

PLANES ÓPTIMOS PARA PRUEBAS DE VIDA  
ACELERADA CON ESFUERZOS ESCALONADOS  
*José del Carmen Jiménez Hernández and Enrique R. Villa D.*

Comunicación Técnica No I-07-07/07-05-2007  
(PE/CIMAT)



# Planes óptimos para pruebas de vida acelerada con esfuerzos escalonados

José del Carmen Jiménez Hernández<sup>1</sup>

*Universidad Tecnológica de la Mixteca*

*Instituto de Física y Matemáticas*

*69000 Huajuapán de León, Oaxaca, México*

Enrique R. Villa D.<sup>2</sup>

*Centro de Investigación en Matemáticas*

*Departamento de Probabilidad y Estadística*

*36240 Guanajuato, Guanajuato, México*

---

## Resumen

Las pruebas de vida acelerada de un producto o material son usadas para obtener información rápida de su distribución de vida. Las unidades en prueba se someten a niveles de esfuerzo alto y fallan más tempranamente que en condiciones de diseño. La información que se obtiene en condiciones aceleradas se analiza en términos de un modelo y después se extrapola en condiciones de diseño para estimar la distribución de vida. Los esfuerzos se pueden aplicar de diferentes maneras, los métodos más comunes son esfuerzo constante y esfuerzo escalonado. En este artículo se obtienen planes óptimos para pruebas de vida acelerada con esfuerzos escalonados suponiendo que los tiempos de falla de unidades expuestas a esfuerzos constantes siguen una distribución Weibull.

---

## 1. Introducción

Hoy en día los fabricantes enfrentan una presión fuerte para desarrollar nuevos productos con alta tecnología en un tiempo específico, mejorando la productividad, la

---

<sup>1</sup>*jcjim@mixteco.utm.mx*

<sup>2</sup>*villadi@cimat.mx*

confiabilidad del producto y sobre todo la calidad. Esto ha motivado al desarrollo de métodos en el área de la ingeniería y el uso más extenso de diseños de experimentos para el producto y mejorar el proceso. Estos requerimientos de alta confiabilidad han aumentado la necesidad de adelantar la prueba de materiales, componentes y sistemas. Esto está en línea con la filosofía de la calidad moderna para producir productos de alta confiabilidad: lograr alta confiabilidad mejorando el diseño y el proceso de fabricación. Estimar la distribución del tiempo a la falla o la duración a largo plazo de productos con *alta confiabilidad*, es particularmente difícil. Los productos más modernos son diseñados para operar sin fallas por años, décadas o mucho más. Así pocas unidades fallarán o se degradarán en una prueba en un tiempo adecuado a condiciones normales de uso.

Las pruebas de vida acelerada de un producto o material son usadas para obtener información rápida de su distribución de vida. Las unidades en prueba se someten a niveles de esfuerzo alto y fallan más tempranamente que en condiciones de diseño. La información que se obtiene en condiciones aceleradas se analiza en términos de un modelo y después se extrapola en condiciones de diseño para estimar la distribución de vida. Tales pruebas reducen tiempo y costo. Algunos niveles de esfuerzo alto involucran, temperatura, voltaje, presión, o algunas combinaciones de estos.

Los esfuerzos se pueden aplicar de diferentes maneras, los métodos más comunes son esfuerzo constante y esfuerzo escalonado. En una prueba de vida acelerada (PVA) bajo esfuerzo constante, cada unidad se somete a esfuerzo constante durante el estudio, y la vida a nivel de diseño se estima por métodos de regresión. En una prueba con esfuerzo escalonado, una unidad se somete sucesivamente a esfuerzos de nivel creciente. Primero una unidad se somete a un nivel de esfuerzo constante por una duración de tiempo especificada, si no falla, se somete a otro nivel de esfuerzo más alto por otra duración de tiempo especificada y así sucesivamente. De esta forma, el esfuerzo sobre una unidad incrementa paso a paso hasta que falla. Usualmente todas las unidades siguen el mismo patrón de niveles de esfuerzo y tiempos de prueba especificados.

## 2. Modelo de daño acumulado

Para cada esfuerzo escalonado, hay una distribución  $F_0(t)$  al tiempo  $t$  de fallas en

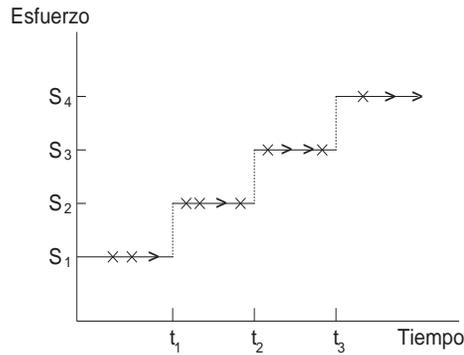


Figura 1: Esfuerzo escalonado ( $\times$  falla,  $\rightarrow$  no falla).

la prueba. Usualmente uno quiere la distribución del tiempo a la falla bajo esfuerzo constante de la unidad la cual esta en uso. Así, uno necesita un modelo de daño acumulado para un modo de falla que relacione la distribución bajo esfuerzo escalonado y la distribución bajo esfuerzo constante. A continuación se describe tal modelo.

