_{\circ}\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma_{\circ}\left(\frac{3}{p}\right)} = \frac{1}{4} 3^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{4+p}{p}},$$

si además, se pide que

$$\left| \frac{1}{4} 3^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{4+p}{p}} - M(p) \right| \leq .001,$$

debemos tener que $0 \leq p < .2771981$. La aproximación es exacta en $p = 0$.

Encontramos también que la aproximación sugerida por la desigualdad de Gurland es adecuada cuando $.828012 \leq p < 2.631718$. Entonces utilizaremos la aproximación polinómica dentro de $[0.2771981, 0.828012)$ y la aproximación asíntótica exponencial para $p \geq 2.631718$.

Con excepción de la aproximación de Stirling, todas las aproximaciones se hicieron por mínimos cuadrados. Se obtiene la siguiente expresión aproximada para $M(p)$

$$M^*(p) = \begin{cases} 3^{\frac{1}{2}} \frac{p-6}{p} 2^{\frac{4-p}{p}} & \text{si } p \in [0, .2771981) \\ a_1 p^2 + a_2 p + a_3 & \text{si } p \in [0.2771981, .828012) \\ \frac{b_1 p}{1 + b_2 p + b_3 p^2} & \text{si } p \in [.828012, 2.631718) \\ \frac{3}{4} - c_1 e^{-c_2 p + c_3 p^2} & \text{si } p \in [2.631718, \infty), \end{cases}$$

donde $a_1 = -.535707356$, $a_2 = 1.168939911$, $a_3 = -.1516189217$, $b_1 = 0.9694429$, $b_2 = 0.8727534$, $b_3 = 0.07350824$, $c_1 = 0.3655157$, $c_2 = 0.6723532$, $c_3 = 0.033834$.

La Figura 4 muestra una excelente precisión en la aproximación $M^*(p)$ de $M(p)$.

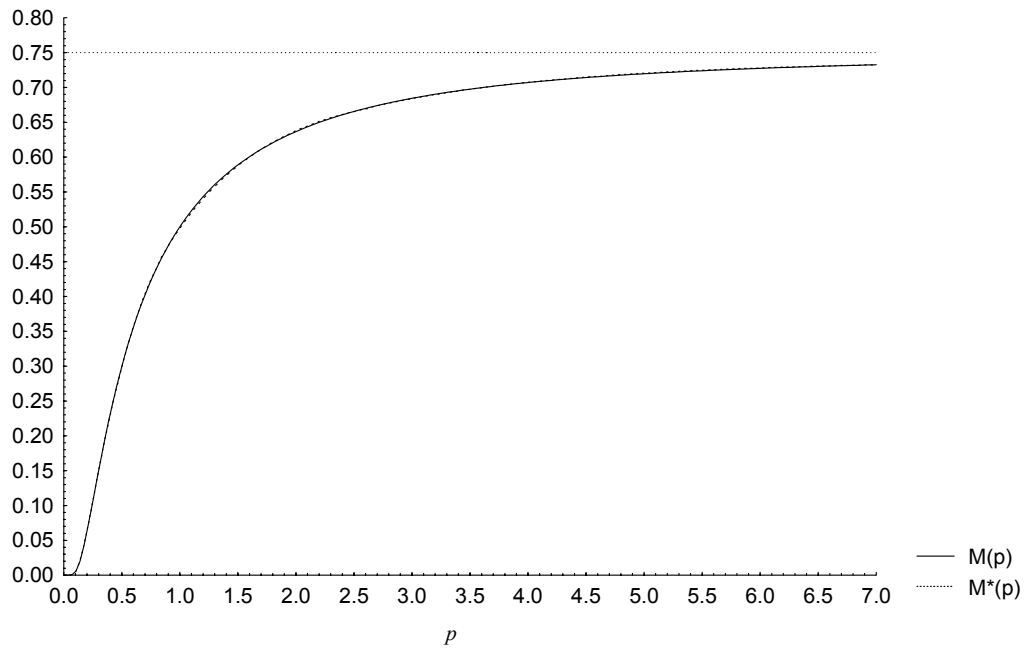


Figura 4: Línea sólida: $M(p)$, línea punteada: $M^*(p)$

La función inversa de $M^*(p)$ esta dado por:

$$p^*(k) = \begin{cases} 2 \frac{\ln \frac{27}{16}}{\ln \frac{3}{4k^2}} & \text{si } k \in (0, .1312458974) \\ \frac{1}{2a_1} \left(-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_1a_3 + 4a_1k} \right) & \text{si } k \in [.1312458974, .4489943143) \\ \frac{1}{2b_3k} \left(b_1 - b_2k - \sqrt{(b_1 - b_2k)^2 - 4b_3k^2} \right) & \text{si } k \in [.4489943143, 0.6712564) \\ \frac{1}{2c_3} \left(c_2 - \sqrt{c_2^2 + 4c_3 \ln \left(\frac{3-4k}{4c_1} \right)} \right) & \text{si } k \in [0.6712564, \frac{3}{4}), \end{cases}$$

lo cual nos da un estimador aproximado, basado en el método de momentos, para p .

4 Intervalos de confianza

La construcción de intervalos de confianza no es simple debido a que no tenemos una estadística suficiente para p con la cual podamos construir un intervalo de confianza para este parámetro. Si utilizamos intervalos de confianza aproximados basados en intervalos de verosimilitud, o en la estadística score de Rao, o en la estadística de Wald, las cuales son equivalentes con orden $O(n^{-1})$ tenemos que los intervalos de confianza, construidos con estas cantidades, tienen un desempeño muy pobre. La probabilidad de cobertura de estos intervalos dependen fuertemente del valor de p . Por lo tanto presentamos un procedimiento numérico-analítico para la construcción de intervalos de confianza para p . Éste se basa en considerar la estadística función razón Gaussiana generalizada muestral

$$\bar{M}(x) = \frac{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

cuya distribución no depende de σ .

Para un valor fijo de n la función de densidad de $\bar{M}(X)$ sólo depende de p . Mediante el *Teorema de la transformación integral*, (Kalbfleisch (1985) pág. 215, Mood, *et al*, pág. 387) tenemos que si definimos la nueva variable aleatoria

$$T = F_{\bar{M}}(\bar{M}; p),$$

dicha variable tiene distribución uniforme en $(0, 1)$. Entonces para construir un intervalo de confianza para p debemos encontrar los valores de p que satisfagan

$$\Pr(\alpha_1 \leq F_{\bar{M}}(\bar{M}; p) \leq \alpha_2) = 1 - \alpha,$$

los valores más comunes para α_1 y α_2 son $\alpha_1 = 1 - \alpha_2$, $\frac{1}{2} < \alpha_2 < 1$.

Los cálculos para obtener la función de distribución de \bar{M} , se vuelven muy complicados incluso para $n = 2$ (ver ecuación D.1). Por este motivo los intervalos de confianza para p , se obtiene a través de un Método Monte Carlo, de acuerdo con el nivel de confianza y el tamaño de muestra especificado.

