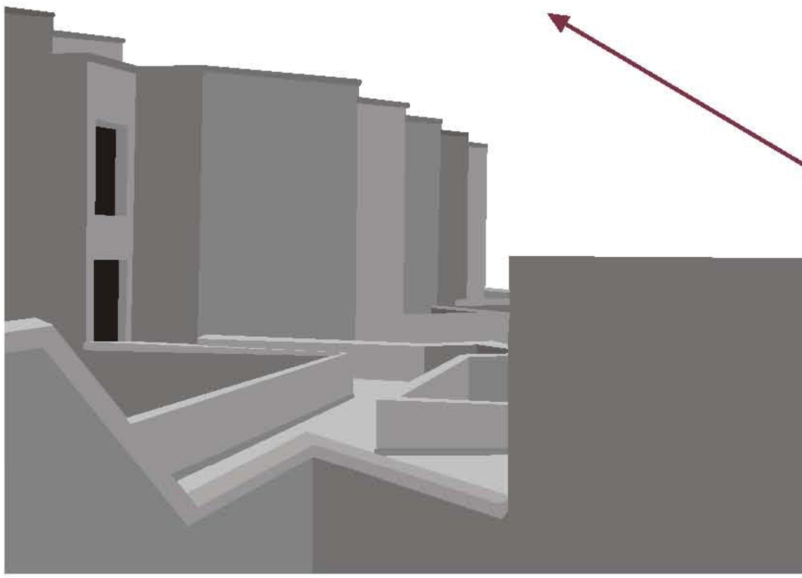

Comunicaciones del CIMAT

VARIACIONES SOBRE UN TEMA DE LIE
(Su "Tercer Teorema Fundamental)

Fausto Ongay

Comunicación del CIMAT No I-14-01/25-04-2014
(MB/CIMAT)

CIMAT

VARIACIONES SOBRE UN TEMA DE LIE (SU "TERCER TEOREMA FUNDAMENTAL")

FAUSTO ONGAY

A la memoria de J.L. Loday,
a quien desafortunadamente
no tuve el honor de conocer.

1. Introducción

Pocas ideas en matemáticas han sido tan fructíferas como la de *grupo de Lie*. Estos grupos son llamados así en honor del matemático noruego **Marius Sophus Lie**, quien junto con Niels Hendrik Abel está considerado como el más importante de los matemáticos noruegos.

Aunque algo simplista, no es del todo desacertado decir que los principales trabajos de Lie surgieron de un intento por trasladar las ideas básicas de la teoría de Galois a las ecuaciones diferenciales; sin embargo, la noción de grupo de Lie trasciende por mucho a su simple aplicación a las ecuaciones diferenciales, ya que estos grupos tienen enorme importancia en muchos otros contextos, que van desde la geometría hasta la física.

Ahora bien, de entre los múltiples resultados que se pueden atribuir a Lie, hay tres teoremas que él mismo consideró como particularmente notables, que son los conocidos como sus *teoremas fundamentales*. A grandes rasgos, éstos relacionan la operación en el grupo con su linealización, la que a su vez determina una estructura algebraica en el espacio tangente a la identidad del grupo, la de *álgebra de Lie*.

En estas notas daremos una breve descripción de las ideas de Lie, centrando nuestra atención con énfasis en el *tercer teorema fundamental*, que en esencia plantea la reconstrucción del grupo a partir del álgebra. Este nombre en realidad tiene hoy día una connotación algo

Este trabajo fue parcialmente apoyado por CONACYT (México), a través del proyecto 106 923, así como por una beca para una estancia sabática en la Universidad de Valencia.

distinta de lo que Lie mismo tenía en mente y, de hecho, dentro de la teoría clásica de los grupos de Lie hay varios teoremas, algunos de las cuales veremos aquí, que dan distintas respuestas a la misma pregunta.

Hablaremos también sobre una generalización de este estudio a un ámbito no clásico, que se ha hecho en los últimos años. Esta cuestión ha sido estudiada a raíz de una pregunta planteada alrededor de 1990 por J. L. Loday, y la historia está aún en evolución, pues se enmarca dentro de lo que se conoce comúnmente como el '*problema de las "coquecigrues"*', que es aún un tema de investigación abierto. No obstante, en el caso que describiremos aquí (llamado a veces *escindido*), hay ahora cierto consenso en que la respuesta que se tiene ya es bastante satisfactoria.