## 2.1. Supuestos

El modelo para el modo de falla supone que la vida restante de las unidades sólo depende de la fracción de fallas que se han acumulado hasta ese momento y del esfuerzo actual (la propiedad de Markov). Sin embargo, al esfuerzo actual, las unidades que no han fallado lo harán de acuerdo a la distribución acumulada para el esfuerzo, pero empezando en la fracción de fallas acumulada previamente. También, el cambio en el esfuerzo no tiene efecto sobre la vida, solo el nivel de esfuerzo.

Las Figuras 1-3 presentan el modelo de daño acumulado para un modo de falla. La Figura 1 muestra un patrón escalonado con cuatro escalones, fallas y tiempo de censura de las unidades. La Figura 2, las cuatro distribuciones para los esfuerzos constantes  $V_1, V_2, V_3$  y  $V_4$ , lo que representa que las unidades siguen la distribución acumulada dada por  $V_1$  hasta el tiempo  $t_1$ , cuando el esfuerzo se incrementa de  $V_1$  a  $V_2$ , las unidades que no han fallado siguen la distribución de  $V_2$  empezando en la fracción de fallas acumulada, lo mismo pasa cuando se incrementa el esfuerzo de  $V_2$  a  $V_3$ , etc., las unidades que no han fallado siguen la función de distribución acumulada siguiente empezando en la fracción de fallas acumulada. Finalmente la función de distribución

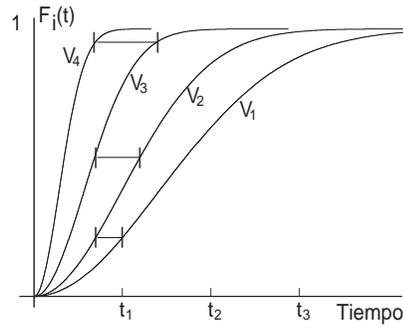


Figura 2: Función de distribución para cada uno de los esfuerzos constantes ( $V_1, V_2, V_3$  y  $V_4$ ).

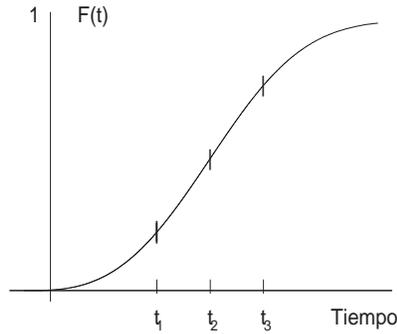


Figura 3: Función de distribución acumulada.

acumulada bajo esfuerzo escalonado se muestra en la Figura 3, la cual consiste de segmentos de distribuciones para esfuerzos constantes. En resumidas cuentas, este modelo va tomando la información previa acumulada de cada unidad.

## 2.2. Formulación matemática

El modelo de daño acumulado para un modo de falla se describe matemáticamente como sigue. Supóngase que para un patrón en particular, el escalón  $i$  corre al esfuerzo  $V_i$ , empezando al tiempo  $t_{i-1}$  hasta el tiempo  $t_i$  ( $t_0 = 0$ ). La función de distribución acumulada para unidades a esfuerzo constante  $V_i$  es  $F_i(t)$ .

**Paso 1.** La fracción acumulada de unidades que fallan en el paso 1 es

$$F(t) = F_1(t), \quad 0 \leq t \leq t_1.$$

**Paso 2.** El paso 2 empieza a un tiempo equivalente  $s_1$  el cual podría producir la misma fracción de fallas acumuladas de la población. Así,  $s_1$  es la solución de

$$F_2(s_1) = F_1(t_1).$$

La fracción de fallas acumuladas en el paso 2 al tiempo total  $t$  es

$$F(t) = F_2[(t - t_1) + s_1], \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

**Paso 3.** Similarmente, el paso 3 empieza al tiempo  $s_2$  dado por

$$F_3(s_2) = F_2(t_2 - t_1 + s_1).$$

Entonces

$$F(t) = F_3[(t - t_2 + s_2)], \quad t_2 \leq t \leq t_3.$$

**Paso  $i$ .** En general, el paso  $i$  empieza al tiempo  $s_{i-1}$  dado por

$$F_i(s_{i-1}) = F_{i-1}(t_{i-1} - t_{i-2} + s_{i-2}).$$

Entonces

$$F(t) = F_i[(t - t_{i-1} + s_{i-1})], \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i.$$

Así  $F(t)$  para un esfuerzo escalonado consiste de segmentos de las distribuciones acumuladas  $F_1()$ ,  $F_2()$ , etc., como se muestra en la Figura 3.