Se utiliza una simulación para evaluar la función de distribución

$$F_{\bar{M}}(m; p) = \Pr(\bar{M} \leq m; p).$$

Para resolver la ecuación $\Pr(\alpha/2 \leq F_{\bar{M}}(M; p) \leq 1 - \alpha/2)$ con respecto a p , para un valor observado de M_o de \bar{M} procedemos mediante el algoritmo siguiente:

Supongamos que tenemos un valor observado, M_o , de \bar{M} .

1. Fijar un valor inicial $p = p_0$.

2. Obtener m muestras de tamaño n , $(x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n})$, $(x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,n})$, ..., $(x_{m,1}, x_{m,2}, \dots, x_{m,n})$, de valores absolutos de una distribución Gaussiana generalizada con $\mu = 0$, $p = p_0$ y $\sigma = 1$ ($\sigma = 1$ es irrelevante, puesto que la distribución de M no depende de σ). En el Apéndice A se indica cómo simular $GG(\mu, \sigma, p)$.

3. Evaluar M_1, M_2, \dots, M_m , donde $M_i = \frac{\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{j,i}\right)^2}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{j,i}^2}$.

4. Evaluar la función de distribución empírica de M , en M_o , mediante

$$\begin{aligned}\bar{F}_{\bar{M}}(M_o) &= \frac{1}{m} (\#M_i \leq M_o) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m 1_{(-\infty, M_o]}(M_i)\end{aligned}$$

5. Si $\bar{F}_{\bar{M}}(M_o) \approx \alpha/2$, nos quedamos con p_0 y terminamos la búsqueda, de lo contrario regresamos al paso 1, con otro valor de p_0 .

Para obtener el valor p_1 tal que $\bar{F}_{\bar{M}}(M_o) = 1 - \alpha/2$, repetimos el procedimiento anterior, donde en 5, preguntamos si $\bar{F}_{\bar{M}}(M_o) \approx 1 - \alpha/2$.

Los valores p_0 y p_1 forman el intervalo de $100(1 - \alpha)\%$ de confianza para p .

5 Aplicación al Codificador de Audio MP3

Existen una variedad de técnicas para representar en forma digital la señal de audio. El fin que se busca con ello es almacenarla y transmitirla en forma de bits de información. La digitalización debe de cumplir el compromiso de minimizar el número de bits pero manteniendo al mismo tiempo un nivel de calidad adecuado. En diferentes aplicaciones se establece

este compromiso de acuerdo a lo que se juzgue más conveniente, y debido a ello tenemos diferentes esquemas de compresión de voz y audio adecuados, por ejemplo para voz en redes telefónicas tradicionales, en redes celulares inalámbricas, en juguetes, etc.. Recientemente ha surgido el esquema de compresión de audio MP3, el cual nace como parte complementaria de los esquemas de codificación de video MPEG (Motion Picture Expert Group) en 1992, y hoy ha cobrado tal importancia que se ha establecido como una técnica de compresión de audio independiente y muy popular en computadoras personales y transferencia de archivos musicales vía Internet. En este esquema de compresión se busca una calidad equivalente al audio digital que se tiene en discos compactos comerciales (CDs), pero logrando una mayor compresión en los bits.

El estándar comprende tres capas (layers) las cuales están diseñadas con niveles de complejidad y tasas de compresión crecientes. Se utiliza la misma estructura básica para cada una de las tres capas, es decir, un banco de 32 filtros pasabanda polifásicos arreglados de tal manera que se tenga una reconstrucción perfecta en el receptor con filtros ideales. La frecuencia de muestreo de la señal de audio es de 44.1 KHz para máxima calidad, y se puede procesar audio con un ancho de banda de 20 KHz. En la práctica se sufre de una degradación mínima debida a la imperfección de los filtros reales y al muestreo, sin embargo la degradación mayor ocurre debido a la etapa de cuantización de la amplitud de las muestras que se obtienen a la salida de cada uno de los filtros. En este esquema de análisis y reconstrucción, las muestras a la salida de los filtros polifásicos son submuestreadas o decimadas por un factor de 32 y posteriormente pasan por un proceso de cuantización en el dominio de la transformada discreta coseno modificada. Para el diseño óptimo de los cuantizadores es necesario conocer la función de densidad de probabilidad de las fuentes de información, en este caso la salida del banco de filtros, por lo que en este estudio nos enfocamos al análisis de

dichos datos. Nuestra señal de estudio en este Reporte consta de 28,657 muestras por cada uno de los 32 filtros. Esta información corresponde a 20.79 segundos de la pieza musical Carmina Burana.

Tabla 1. $\bar{M}(x)$ representa los valores muestrales de la frggm para los datos de la pieza musical Carmina Burana. \bar{p} es el estimador por el método de momentos de \bar{p} , obtenido en base a (13). p_0 y p_1 son los extremos inferior y superior del intervalo de 95% de confianza para p . Estos valores se obtuvieron en base al algoritmo de la sección anterior con

$$n = 28657 \text{ y } m = 500, \sigma = 1.$$

	$\bar{M}(x)$	\bar{p}	p_0	p_1	$p_1 - p_0$
0	0.5614	1.3211	1.2754	1.3415	0.0661
1	0.5162	1.0798	1.0442	1.0966	0.0524
2	0.4992	1.0044	0.9722	1.0208	0.0486
3	0.5163	1.0806	1.0422	1.0927	0.0505
4	0.4990	1.0037	0.9722	1.0220	0.0498
5	0.4811	0.9311	0.9062	0.9509	0.0447
6	0.4087	0.7109	0.6963	0.7352	0.0389
7	0.3498	0.5867	0.5719	0.6069	0.0350
8	0.3717	0.6290	0.61467	0.6496	0.0349
9	0.3265	0.5452	0.5292	0.5622	0.0330
10	0.2905	0.4869	0.4689	0.5020	0.0331
11	0.2482	0.4248	0.4048	0.4437	0.0389
12	0.2300	0.3996	0.3815	0.4164	0.0349
13	0.2210	0.3876	0.3698	0.4048	0.0350
14	0.1690	0.3217	0.3037	0.3426	0.0389
15	0.1722	0.3256	0.3076	0.3465	0.0389

	$\bar{M}(x)$	\bar{p}	p_0	p_1	$p_1 - p_0$
16	0.1196	0.2643	0.2454	0.2882	0.0428
17	0.0919	0.2333	0.2124	0.2571	0.0447
18	0.0750	0.2138	0.1949	0.2377	0.0428
19	0.0622	0.1987	0.1755	0.2299	0.0544
20	0.0581	0.1937	0.1716	0.2143	0.0427
21	0.0583	0.1940	0.1716	0.2221	0.0505
22	0.0650	0.2021	0.1794	0.2299	0.0505
23	0.0609	0.1971	0.1755	0.2221	0.0466
24	0.0667	0.2041	0.1813	0.2299	0.0486
25	0.0705	0.2086	0.1871	0.2338	0.0467
26	0.0716	0.2099	0.1871	0.2338	0.0467
27	0.0670	0.2045	0.1832	0.2377	0.0545
28	0.0529	0.1872	0.1638	0.2221	0.0583
29	0.0390	0.1688	0.1424	0.1910	0.0486
30	0.0490	0.1822	0.1599	0.2104	0.0505
31	0.0531	0.1874	0.1638	0.2143	0.0505

De la Figura 5, podemos verificar que el supuesto de media igual a cero esta bien fundamentado para esta clase de aplicaciones.

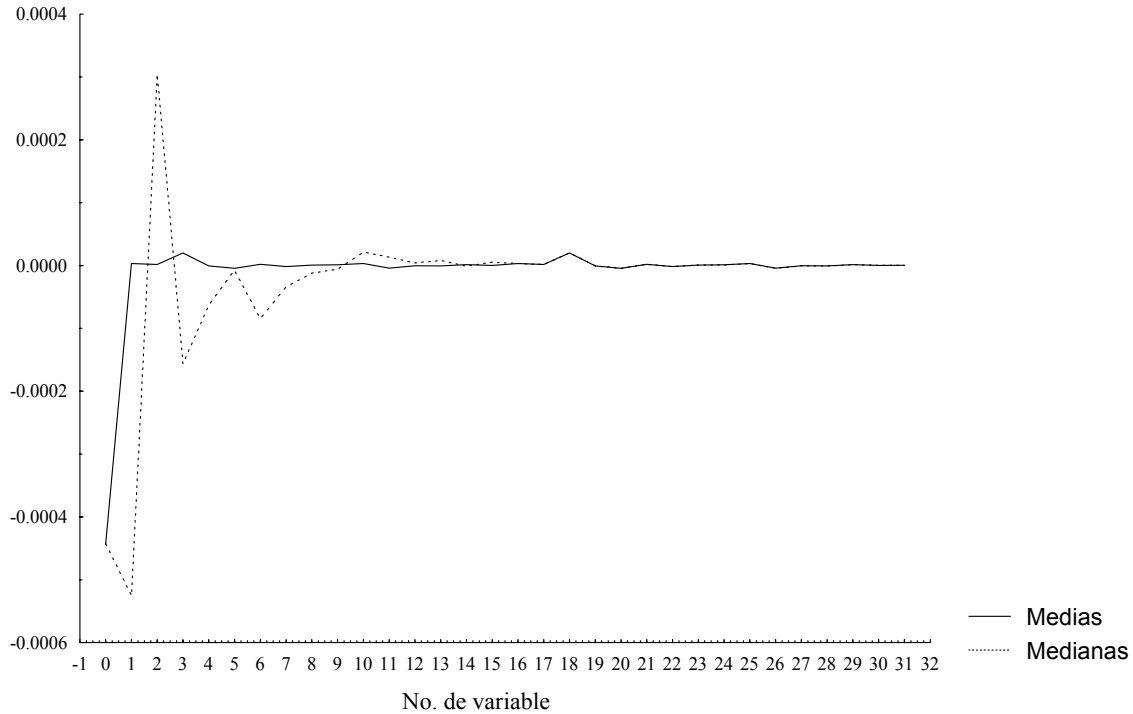


Figura 5. Gráficas de medias y medianas de los datos correspondientes a las 32 bandas.

De las Tablas 1y 2 podemos notar que los valores de p estimados por el método descrito (13)., y las estimaciones de σ , los estimadores propuestos resultan muy precisos, lo cuál se constata a través de los intervalos de confianza (ver Figura 6).

Tabla 2. Estimadores de la desviación estándar, σ , para los datos de las 32 bandas. El estimador $\hat{\sigma}$ denota al estimador de máxima verosimilitud de σ . obtenido de (B.2). Y el estimador $\bar{\sigma}$ denota al estimador de momentos de σ , obtenido mediante (12).

Col	$\hat{\sigma}$	$\bar{\sigma}$	Col	$\hat{\sigma}$	$\bar{\sigma}$
0	0.1522	0.1522	8	0.0045	0.0045
1	0.1156	0.1157	9	0.0043	0.0042
2	0.0624	0.0626	10	0.0039	0.0037
3	0.0339	0.0340	11	0.0037	0.0034
4	0.0222	0.0222	12	0.0031	0.0028
5	0.0133	0.0134	13	0.0028	0.0025
6	0.0084	0.0083	14	0.0026	0.0022
7	0.0061	0.0060	15	0.0022	0.0018
Col	$\hat{\sigma}$	$\bar{\sigma}$	Col	$\hat{\sigma}$	$\bar{\sigma}$
16	0.0025	0.0018	24	0.0014	0.0007
17	0.0029	0.0019	25	0.0012	0.0006
18	0.0031	0.0018	26	0.0010	0.0005
19	0.0032	0.0017	27	0.0009	0.0004
20	0.0028	0.0014	28	0.0010	0.0004
21	0.0025	0.0013	29	0.0012	0.0004
22	0.0023	0.0010	30	0.0007	0.0003
23	0.0018	0.0008	31	0.0005	0.0002

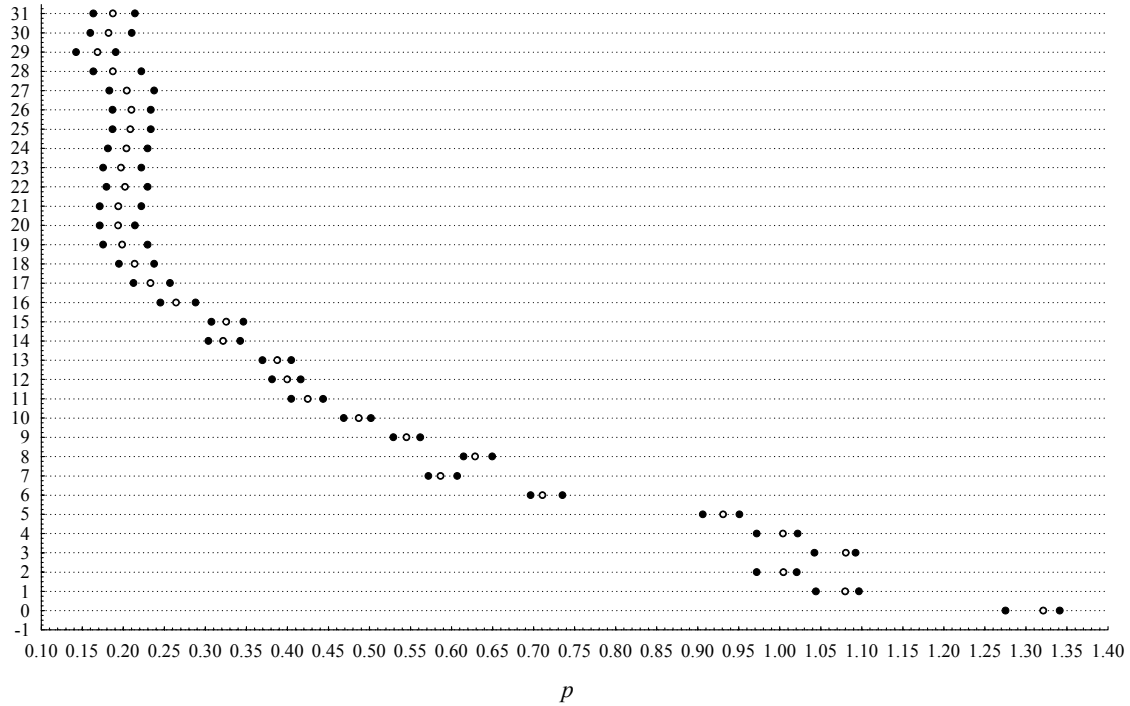


Figura 6. Intervalos de 95 % confianza para p . Círculos negros: extremos del intervalo de 95% de confianza. Círculo blanco: estimador de momentos de p .