### 3. Planes óptimos modelo log-lineal Weibull

*Notación*

- $n$  — Tamaño total de la muestra
- $x_0, x_1, x_2$  — Esfuerzos transformados, de diseño, bajo y alto, respectivamente
- $\beta_0, \beta_1$  — Parámetros de la función loglineal entre el esfuerzo y la vida característica  $\eta$
- $\gamma_0, \gamma_1$  — Parámetros del modelo reparametrizado
- $\xi$  — Factor de extrapolación
- $\tau$  — Longitud de tiempo al esfuerzo bajo
- $\tau^*$  — Tiempo de prueba óptimo al nivel  $x_1$
- $T$  — Tiempo de censura
- $p_1^*, p_2^*, p_c^*$  — Proporción de fallas esperada al nivel  $x_1, x_2$  y después de  $T$

*Suposiciones básicas.*

1. Sólo se usan dos niveles de esfuerzo  $x_1$  y  $x_2$  ( $x_1 < x_2$ ), los cuales estan dados.
2. Para cualquier nivel de esfuerzo, la distribución del tiempo a la falla es Weibull con parámetro de escala  $\eta(x) = \exp(\beta_0 + \beta_1 x)$  y parámetro de forma  $\beta$  constante y es independiente del esfuerzo, es decir, los log-tiempos a la falla siguen una distribución de valores extremos (VE) para mínimos con parámetro de localización  $\mu(x) = \ln \eta(x) = \beta_0 + \beta_1 x$  y parámetro de escala  $\sigma = 1/\beta$ .
3. El modelo de daño acumulado es válido.

*Criterio de optimización.*

El criterio de optimización usado aqui es minimizar la varianza asintótica del estimador de máxima verosimilitud (EVM) del cuantil  $P$  de la distribución a un nivel de diseño especificado.

*Planteamiento de la prueba.*

Supóngase que se tiene  $n$  unidades al inicio de la prueba y trabajan hasta un tiempo  $\tau$  si la unidad no ha fallado, se cambia al esfuerzo  $x_2$  y la prueba continua hasta que todas las unidades fallan o hasta un tiempo de censura especificado.

*Modelo reparametrizado.*

Es conveniente reparametrizar el modelo, definamos el factor de extrapolación como,

$$\xi_j = \frac{(x_j - x_2)}{(x_0 - x_2)}, \quad j = 0, 1, 2,$$

donde  $x_0$  y  $x_2$  son los niveles de esfuerzo de diseño y alto, respectivamente. Nótese que para el nivel de esfuerzo alto  $x = x_2$ ,  $\xi_2 = 0$ ; y para el nivel de diseño  $x = x_0$ ,  $\xi_0 = 1$ . Entonces, el parámetro de localización  $\mu(x)$  de la distribución de VE puede escribirse en términos de  $\xi_j$  como

$$\mu(\xi_j) = \gamma_0 + \gamma_1 \xi_j, \quad j = 0, 1, 2. \quad (1)$$

donde los nuevos parámetros  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  se relacionan con  $\beta_0$  y  $\beta_1$  por

$$\gamma_0 = \beta_0 + \beta_1 x_2$$

y

$$\gamma_1 = \beta_1(x_0 - x_2) = \mu(x_0) - \mu(x_2).$$

El EMV del cuantil  $P$  de la distribución es

$$\hat{y}_P = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \xi + u_P \hat{\sigma},$$

por lo que a nivel de diseño  $x_0$ , es decir, cuando  $\xi_0 = 1$ , es

$$\hat{y}_P = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 + u_P \hat{\sigma},$$

donde  $\hat{\gamma}_0$ ,  $\hat{\gamma}_1$  y  $\hat{\sigma}$  son los EMV y  $u_P = \ln[-\ln(1-P)]$  es el cuantil  $P$  de la distribución de VE estándar. La varianza asintótica de éste estimador es el valor de la forma cuadrática

$$\text{Var}(\hat{y}_P) = [1, 1, u_P] \Sigma [1, 1, u_P]', \quad (2)$$

donde la  $'$  denota el vector transpuesto y  $\Sigma$  es la matriz de varianzas y covarianzas de los parámetros  $\hat{\gamma}_0$ ,  $\hat{\gamma}_1$  y  $\hat{\sigma}$ , por lo que se necesita dicha matriz para minimizar la función objetivo.

Ahora procedamos a escribir la función de verosimilitud para este problema. Así, por el supuesto 2, (1) y las suposiciones del modelo de daño acumulado, la función de distribución acumulada de una unidad en prueba bajo esfuerzo escalonado es,

$$F(t) = \begin{cases} F_1(t) = 1 - \exp \left\{ - \exp \left( \frac{\ln t - \mu(\xi_1)}{\sigma} \right) \right\}, & -\infty < \ln t \leq \ln \tau \\ F_2(t + s - \tau) = 1 - \exp \left\{ - \exp \left( \frac{\ln(t + s - \tau) - \mu(\xi_2)}{\sigma} \right) \right\}, & \ln \tau < \ln t \leq \ln T. \end{cases} \quad (3)$$

donde  $s$  es la solución de  $F_2(s) = F_1(\tau)$ , es decir,

$$s = \tau \exp[-\mu(\xi_1)] \exp[\mu(\xi_2)] = \tau \exp[\beta_1(\xi_2 - \xi_1)],$$

así,

$$F_2(t + s - \tau) = 1 - \exp \left\{ - \exp \left( \frac{\ln(t + \tau \exp[\beta_1(\xi_2 - \xi_1)] - \tau) - \mu(\xi_2)}{\sigma} \right) \right\}, \ln \tau < \ln t \leq \ln T.$$