6 Conclusión

Es importante notar que la estimación de σ por máxima verosimilitud depende del valor de p . En el ejemplo observamos que el valor del estimador de momentos para σ disminuye a medida que p lo hace, casi a la mitad de lo que se observa para el caso del estimador de máxima verosimilitud.

La probabilidad de cobertura de los intervalos de confianza obtenidos de la función de verosimilitud dependen de p , en este caso es recomendable calcular la probabilidad de cober-

tura mínima. Por otro lado, calcular probabilidades de cobertura mínima para el modelo Gaussiana generalizada resulta computacionalmente muy costoso debido a las complicaciones para calcular el estimador de máxima verosimilitud de p .

Recomendamos el uso de la ecuación (13) y del algoritmo descrito en la sección 4 para obtener estimadores puntuales en forma simple e intervalos de confianza asociados.

Como se mencionó antes, si $\bar{M}(X) \geq \frac{3}{4}$, no se puede estimar p , esto puede ser indicador de dos posibles escenarios, ya sea que el valor de p es grande o bien estamos tratando de ajustar la distribución equivocada. Si podemos obtener \hat{p} , el estimador de máxima verosimilitud y observamos que es pequeño, esto nos daría un argumento para dudar de la distribución GG, en cuyo caso recomendaríamos el uso familias de distribuciones como la gama generalizada que se presenta en el apéndice E.

Agradecimientos

Agradecemos a Ing. José I. Gómez Quiñones por proporcionarnos los datos que analizamos en este reporte.

7 Apéndice

A Propiedades de la distribución Gaussiana generalizada

En esta sección obtenemos algunas de las propiedades más relevantes de la distribución Gaussiana generalizada.

La media de la distribución GG es μ , como lo demuestran las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
EX &= \frac{1}{2\Gamma(1+1/p)A(p,\sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-|\frac{x-\mu}{A(p,\sigma)}|^p} dx \\
&= \mu + \frac{1}{2\Gamma(1+1/p)A(p,\sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) e^{-|\frac{x-\mu}{A(p,\sigma)}|^p} dx \\
&= \mu + \frac{1}{2\Gamma(1+1/p)A(p,\sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-|\frac{y}{A(p,\sigma)}|^p} dy \\
&= \mu.
\end{aligned}$$

Supongamos $\mu = 0$, y sea $Y = |X|$, entonces la función de densidad de Y está dada por

$$f_Y(y) = \frac{1}{\Gamma(1+1/p)A(p,\sigma)} e^{-\frac{y^p}{[A(p,\sigma)]^p}},$$

de aquí que los momentos absolutos de X son

$$E|X|^r = EY^r = \frac{1}{\Gamma(1+1/p)A(p,\sigma)} \int_0^{\infty} y^r e^{-\frac{y^p}{[A(p,\sigma)]^p}} dy, \quad r > 0.$$

Haciendo el cambio de variable $w = \frac{y^p}{[A(p,\sigma)]^p}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
EY^r &= \frac{1}{\Gamma(1+1/p)A(p,\sigma)} \int_0^{\infty} [A(p,\sigma)]^r w^{r/p} e^{-w} A(p,\sigma) \frac{1}{p} w^{1/p-1} dw \\
&= \frac{[A(p,\sigma)]^r}{p\Gamma(1+1/p)} \int_0^{\infty} w^{\frac{r+1}{p}-1} e^{-w} dw \\
&= \frac{[A(p,\sigma)]^r}{p\Gamma(1+1/p)} \Gamma\left(\frac{r+1}{p}\right) \\
&= \left[\frac{\sigma^2 \Gamma(1/p)}{\Gamma(3/p)} \right]^{r/2} \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{p}\right)}{\Gamma(1/p)} \tag{A.17}
\end{aligned}$$

En particular, la varianza de X es

$$\text{Var}(X) = E(X - EX)^2 = E(X - \mu)^2 = EY^2 = \sigma^2.$$

Distribución Gaussiana generalizada para $p = 0+$ y $p \rightarrow +\infty$

Tenemos los siguientes resultados

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \Gamma(1 + 1/p) = 1,$$

y

$$\frac{\Gamma(1/p)}{\Gamma(3/p)} \searrow 3, \quad p \rightarrow \infty, \quad p \geq 9.1147,$$

el límite anterior se obtiene de (E.4).

Cuando $-\sqrt{3}\sigma < x - \mu < \sqrt{3}\sigma$ se cumple que

$$-1 < \frac{x - \mu}{A(p, \sigma)} < 1,$$

por lo tanto, se desprende que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{|x - \mu|^p}{[A(p, \sigma)]^p} = \begin{cases} 0, & \text{si } \mu - \sqrt{3}\sigma < x < \mu + \sqrt{3}\sigma, \\ +\infty, & \text{otro caso,} \end{cases}$$

De los anteriores resultados obtenemos que cuando $p \rightarrow +\infty$ la distribución de X es $U(\mu - \sqrt{3}\sigma, \mu + \sqrt{3}\sigma)$, *i.e.*,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} gg(x, \sigma, p) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}\sigma}, & \text{si } \mu - \sqrt{3}\sigma < x < \mu + \sqrt{3}\sigma, \\ 0, & \text{otro caso,} \end{cases}$$

es decir, la función de distribución Gaussiana generalizada en $p = +\infty$ es

$$F_{GG}(x; \mu, \sigma, +\infty) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq \mu - \sqrt{3}\sigma \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right), & \text{si } \mu - \sqrt{3}\sigma < x < \mu + \sqrt{3}\sigma, \\ 1, & \text{si } x \geq \mu + \sqrt{3}\sigma. \end{cases}$$

Obsérvese que, si $\mu = 0$, en el límite se cumple que $E|X| = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma$ y $EX^2 = \sigma^2$, lo que implica que $\frac{(E|X|)^2}{EX^2} = \frac{3}{4}$.

Cuando p se acerca a cero por la derecha tenemos que

$$\lim_{p \rightarrow 0+} gg(x; \mu, \sigma, p) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq \mu, \\ +\infty, & \text{si } x = \mu. \end{cases}$$

Del límite anterior es fácil ver que la función de distribución Gaussiana generalizada en $p = 0+$ es

$$F_{GG}(x; \mu, \sigma, 0+) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < \mu, \\ 1, & \text{si } x \geq \mu, \end{cases}$$

es decir, cuando $p \rightarrow 0+$ la variable aleatoria $G(\mu, \sigma, p)$ converge a una variable aleatoria que tiene distribución degenerada en $x = \mu$.

Simulación de variables aleatorias Gaussiana generalizada

Sea $X \sim GG(\mu, \sigma, p)$. Consideremos $\mu = 0$ y $Y = |X|$, la función de densidad de Y es

$$f_Y(y; \sigma, p) = \frac{1}{\Gamma(1 + 1/p) A(p, \sigma)} e^{-\frac{y^p}{[A(p, \sigma)]^p}}. \quad (\text{A.18})$$

Sea Z una variable aleatoria con función de distribución gama con función de densidad dada por

$$g(z; \alpha, \lambda) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} z^{\lambda-1} e^{-\alpha z}, \quad (\text{A.19})$$

es decir, Z tiene distribución gama con parámetros α y λ , en notación $Z \sim G(\alpha, \lambda)$

Sea $Z \sim G(\alpha, \lambda)$, con $\alpha = [A(p, \sigma)]^{-p}$, $\lambda = p^{-1}$. Entonces

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{\{[A(p, \sigma)]^{-p}\}^{1/p}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} z^{\frac{1}{p}-1} e^{-[A(p, \sigma)]^{-p}z} \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) A(p, \sigma)} z^{\frac{1}{p}-1} e^{-[A(p, \sigma)]^{-p}z} \end{aligned}$$

Si $Y = Z^{1/p}$, tenemos que $z = y^p$ y $dz = py^{p-1}$. Así la densidad de Y está dada por

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) A(p, \sigma)} (y^p)^{\frac{1}{p}-1} e^{-[A(p, \sigma)]^{-p}y^p} py^{p-1} \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right) A(p, \sigma)} e^{-[A(p, \sigma)]^{-p}y^p}, \end{aligned}$$

por lo tanto Y se distribuye de acuerdo a una variable aleatoria con función de densidad (A.18).

Entonces, para simular valores absolutos de Gaussianas generalizadas con parámetros σ y p , primero se simulan variables aleatorias $Z_i \sim G(A^{-p}, p^{-1})$, $i = 1, \dots, n$ y en base a éstas, obtenemos las nuevas variables $Y_i = Z_i^{1/p}$ las cuales se distribuyen de acuerdo con (A.18).

Para obtener variables aleatorias con función de densidad (1) utilizaremos la técnica de Michael, Schucany y Haas(1976):

- 1.- Simular W de una variable aleatoria con distribución valor absoluto de GG con $\mu = 0$
- 2.- Hacer $Y = (-1)^b W$, donde b es una variable aleatoria Bernoulli($\frac{1}{2}$)
- 3.- Definir $X = \mu + Y$, $\mu \in \mathbb{R}$.

La variable aleatoria X , así construida, se distribuye igual que una variable aleatoria cuya función de densidad esta dada por (1).

B Máxima verosimilitud

La función de verosimilitud de μ , σ y p está dada por

$$L(p, \sigma; X) = [\Gamma(1 + 1/p) A(p, \sigma)]^{-n} \exp \left\{ - [A(p, \sigma)]^{-p} \sum_{i=1}^n |x_i - \mu|^p \right\},$$

la correspondiente función de log-verosimilitud

$$\ell(p, \mu, \sigma; X) = -n \ln [\Gamma(1 + 1/p) A(p, \sigma)] - \frac{1}{[A(p, \sigma)]^p} \sum_{i=1}^n |x_i - \mu|^p.$$

Si hacemos $Y = |X|$ y $\mu = 0$ la función de log-verosimilitud de σ y p está dada por

$$\ell(p, \sigma; X) = -n \ln [\Gamma(1 + 1/p) A(p, \sigma)] - \frac{1}{[A(p, \sigma)]^p} \sum_{i=1}^n x_i^p. \quad (\text{B.1})$$

El estimador por máxima verosimilitud de σ se obtiene al resolver, con respecto a σ , la ecuación

$$\frac{d}{d\sigma} \ell(p, \sigma; X) = -\frac{n}{\sigma} + \frac{p}{\sigma^{p+1}} \left[\frac{\Gamma(1/p)}{\Gamma(3/p)} \right]^{-p/2} \sum_{i=1}^n x_i^p = 0,$$

de aquí tenemos que

$$\hat{\sigma} = \left[\frac{\Gamma(3/p)}{\Gamma(1/p)} \right]^{1/2} \left(\frac{p}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p}. \quad (\text{B.2})$$

C Desigualdades de cocientes de sumas

En esta sección se prueba que el rango de $\bar{M}(x)$ es $(\frac{1}{n}, 1)$ y se prueba que

$$1 \leq \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^r}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]^{r/2}} \leq n^{\frac{r}{2}-1}$$

La cota con valor 1 se obtiene de la desigualdad de Hölder, y la otra con cálculos relacionados con álgebra de series.

La desigualdad de Hölder se describe como sigue:

Sean a_1, a_2, \dots, a_n y b_1, b_2, \dots, b_n dos conjunto de números reales no negativos, y sea $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, con $p > 1$, entonces

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q} \geq \sum_{i=1}^n a_i b_i. \quad (\text{C.1})$$

La igualdad se satisface si, y sólo si, las sucesiones $a_1^p, a_2^p, \dots, a_n^p$ y $b_1^q, b_2^q, \dots, b_n^q$ son proporcionales.

Rango de $\bar{M}(x)$

Sean x_1, x_2, \dots, x_n variables aleatorias positivas y sean $b_i = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Entonces mediante la desigualdad de Hölder, con $p = q = 2$, tenemos que

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \geq \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{n},$$

de la desigualdad anterior tenemos que

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq 0$$

y por lo tanto

$$0 \leq \frac{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2} \leq 1. \quad (\text{C.2})$$

Es decir

$$0 \leq \bar{M}(x) \leq 1.$$

Ahora probaremos que, si $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$, el rango de $\bar{M}(x)$ es en realidad

$$\frac{1}{n} \leq \bar{M}(x) \leq 1.$$

Esto es inmediato al observar que

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \text{algo positivo},$$

entonces

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \geq \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

o, lo que es lo mismo

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2} \geq \frac{1}{n},$$

por lo tanto, del resultado (C.2), se desprende que

$$\frac{1}{n} \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2} \leq 1.$$

De donde concluimos que el rango de $\bar{M}(x)$ es $\left[\frac{1}{n}, 1 \right]$.