En consecuencia, la función de densidad es,

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) = \frac{1}{\sigma t} \exp \left[ \frac{\ln t - \mu(\xi_1)}{\sigma} - \exp \left( \frac{\ln t - \mu(\xi_1)}{\sigma} \right) \right] \\ \quad = \frac{1}{\sigma t} \phi_{VE}(z_1(t)), \quad -\infty \leq \ln t \leq \ln \tau \\ f_2(t) = \frac{1}{\sigma(t+s-\tau)} \exp \left[ \frac{\ln(t+s-\tau) - \mu(\xi_2)}{\sigma} - \exp \left( \frac{\ln(t+s-\tau) - \mu(\xi_2)}{\sigma} \right) \right] \\ \quad = \frac{1}{\sigma(t+s-\tau)} \phi_{VE}(z_2(t)), \quad \ln \tau < \ln t \leq \ln T, \end{cases} \quad (4)$$

donde  $z_1(t) = [\ln t - \mu(\xi_1)]/\sigma$  y  $z_2(t) = [\ln(t+s-\tau) - \mu(\xi_2)]/\sigma$ .

Sean

$$I_1 = I_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [0, \tau] \\ 0, & \text{si } t \notin [0, \tau]. \end{cases}$$

$$I_2 = I_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in (\tau, T] \\ 0, & \text{si } t \notin (\tau, T] \end{cases}$$

$$I_3 = I_3(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t > T \\ 0, & \text{si o.c.} \end{cases}$$

Con esto la función de log-verosimilitud para una observación es

$$l = l(\alpha_1, \beta_1, \sigma) = I_1 \ln \left[ \frac{1}{\sigma t} \phi_{VE}(z_1(t)) \right] + I_2 \ln \left[ \frac{1}{\sigma(t+s-\tau)} \phi_{VE}(z_2(t)) \right] \\ + I_3 \ln [1 - \Phi_{VE}(z_2(T))] \quad (5)$$

donde,  $\Phi_{VE}(\cdot)$  es la función de distribución acumulada de valores extremos estándar y  $z_2(T) = [\ln(T+s-\tau) - \mu(\xi_2)]/\sigma$ .

Sustituyendo las cantidades de interés, después de algunas simplificaciones se tiene

$$l = l(\alpha_1, \beta_1, \sigma) = I_1 [-\ln \sigma - \ln t + z_1(t) - e^{z_1(t)}] \\ + I_2 [-\ln \sigma - \ln(t+s-\tau) + z_2(t) - e^{z_2(t)}] \\ + I_3 [-e^{z_2(T)}]. \quad (6)$$

Supóngase que a la  $i$ -ésima observación  $t_i$  le corresponde el valor  $\xi_{ji}$ ,  $j = 1, 2$  y la correspondiente función de log-verosimilitud es  $l_i$ . Entonces la log-verosimilitud  $l_0$

para las  $n$  observaciones independientes es

$$l_0 = \sum_{i=1}^n l_i$$

la cual es función de  $t_i$ ,  $T$ ,  $\xi_{ji}$  y de los parámetros  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  y  $\sigma$ .

Antes de calcular las primeras derivadas de (6) con respecto a cada uno de los parámetros del modelo, notemos lo siguiente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_1(t)}{\partial \gamma_0} &= -\frac{1}{\sigma}, & \frac{\partial z_1(t)}{\partial \gamma_1} &= -\frac{\xi_1}{\sigma}, & \frac{\partial z_1(t)}{\partial \sigma} &= -\frac{1}{\sigma} z_1(t), \\ \frac{\partial z_2(t)}{\partial \gamma_0} &= -\frac{1}{\sigma}, & \frac{\partial z_2(t)}{\partial \gamma_1} &= \frac{g(t)}{\sigma} - \frac{\xi_2}{\sigma}, & \frac{\partial z_2(t)}{\partial \sigma} &= -\frac{1}{\sigma} z_2(t), \\ \frac{\partial z_2(T)}{\partial \gamma_0} &= -\frac{1}{\sigma}, & \frac{\partial z_2(T)}{\partial \gamma_1} &= \frac{g(T)}{\sigma} - \frac{\xi_2}{\sigma}, & \frac{\partial z_2(T)}{\partial \sigma} &= -\frac{1}{\sigma} z_2(T), \end{aligned}$$

donde

$$g(y) = \frac{\tau(\xi_2 - \xi_1) \exp[\beta_1(\xi_2 - \xi_1)]}{y + s - \tau}.$$

Por tanto, para una sola observación, las primeras tres derivadas de la función log-verosimilitud para cada uno de los parámetros, después de algunas simplificaciones son,

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \gamma_0} &= \frac{1}{\sigma} [I_1(e^{z_1(t)} - 1) + I_2(e^{z_2(t)} - 1) + I_3 e^{z_2(T)}], \\ \frac{\partial l}{\partial \gamma_1} &= \frac{1}{\sigma} [I_1 \xi_1 (e^{z_1(t)} - 1) + I_2 [-\sigma g(t) + (g(t) - \xi_2)(1 - e^{z_2(t)})] - I_3 e^{z_2(T)}(g(T) - \xi_2)], \\ \frac{\partial l}{\partial \sigma} &= \frac{1}{\sigma} [I_1 \{z_1(t)(e^{z_1(t)} - 1) - 1\} + I_2 \{z_2(t)(e^{z_2(t)} - 1) - 1\} + I_3 z_2(T) e^{z_2(T)}]. \end{aligned}$$

Estas tres expresiones, cuando se suman sobre todas las unidades en prueba, se igualan a cero, se resuelve el sistema de ecuaciones y se obtienen los EMV de los parámetros.