Rango de cociente de sumas

Consideremos $r \geq 3$ y supongamos que $y_i = |x_i - \bar{x}|$, por lo tanto $y_i \geq 0$. Entonces aplicando la desigualdad de Hölder (C.1) tenemos

$$\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} y_i^2 \right)^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{2}{r}} \left(\sum_{i=1}^n 1 \right)^{1 - \frac{2}{r}} \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} y_i^2,$$

de donde llegamos a la siguiente desigualdad

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^r\right)^{\frac{2}{r}} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2$$

lo que implica que

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^r}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{r/2}} \geq 1. \quad (\text{C.3})$$

Ahora, suponiendo r par, se cumple lo siguiente

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{r/2} = \frac{1}{n^{r/2}} \sum_{i=1}^n y_i^r + \text{algo positivo},$$

se sigue

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{r/2} \geq \frac{1}{n^{r/2}} \sum_{i=1}^n y_i^r,$$

por lo tanto

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^r}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{r/2}} \leq n^{\frac{r}{2}-1}. \quad (\text{C.4})$$

Así por las desigualdades (C.3) y (C.4) obtenemos que

$$1 \leq \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^r}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{r/2}} \leq n^{\frac{r}{2}-1}.$$

La desigualdad es válida sólo para $r \geq 2$. Para $r = 1$ se cumple una relación similar, pero obtenida sólo para ese caso. A saber

$$n^{-1/2} \leq \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right)^{1/2}} \leq 1.$$

O, escribiéndola de forma similar a la de arriba

$$1 \leq \frac{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right)^{1/2}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i} \leq \sqrt{n}.$$

Substituyendo y_i por $|x_i - \bar{x}|$ tenemos que

$$1 \leq \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|^r}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|^2\right]^{r/2}} \leq n^{\frac{r}{2}-1}$$

El máximo de $\frac{(r+1)^2}{3^r}$ es $r = -\frac{\ln 3-2}{\ln 3} = .82048$, $\{0, 1.3456\}$, $\left(\frac{(.82048+1)^2}{3^{.82048}}\right)^{-1} = 0.74318$, lo que aumenta la probabilidad de existencia del estimador de momentos de p .

D Densidad de $\bar{M}(X)$ para $n = 2$

Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes, cada una con función de distribución GG (σ, p) . Sean $Y_1 = |X_1|$ y $Y_2 = |X_2|$, entonces

$$\bar{M}(X) = \frac{\frac{1}{4}(Y_1 + Y_2)^2}{\frac{1}{2}(Y_1^2 + Y_2^2)} = \frac{(Y_1 + Y_2)^2}{2(Y_1^2 + Y_2^2)}$$

Definamos una $W = Y_1$ como una variable auxiliar en el cálculo de la función de densidad de \bar{M} . La función inversa de la transformación $(Y_1, Y_2) \rightarrow (\bar{M}, W)$ es

$$y_1 = w, \quad y_{2\pm} = \frac{1}{2m-1} \left(1 \pm 2\sqrt{m-m^2}\right) w$$

De las siguientes derivadas parciales

$$\frac{\partial y_1}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial w} = 1, \quad \frac{\partial y_{2\pm}}{\partial m} = \frac{\mp 1 - 2\sqrt{m-m^2}}{(2m-1)^2 \sqrt{m-m^2}} w,$$

$$\frac{\partial y_{2\pm}}{\partial w} = \frac{1}{2(2m-1)} \left(2 \pm 4\sqrt{m-m^2} \right),$$

obtenemos que el jacobiano de la transformación es

$$J_{\pm} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial y_{2\pm}}{\partial m} & \frac{\partial y_{2\pm}}{\partial w} \end{vmatrix} = -\frac{\partial y_{2\pm}}{\partial m}.$$

La función de densidad conjunta de Y_1 y Y_2 está dada por

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{[\Gamma(1+1/p)A]^2} e^{-\frac{y_1^p}{A^p} - \frac{y_2^p}{A^p}},$$

de donde obtenemos que la función de densidad conjunta de M y W

$$\begin{aligned} f(m, w) &= \frac{1}{[\Gamma(1+1/p)A]^2} \frac{1+2\sqrt{m-m^2}}{(2m-1)^2 \sqrt{m-m^2}} w \exp \left\{ -\frac{w^p}{A^p} \left[1 + \frac{2+4\sqrt{m-m^2}}{2(2m-1)} \right] \right\} \\ &+ \frac{1}{[\Gamma(1+1/p)A]^2} \frac{1-2\sqrt{m-m^2}}{(2m-1)^2 \sqrt{m-m^2}} w \exp \left\{ -\frac{w^p}{A^p} \left[1 + \frac{2-4\sqrt{m-m^2}}{2(2m-1)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Para obtener la densidad marginal de M utilizaremos los siguientes cambios de variable

$$U_{\pm} = \frac{w}{A} \left[1 + \frac{2 \pm 4\sqrt{M-M^2}}{2(2M-1)} \right]^{1/p} = \frac{w}{A} \left[\frac{4M \pm 4\sqrt{M-M^2}}{2(2M-1)} \right]^{1/p}. \text{ Luego}$$

$$\begin{aligned} f(m, u) &= \frac{1}{[\Gamma(1+1/p)A]^2} \frac{1+2\sqrt{m-m^2}}{(2m-1)^2 \sqrt{m-m^2}} A^2 \left[\frac{4m+4\sqrt{m-m^2}}{2(2m-1)} \right]^{-2/p} u e^{-u^p} \\ &+ \frac{1}{[\Gamma(1+1/p)A]^2} \frac{1-2\sqrt{m-m^2}}{(2m-1)^2 \sqrt{m-m^2}} A^2 \left[\frac{4m-4\sqrt{m-m^2}}{2(2m-1)} \right]^{-2/p} u e^{-u^p}, \end{aligned}$$

dado que $\int_0^{\infty} z e^{-z^p} dz = \frac{\Gamma(\frac{2}{p})}{p}$ obtenemos finalmente que la función de densidad de M es

$$\begin{aligned} f_M(m) &= \frac{\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)}{p[\Gamma(1+1/p)]^2} \frac{1+2\sqrt{m-m^2}}{(2m-1)^2 \sqrt{m-m^2}} \left[\frac{4m+4\sqrt{m-m^2}}{2(2m-1)} \right]^{-2/p} \\ &+ \frac{\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)}{p[\Gamma(1+1/p)A]^2} \frac{1-2\sqrt{m-m^2}}{(2m-1)^2 \sqrt{m-m^2}} A^2 \left[\frac{4m-4\sqrt{m-m^2}}{2(2m-1)} \right]^{-2/p}, \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

donde $\frac{1}{2} \leq m \leq 1$.

E Alternativas a la distribución Gaussiana generalizada

Distribución gama generalizada

Sea $X \sim \text{GammaG}(a, d, p)$, i.e.,

$$f_X(x; a, d, p) = \frac{p}{a\Gamma\left(\frac{d}{p}\right)} \left(\frac{x}{a}\right)^{d-1} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^p}, \quad (\text{E.1})$$

$$\begin{aligned} EX^r &= \frac{p}{a^d\Gamma\left(\frac{d}{p}\right)} \int_0^\infty x^{r+d-1} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^p} dx \\ &= a^r \frac{\Gamma\left(\frac{r+d}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{p}\right)} \end{aligned}$$

$$M(d, p) = \frac{(EX)^2}{EX^2} = \frac{\left(a \frac{\Gamma\left(\frac{1+d}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{p}\right)}\right)^2}{a^2 \frac{\Gamma\left(\frac{2+d}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{p}\right)}} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1+d}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{p}\right) \Gamma\left(\frac{2+d}{p}\right)}$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} M(d, p) = \frac{d(2+d)}{(d+1)^2}, \quad \lim_{d \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} M(d, p) = 1$$

La densidad del valor absoluto de la Gaussiana generalizada está dada por $f(x, \sigma, p) = \frac{1}{\Gamma(1+1/p)A(p, \sigma)} e^{-\frac{x^p}{[A(p, \sigma)]^p}}$, en este caso $A(p, \sigma)$ es un parámetro de escala. y está dado por $A(p, \sigma) = \left[\frac{\sigma^2 \Gamma(1/p)}{\Gamma(3/p)}\right]^{1/2}$.

En analogía con la distribución Gaussiana generalizada podemos tomar a en (E.1) como

$$a = A(d, p, \sigma) = \left[\frac{\sigma^2 \Gamma\left(\frac{d}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{d+2}{p}\right)}\right]^{1/2},$$

el cual hace que $EX^2 = \sigma^2$.

Meeker & Escobar (1998)

Valores límites de $M(d, p)$

En esta sección demostraremos que $\lim_{p \rightarrow \infty} M(d, p) = \frac{d(2+d)}{(d+1)^2}$ y que $\lim_{p \rightarrow 0^+} M(d, p) = 0$.

Del Gradshteyn & Ryzhik, (1994), ec. 8.321 tenemos que

$$\Gamma(z+1) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad (\text{E.2})$$

donde

$$c_0 = 1, c_{n+1} = \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} s_{k+1} c_{n-k}}{n+1}; s_1 = \gamma, s_n = \zeta(n) \text{ for } n \geq 2, |z| < 1$$

$$\gamma = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\sum_{m=1}^s \frac{1}{m} - \ln s \right) \simeq 0.5772156649, \text{ y } \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Utilizando la relación (E.2) tenemos que una expansión de $\Gamma(x)$ alrededor de 0 está dada por

$$\Gamma(x) = x^{-1} - \gamma + \left(\frac{1}{12}\pi^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 \right) x + \dots \quad (\text{E.3})$$

donde γ es la constante de Euler, $\gamma \approx 0.5772156649$. De (E.3) se desprende que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\Gamma(ax)}{\Gamma(bx)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{a} - x\gamma + b_1 x^2 + b_2 x^3 + \dots}{\frac{1}{b} - x\gamma + b'_1 x^2 + b'_2 x^3 + \dots} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} = \frac{b}{a}. \quad (\text{E.4})$$

$$\text{Límite cuando } p \rightarrow \infty \quad M(d, p) = \frac{(EX)^2}{EX^2} = \frac{\left(a \frac{\Gamma\left(\frac{1+d}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{p}\right)} \right)^2}{a^2 \frac{\Gamma\left(\frac{2+d}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{p}\right)}} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1+d}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{p}\right)\Gamma\left(\frac{2+d}{p}\right)}$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} M(d, p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} M\left(d, \frac{1}{p}\right)$$

Ahora bien,

$$M\left(d, \frac{1}{p}\right) = \frac{\Gamma^2[(1+d)p]}{\Gamma(dp)\Gamma[(2+d)p]} = \frac{\Gamma[(1+d)p]\Gamma[(1+d)p]}{\Gamma(dp)\Gamma[(2+d)p]},$$

aplicando el resultado (E.4) tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} M(d, p) &= \lim_{p \rightarrow 0+} \frac{\Gamma[(1+d)p]}{\Gamma(dp)} \lim_{p \rightarrow 0+} \frac{\Gamma[(1+d)p]}{\Gamma[(2+d)p]} \\ &= \frac{d}{(1+d)} \frac{(2+d)}{(1+d)} \\ &= \frac{d(2+d)}{(1+d)^2}. \end{aligned}$$

Límite de $M(d, p)$ cuando $p \rightarrow 0+$ Caso $d = 1$. Utilizando la aproximación de Stirling (14) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma^2\left(\frac{2}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{3}{p}\right)} &= \frac{\left(\sqrt{2\pi}\left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{2}{p}-\frac{1}{2}}e^{-\frac{2}{p}}\right)^2}{\left(\sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{p}}\right)\left(\sqrt{2\pi}\left(\frac{3}{p}\right)^{\frac{3}{p}-\frac{1}{2}}e^{-\frac{3}{p}}\right)} [1 + O(p)], p \rightarrow 0+ \\ &= \frac{1}{2} 16^{\frac{1}{p}} 3^{\frac{1}{2} - \frac{6+p}{p}} [1 + O(p)], p \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0+} M(1, p) &= \lim_{p \rightarrow 0+} \frac{\Gamma^2\left(\frac{2}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{3}{p}\right)} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0+} \frac{1}{2} 16^{\frac{1}{p}} 3^{\frac{1}{2} - \frac{6+p}{p}}. \end{aligned}$$

Antes de calcular el límite anterior, notemos que

$$\frac{1}{2} 16^{\frac{1}{p}} 3^{-\frac{3}{p} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} 3^{\frac{1}{2}} \frac{16^{\frac{1}{p}}}{3^{\frac{3}{p}}} = \frac{1}{2} 3^{\frac{1}{2}} \left(\frac{16^{1/3}}{3}\right)^{\frac{3}{p}},$$

en vista de que $\frac{16^{1/3}}{3} \cong .83995 < 1$, se llega a que

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0^+} \left(\frac{16^{1/3}}{3} \right)^{\frac{3}{p}} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{16^{1/3}}{3} \right)^{3p} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Caso $d > 1$. De nuevo, por la aproximación de Stirling (14) tenemos que

$$\begin{aligned} M\left(d, \frac{1}{p}\right) &= \frac{\Gamma^2[(1+d)p]}{\Gamma(dp)\Gamma[(2+d)p]} = \frac{\left(\sqrt{2\pi}((1+d)p)^{(1+d)p-\frac{1}{2}} e^{-(1+d)p}\right)^2}{\sqrt{2\pi}(dp)^{dp-\frac{1}{2}} e^{-dp} \sqrt{2\pi}((2+d)p)^{(2+d)p-\frac{1}{2}} e^{-(2+d)p}} [1 + O(p^{-1})] \\ &= \frac{(1+2d+d^2)^{p+dp}}{(1+d)d^{dp-\frac{1}{2}}(4+4d+d^2)^p(2+d)^{dp-\frac{1}{2}}} [1 + O(p^{-1})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0^+} M(d, p) &= \lim_{p \rightarrow \infty} M\left(d, \frac{1}{p}\right) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\Gamma^2[(1+d)p]}{\Gamma(dp)\Gamma[(2+d)p]} \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{(1+2d+d^2)^{p+dp}}{(1+d)d^{dp-\frac{1}{2}}(4+4d+d^2)^p(2+d)^{dp-\frac{1}{2}}} [1 + O(p^{-1})] \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{d^{2p(1+d)}}{(1+d)d^{2dp-1}d^{2p}} [1 + O(p^{-1})] \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{d^{2p(1+d)}}{(1+d)d^{2p(d+1)-1}} [1 + O(p^{-1})] \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{d}{1+d} [1 + O(p^{-1})] \\ &= 0. \end{aligned}$$

F Tablas

TABLA F.1: Valores de $n^* = \min \{n : \Pr(\bar{M}(X) \geq \frac{3}{4}; p) > 0.05\}$, $p \in (0.2, 10)$, \bar{M} está definido en (11). El valor de n^* se obtuvo mediante un procedimiento de búsqueda y simulación. Para cada tamaño de muestra de v.a.i.i. GG(0, 1, p) se realizaron 10000 réplicas.