Y las seis segundas derivadas parciales son,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_0^2} &= -\frac{1}{\sigma^2} \left[ \sum_{i=1}^2 I_i e^{z_i(t)} + I_3 e^{z_2(T)} \right], \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_1^2} &= -\frac{1}{\sigma^2} \left\{ I_1 \xi_1^2 e^{z_1(t)} + I_2 [g'(t) \{ \sigma^2 - \sigma(1 - e^{z_2(t)}) \} + (g(t) - \xi_2)^2 e^{z_2(t)}] \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\sigma^2} \left\{ I_3 e^{z_2(T)} [\sigma g'(T) + (g(T) - \xi_2)^2] \right\} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \sigma^2} &= -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial l}{\partial \sigma} - \frac{1}{\sigma^2} \left[ \sum_{i=1}^2 \{ I_i (z_i^2(t) e^{z_i(t)} + z_i(t) (e^{z_i(t)} - 1)) \} + I_3 \{ z_2^2(T) e^{z_2(T)} + z_2(T) e^{z_2(T)} \} \right] \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_0 \gamma_1} &= -\frac{1}{\sigma^2} [I_1 \xi_1 e^{z_1(t)} + I_2 e^{z_2(t)} (\xi_2 - g(t)) + I_3 e^{z_2(T)} (\xi_2 - g(T))] \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_0 \sigma} &= -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial l}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{\sigma^2} \left[ \sum_{i=1}^2 I_i z_i(t) e^{z_i(t)} + I_3 z_2(T) e^{z_2(T)} \right] \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_1 \sigma} &= -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial l}{\partial \beta_1} - \frac{1}{\sigma^2} [I_1 \xi_1 z_1(t) e^{z_1(t)} + I_2 \{ \sigma g(t) + (\xi_2 - g(t)) z_2(t) e^{z_2(t)} \}] + \\ &\quad + \frac{1}{\sigma^2} I_3 z_2(T) e^{z_2(T)} (\xi_2 - g(T)) \end{aligned}$$

donde

$$g'(t) = \frac{dg(t)}{d\gamma_1}$$

Estas seis expresiones estan dadas en términos de las siguientes cantidades aleatorias

$$I_k, \quad k = 1, 2, 3$$

$$I_1 \xi_1^2 e^{z_1(t)},$$

$$I_1 \xi_1 z_1(t) e^{z_1(t)},$$

$$I_k z_k^m(t) e^{nz_k(t)}, \quad k = 1, 2, \quad m = 0, 1, 2, \quad n = 0, 1,$$

$$I_2 g'(t) e^{nz_2(t)}, \quad n = 0, 1,$$

$$I_2 (\xi_2 - g(t)) z_2(t) e^{z_2(t)},$$

$$I_2(\xi_2 - g(t))^2 e^{z_2(t)},$$

e

$$I_2 g(t).$$

Sean

$$c_1 = \frac{\ln \tau - \mu(\xi_1)}{\sigma}$$

$$c_2 = \frac{\ln(T + s - \tau) - \mu(\xi_2)}{\sigma}$$

$$a = \tau(\xi_2 - \xi_1)^2 e^{-\mu(\xi_1) + \mu(\xi_2)}$$

$$b = \tau(\xi_2 - \xi_1)^2 e^{-\mu(\xi_1)}$$

$$a_1 = \tau(\xi_2 - \xi_1) e^{-\mu(\xi_1) + \mu(\xi_2)}$$

$$b_1 = \tau(\xi_2 - \xi_1) e^{-\mu(\xi_1)}$$

y

$$w_k = e^{z_k(t)}, \quad k = 1, 2.$$

Los elementos de la matriz de información de Fisher para una observación a  $\xi_{ji}$  se obtienen tomando las esperanzas negativas a las segundas derivadas de la función de log-verosimilitud, que después de algunos cálculos son,