Cada variable aleatoria $GG(0, 1, p)$ se simuló de acuerdo con el procedimiento descrito en el Apéndice A, pág. 30.

TABLA F.2: Valores de las medias y medianas para cada una de los filtros de los datos de la pieza musical Carmina Burana.

TABLA F.3: 25 observaciones de la distribución $GG(0, 1, 3)$. Valores simulados mediante el procedimiento descrito en la página 30.

TABLA F.4: 25 observaciones de la distribución $GG(0, 1, 1)$. Valores simulados mediante el procedimiento descrito al final del Apéndice A, (pág 30).

p	n^*	p	n^*	p	n^*	p	n^*	p	n^*
0.2	5	2.2	31	4.2	138	6.2	389	8.2	1046
0.4	6	2.4	38	4.4	162	6.4	439	8.4	1071
0.6	8	2.6	42	4.6	179	6.6	479	8.6	1163
0.8	8	2.8	47	4.8	196	6.8	541	8.8	1273
1.0	11	3.0	61	5.0	216	7.0	620	9.0	1324
1.2	13	3.2	73	5.2	234	7.2	653	9.2	1482
1.4	15	3.4	77	5.4	272	7.4	676	9.4	1556
1.6	20	3.6	95	5.6	294	7.6	811	9.6	1690
1.8	23	3.8	100	5.8	347	7.8	877	9.8	1816
2.0	26	4.0	123	6.0	364	8.0	942	10.0	2019

Tabla F.1. Valores de $n^* = \min \{n : \Pr(\bar{M}(X) \geq \frac{3}{4}; p) > 0.05\}$, $p \in (0.2, 10)$.

	Media	Mediana		Media	Mediana
0	-0.0^3443	-0.0^3443	16	0.0^5312	0.0^5312
1	0.0^5312	-0.0^3525	17	0.0^5169	0.0^5169
2	0.0^5169	0.0^3304	18	0.0^4199	0.0^4199
3	0.0^4199	-0.0^3156	19	-0.0^6619	-0.0^6619
4	-0.0^6619	-0.0^4627	20	-0.0^5445	-0.0^5445
5	-0.0^5445	-0.0^5736	21	0.0^5173	0.0^5173
6	0.0^5173	-0.0^4847	22	-0.0^5152	-0.0^5152
7	-0.0^5152	-0.0^4340	23	0.0^6693	0.0^6693
8	0.0^6693	-0.0^4120	24	0.0^5106	0.0^5106
9	0.0^5106	-0.0^5593	25	0.0^5323	0.0^5323
10	0.0^5323	0.0^4213	26	-0.0^5424	-0.0^5424
11	-0.0^5424	0.0^4133	27	-0.0^6334	-0.0^6334
12	-0.0^6334	0.0^5423	28	-0.0^6617	-0.0^6617
13	-0.0^6617	0.0^5823	29	0.0^5148	0.0^5148
14	0.0^5148	-0.0^5101	30	0.0^6270	0.0^6270
15	0.0^6270	0.0^5544	31	0.0^6507	0.0^6507

Tabla F.2. Valores de las medias y medianas para cada una de las bandas de los datos del Codificador de Audio MP3

x_{1-5}	x_{6-10}	x_{11-15}	x_{16-20}	x_{21-25}
1.23095	-1.18200	1.45424	1.98366	0.80739
1.01731	1.13537	-0.82535	-0.86127	-0.67881
1.29247	1.11843	0.67120	1.43192	-0.15525
0.00224	0.15930	1.79635	-0.84292	-0.73295
-1.45834	0.78456	-0.82832	-0.59772	0.11567

Tabla F.3. 25 observaciones de la distribución $\text{GG}(0, 1, 3)$.

z_{1-5}	z_{6-10}	z_{11-15}	z_{16-20}	z_{21-25}
-0.43141	1.29497	-0.64378	0.90504	1.07424
0.99215	0.46702	-0.71231	0.39473	-0.43733
-0.14126	-0.60484	-0.21146	0.14831	0.53406
1.04025	1.00121	-0.62999	0.85679	-0.80782
-0.52153	-0.63275	-0.87137	-0.66678	-0.59262

Tabla F.4. 25 observaciones de la distribución $\text{GG}(0, 1, 1)$.

Bibliografía

- [1] Choi, S. Cichocki, A. and Amari, S. (2000) Local stability analysis of flexible independent component analysis algorithm. *Proceedings of 2000 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP2000, Istanbul, Turkey, June 5-9, 2000*, pp. 3426-3429.
- [2] Gradshteyn, I. S. y Ryzhik, I. M. (1994). *Table of Integrals, Series, and products*. Fifth Edition. Alan Jeffrey, Editor. Academic Press.
- [3] Gurland, John (1956). An inequality satisfied by the Gamma function. *Skand. Aktuarietidskr* **39**, pp. 171–172.
- [4] Kalbfleisch, J. G. (1985). *Probability and Statistical Inference*. Volume 2: *Statistical Inference*. Second edition. Springer-Verlag.
- [5] López Esquivel, Juan (2000). Una metodología de investigación en la estimación del parámetro de forma de la distribución Gaussiana generalizada. Unpublished dissertation. Maestría en Sistemas de Calidad. ITESM, campus Monterrey.
- [6] MathSoft, Inc. (1996). MathSoft, S+GARCH *User's Manual*, Data Analysis Products Division, MathSoft, Seattle.

- [7] Michael, J.R., Schucany, W.R. & Haas, R.W. (1976). Generating random variates using transformation with multiple roots. *The American statistician*, **30**, 88-89.
- [8] Meeker, W. Q. y Escobar, L. A. (1998). *Statistical Methods for Reliability Data*. Wiley series in Probability and Statistics.
- [9] Mood, A.M., Graybill, F.A. & Boes, D.C. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics*. Third edition.
- [10] Rodríguez-Dagnino, R. M., León-García, A., (1998). An Explicit Estimator for the Shape Parameter of the Generalized Gaussian Distribution. *Comunicación Interna. Presentada en el XII Foro Nacional de Estadística, Monterrey, N. L.*
- [11] Sharifi, K. and Leon-Garcia, A. (1995). Estimation of shape parameter for generalized Gaussian distribution in subband decomposition of video. *IEEE Trans. on Circuits and Systems for Video Technology*, Vol **5**, No. 1 Feb. 1995 pp. 52-56.
- [12] Varanasi, M.K., Aazhang, B. (1989). Parametric generalized Gaussian density estimation, *J. Acoust. Soc. Am.* 86 (4), October 1989, pp. 1404.
- [13] Wu, H.-C. y Principe, J. (1998). Minimum entropy algorithm for source separation. *Proceedings of the 1998 Midwest symposium on Systems and Circuits*.