$$\begin{aligned}
F_{11} &= E \left( -\frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_0^2} \right) = \frac{1}{\sigma^2} \Phi_{VE}(z_2(T)) \\
F_{22} &= E \left( -\frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_1^2} \right) = \frac{1}{\sigma^2} \left\{ \xi_1^2 \int_0^{e^{c_1}} w_1 e^{-w_1} dw_1 + \int_{e^{c_1}}^{e^{c_2}} f_1(w_2) dw_2 \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{\sigma^2} e^{z_2(T)} [\sigma g'(T) + (g(T) - \xi_2)^2] \Phi_{VE}(z_2(T)) \\
F_{33} &= E \left( -\frac{\partial^2 l}{\partial \sigma^2} \right) = \frac{1}{\sigma^2} \left\{ \int_0^{e^{c_1}} f_2(w_1) dw_1 + \int_{e^{c_2}}^{e^{c_1}} f_2(w_2) dw_2 \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{\sigma^2} z_2(T) e^{z_2(T)} (z_2(T) + 1) \Phi_{VE}(z_2(T)) \\
F_{12} &= E \left( -\frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_0 \gamma_1} \right) = \frac{\xi_1}{\sigma^2} \int_0^{e^{c_1}} w_1 e^{-w_1} dw_1 + \\
&\quad + \frac{1}{\sigma^2} \left\{ \int_{e^{c_2}}^{e^{c_1}} (\xi_2 w_2 + b_1 w_2^{-\sigma+1}) e^{w_2} dw_2 + e^{z_2(T)} (\xi_2 - g(T)) \Phi_{VE}(z_2(T)) \right\} \\
F_{13} &= E \left( -\frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_0 \sigma} \right) = \frac{1}{\sigma^2} \left\{ \int_0^{e^{c_1}} w_1 \ln w_1 e^{-w_1} dw_1 + \int_{e^{c_2}}^{e^{c_1}} w_2 \ln w_2 e^{-w_2} dw_2 \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{\sigma^2} z_2(T) e^{z_2(T)} \Phi_{VE}(z_2(T)) \\
F_{23} &= E \left( -\frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_1 \sigma} \right) = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{e^{c_1}} w_1 \ln w_1 e^{-w_1} dw_1 + \\
&\quad + \frac{1}{\sigma^2} \int_{e^{c_2}}^{e^{c_1}} (b_1 w_2^{-\sigma} + \xi_2 w_2 \ln w_2 - b_1 \ln w_2 w_2^{-\sigma+1}) e^{-w_2} dw_2 + \\
&\quad + \frac{1}{\sigma^2} (\xi_2 - g(T)) z_2(T) e^{z_2(T)} \Phi_{VE}(z_2(T)),
\end{aligned}$$

donde

$$f_1(w_2) = [(\sigma^2 - \sigma) b w_2^{-\sigma} + \sigma b w_2^{-\sigma+1} + b^2 w_2^{-2\sigma+1} - 2\xi_1 b_1 w_2^{-\sigma+1} + \xi_2^2 w_2] e^{-w_2},$$

$$f_2(w_k) = (w_k \ln w_k + w_k + 1) \ln w_k e^{-w_k}, \quad k = 1, 2.$$

Aquí,  $F_{11}$  se calcula notando que

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_0^2} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial l}{\partial \gamma_0} - \frac{1}{\sigma^2} (I_1 + I_2).$$

Y los demás elementos se calculan con cambios de variables adecuados y con la ayuda de que

$$E\left(\frac{\partial l}{\partial \gamma_0}\right) = 0, \quad E\left(\frac{\partial l}{\partial \gamma_1}\right) = 0, \quad E\left(\frac{\partial l}{\partial \sigma}\right) = 0,$$

$$E(I_1) = \Phi_{VE}(z_2(\tau)), \quad E(I_2) = \Phi_{VE}(z_2(T)) - \Phi_{VE}(z_2(\tau)), \quad E(I_3) = 1 - \bar{\Phi}_{VE}(z_2(T)),$$

donde  $\bar{\Phi}_{VE}(\cdot)$  es la función de confiabilidad de la distribución de VE estándar.

Con lo anterior, la matriz de información de Fisher para cualquier plan óptimo con una muestra de  $n$  observaciones independientes es

$$F = n \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix}$$

en donde  $F_{13} = F_{31}$ ,  $F_{12} = F_{21}$  y  $F_{23} = F_{32}$ , la cual es función de  $\tau$ ,  $T$ ,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  y  $\sigma$ . Por lo que la matriz de varianzas y covarianzas asintótica  $\Sigma$  de los EMV  $\hat{\gamma}_0$ ,  $\hat{\gamma}_1$  y  $\hat{\sigma}$  es la inversa de la correspondiente matriz de información de Fisher, esto es,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{Var}(\hat{\gamma}_0) & \text{Cov}(\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1) & \text{Cov}(\hat{\gamma}_0, \hat{\sigma}) \\ \text{Cov}(\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1) & \text{Var}(\hat{\gamma}_1) & \text{Cov}(\hat{\gamma}_1, \hat{\sigma}) \\ \text{Cov}(\hat{\gamma}_0, \hat{\sigma}) & \text{Cov}(\hat{\gamma}_1, \hat{\sigma}) & \text{Var}(\hat{\sigma}) \end{pmatrix} = F^{-1}.$$

Por lo que la varianza asintótica del EMV del cuantil  $P$  de la distribución a nivel de diseño dada en (2) toma la forma,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{y}_P) &= \text{Var}(\hat{\gamma}_0) + \text{Var}(\hat{\gamma}_1) + u_P^2 \text{Var}(\hat{\sigma}) + 2\text{Cov}(\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1) + \\ &+ 2u_P \text{Cov}(\hat{\gamma}_0, \hat{\sigma}) + 2u_P \text{Cov}(\hat{\gamma}_1, \hat{\sigma}), \end{aligned} \quad (7)$$

la cual sigue siendo función de  $\tau$ ,  $T$ ,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  y  $\sigma$ .

Nótese que la varianza mínima para una muestra de tamaño  $n$  tiene la forma

$$\text{Var}^* \hat{y}_P = \frac{\text{Var}(\hat{y}_P)}{n}$$

Para el plan óptimo considerado aquí, se quiere el  $\tau$  óptimo que minimiza (7) del cuantil  $\hat{y}_P$  estimado en condición de diseño, dados los valores de  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$ ,  $\sigma$ ,

$T$  y  $P$ . La probabilidad  $P$  corresponde al cuantil  $y_P$  de interés, como sabemos, los valores de los parámetros del modelo de vida acelerada  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  y  $\sigma$  se suponen conocidos y los niveles de esfuerzo de diseño  $x_0$  y los de prueba  $x_1$  y  $x_2$  se fijan previamente, al igual que el tiempo de duración de la prueba.

Una vez que encontramos el valor de  $\tau$  que minimiza (7), hemos determinado el plan óptimo para el modelo log-lineal Weibull.

El código de las funciones programadas en S-plus determinan la varianza asintótica de (7), es decir, la varianza asintótica del cuantil  $\hat{y}_P$  en condición de diseño. La función se minimiza con respecto a  $\tau$  utilizando la función `nlmin` de S-plus.

En la siguiente sección, se presenta la determinación de un plan óptimo para una prueba acelerada con esfuerzos escalonados, utilizando la información generada por un estudio piloto de la confiabilidad de interruptores, en el laboratotio de confiabilidad del Centro de Tecnología y Desarrollo del consorcio MABE.

## 4. Ejemplo de determinación de un plan óptimo

Con el interés de obtener la información necesaria para determinar un plan óptimo para una PVA con esfuerzos escalonados, para un tipo de interruptores, se llevo a cabo una prueba piloto acelerando la falla con temperatura, iniciando con  $120^\circ C$  y terminando con  $200^\circ C$ , ya que el ingeniero de confiabilidad que realizó la prueba, comentó que con esfuerzo mayor se podrían generar otros modos de falla diferentes al de diseño.

El esfuerzo de prueba se fué elevando en forma escalonado cada 10 Kciclos y posteriormente cada 5 Kciclos, la prueba terminó a los 125 Kciclos.

El modelo de vida acelerada ajustado fue el Arrhenius-Weibull, los parámetros estimados fueron,

$$\hat{\beta}_0 = 0.99, \quad \hat{\beta}_1 = 0.13 \quad \text{y} \quad \hat{\sigma} = 0.22.$$

De acuerdo a la experiencia del estudio piloto, elegimos los siguientes valores de las tempraturas para la determinación del plan óptimo,

$$T_0 = 80^\circ C, \quad T_1 = 145^\circ C \quad \text{y} \quad T_2 = 200^\circ C,$$

$T_j$ ,  $j = 0, 1, 2$  son las temperaturas de diseño, primer y segundo nivel de esfuerzo, y una duración de la prueba de 200 Kciclos, es decir, el tiempo de censura es  $T = 200$ . En el modelo de vida acelerada log-lineal requerimos el esfuerzo transformado dado por,

$$x_j = \frac{11605}{276.15 + T_j^\circ C}, \quad j = 0, 1, 2.$$

Así, se tiene

$$x_0 = 32.86, \quad x_1 = 27.75 \quad \text{y} \quad x_2 = 24.53.$$

De  $x_0$ ,  $x_1$  y  $x_2$  se obtienen los factores de extrapolación y los nuevos parámetros, dados por,

$$\xi_1 = 0.39 \quad \text{y} \quad \xi_2 = 0,$$

y

$$\hat{\gamma}_0 = 4.23 \quad \text{y} \quad \hat{\gamma}_1 = 1.12.$$

Esta información se introduce en la función Splus que nos dá la varianza del cuantil  $\hat{y}_P$  como función de  $\tau$ . Se minimiza  $\text{Var}(\hat{y}_P)$  para diferentes valores de  $P$ . En el Cuadro 1 se exhibe el valor de  $\tau^*$  de  $\tau$  que minimiza la varianza y también exhibe  $\text{Var}(\hat{y}_P)$ , para diferentes valores de  $P$ .

$P$	$\tau^*$	$\text{Var}(\hat{y}_P)$	$p_1^*$	$p_2^*$	$p_c^*$
0.005	92.00	0.071	0.31	0.68	0.001
0.010	95.79	0.068	0.37	0.56	0.70
0.050	106.70	0.061	0.54	0.24	0.22
0.100	113.65	0.058	0.64	0.11	0.25
0.200	125.70	0.054	0.80	0.016	0.18

Los resultados anteriores nos indican que por ejemplo, si se esta interesado en el cuantil 0.1, dada la información previa, las unidades en prueba estarían en el primer nivel de esfuerzo hasta aproximadamente 114 Kciclos para después cambiar al segundo nivel de esfuerzo y continuar la prueba hasta el tiempo de censura, es decir, hasta  $T = 200$ , así, también se observa que al aumentar el valor de  $P$ , el tiempo óptimo de permanencia de las unidades en prueba en el nivel de esfuerzo bajo aumenta, mientras que con la varianza del cuantil estimado ocurre lo contrario, vá disminuyendo.

En la Figura 4, se muestra la relación entre el tiempo de permanencia de las unidades en el nivel de esfuerzo bajo y la varianza del cuantil estimado. En todos los casos tenemos una función convexa donde el mínimo se va desplazando a la izquierda a menudo que crece la probabilidad  $P$  del cuantil  $\hat{y}_P$ .

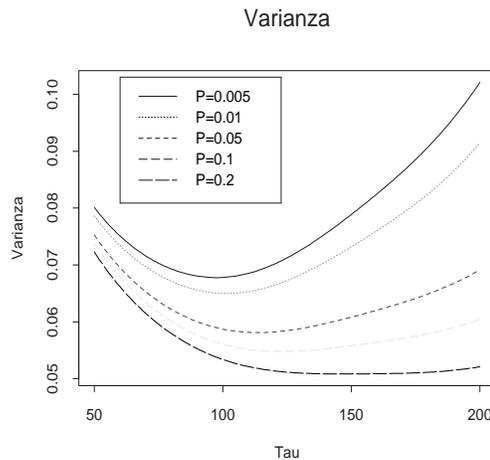


Figura 4: Efecto de la varianza para el diferentes valores de  $P$

En las Figuras 5 y 6 se exhibe la relación entre los valores de  $P$  y de  $\tau^*$  y entre  $P$  y la varianza mínima.

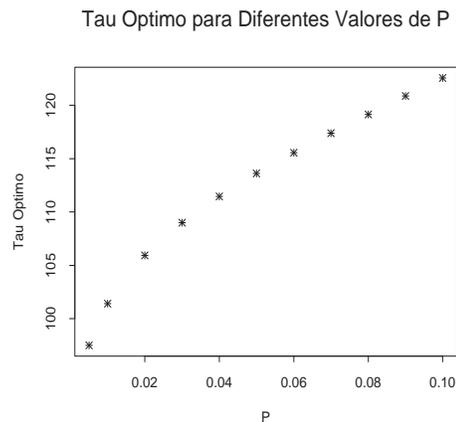


Figura 5:  $\tau^*$  para valores de  $P = 0.005, 0.01, \dots, 0.9, 0.1, 0.2$

## 5. Conclusiones

Los planes óptimos aquí estudiados son adecuados en la medida en que se tenga una buena aproximación de los verdaderos valores de los parámetros del modelo, los cuales

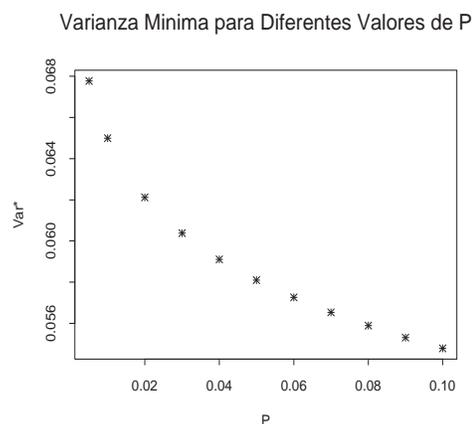


Figura 6:  $\text{Var}(\hat{y}_P)$ ,  $P = 0.005, 0.01, \dots, 0.9, 0.1, 0.2$

se pueden obtener a partir de información previa o de un estudio anterior, tal como se hizo en el ejemplo.

Se hace una revisión de los modelos de vida acelerada y de daño acumulado que son necesarios para modelar el tiempo de vida de unidades que se someten a una prueba acelerada con esfuerzos escalonados.

Se estudian planes óptimos para el modelo log-lineal exponencial con diferentes consideraciones. Inicialmente se supone que la prueba termina hasta que fallan todas las unidades y después se considera el caso en el que la prueba tiene una duración predeterminada.

Se desarrolla un plan óptimo para una prueba acelerada con esfuerzos escalonados, para el modelo log-lineal Weibull. Es este caso se obtiene el tiempo óptimo de aplicación del esfuerzo bajo de prueba, para el caso en que la prueba tiene una duración  $T$ , predeterminada.

Apartir de una prueba piloto de vida acelerada con esfuerzos escalonados, se obtuvo la información necesaria para determinar el plan óptimo para una prueba acelerada con dos esfuerzos escalonados, siguiendo el procedimiento desarrollado en este trabajo.

## Referencias

Abdulla A. Alhadeed and Shei-Shein Yang. (2002), Optimum Simple Step-Stress Plan for Khamis-Higgins Model, *IEEE Transactions on Reliability*, **R-51**, 212-215.

Bai D. S., Cha M. S., and Chung S. W. (1992), Optimum Simple Ramp-Test for

Weibull Distribution and Type-I Censoring, *IEEE Transactions on Reliability*, **R-41**, 407-412.

Meeker, W. Q., and Escobar L. A. (1998), *Statistical Methods for Reliability Data*, John Wiley & Sons, Inc.

Miller R., and Nelson, W. B. (1983), Optimum Simple Step-Stress Plans for Accelerated Life Testing, *IEEE Transactions on Reliability*, **R-29**, 103-108.

Nelson, W. B. and Kielpinski, T. (1980), Accelerated Life Testing - Step Stress Model and Data Analyses, *IEEE Transactions on Reliability*, **R-29**, 103-108.

Nelson, W. B. (1990), *Accelerated Testing: Statistical Models Test Plans, and Data Analyses*, New York: John Wiley & Sons.