Y veremos además que esto tiene ciertas implicaciones novedosas, incluso para el caso clásico.

2. El programa de Lie

Sophus Lie nació en 1842 en Nordfjordeid (en la costa oeste de Noruega), y falleció en Christiania (hoy Oslo), en 1899, aunque la mayor parte de su vida académica transcurrió en Alemania.

Fig. I. Sophus Lie
(1842 - 1899)

En el desarrollo de sus investigaciones, Lie colaboró activamente (especialmente en el periodo que va de 1870 a 1880) con Felix Klein, quien fue uno de los matemáticos más importantes de esa época, pero de manera aún más directa, con Friedrich Engel, quien era estudiante de Klein, y que durante ese periodo le asistió en la escritura de los tres volúmenes del tratado "Theorie der Transformationsgruppen" (Teoría de los grupos de transformaciones), donde Lie expuso con detalle sus ideas.

Fig. II. Felix Klein
(1849-1925)

Fig. III. Friedrich Engel
(1861-1941)

Antes de pasar a los aspectos matemáticos, hagamos algunos comentarios no técnicos, que ayudan a ubicar el contexto en que se desarrolló el trabajo de Lie:

Por una parte, cabe mencionar que la historia de la colaboración entre Lie y Klein es interesante no sólo en sus aspectos matemáticos, sino también desde el punto de vista humano, debido al contraste de personalidades entre ambos matemáticos. Por lo mismo, y aunque sin duda vale la pena conocerla, la historia es algo complicada así que no la expondremos con detalle aquí, y simplemente nos restringiremos a agregar que fue en parte gracias a ella que Klein concibió su célebre "Programa de Erlangen", donde identificó el estudio de una geometría al de su grupo de simetrías, algo que permitió entender mejor el sentido de las geometrías no euclidianas, por ejemplo.

Pero por otra parte, hay también que hacer hincapié en que la noción de grupo de Lie no surgió de la nada, al contrario, como suele suceder con las teorías matemáticas, había un contexto favorable para que el trabajo de Lie diera sus frutos. Por ejemplo, otros dos matemáticos contemporáneos de Lie que podríamos destacar son Camille Jordan, quien hizo mucho por difundir y estructurar las ideas de Galois sobre los grupos, y quien en cierto modo convenció a Lie de la importancia de la noción de grupo, así como Wilhelm Killing, quien descubrió muchos resultados sobre los grupos de Lie de manera independiente (aunque quizá con menor profundidad que Lie).

Además, es claro que algunos de los grupos de Lie –como el grupo de rotaciones– han estado presentes de manera más o menos explícita dentro de las matemáticas desde hace mucho tiempo. Por ello, no es de extrañar que Lie tuviera también varios distinguidos precursores, que incluyen no sólo al ya citado Galois, sino también a S. D. Poisson, N. Abel, G. Sylow, A. Cayley, C. G. Jacobi, etc.

Para nuestros propósitos destacan en particular Leonhard Euler y William Rowan Hamilton:

Euler, quien casi seguramente es el matemático más prolífico de todos los tiempos, clasificó las isometrías del plano en función de sus puntos fijos, pero además fue él quien introdujo los llamados *ángulos de Euler*, como parámetros para estudiar las rotaciones.

Fig. IV. Leonhard Euler
(1707-1783)

Hamilton, por su parte, hizo contribuciones muy importantes a la mecánica clásica, pero sobre todo lo citamos porque inventó (o descubrió) los llamados “cuaterniones”, que en cierto modo “encierran”, dentro de una estructura algebraica unificada, a la vez al grupo de rotaciones en tres dimensiones y a su álgebra de Lie; y este es un ejemplo que nos será de gran utilidad en nuestra presentación.

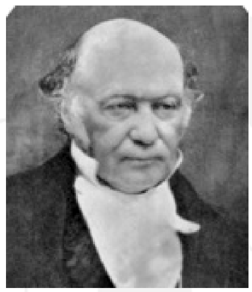

Fig. V. William Rowan Hamilton
(1805-1865)

Pero hacia el otro lado en la línea del tiempo, es también de señalar que los trabajos de Lie tuvieron una enorme influencia en las siguientes generaciones de matemáticos, ya que aprovechando el ímpetu de las nuevas ideas que empezaron a permear las matemáticas, como la topología y el álgebra abstracta, el estudio de los grupos de Lie tuvo un notable desarrollo, que en el periodo comprendido aproximadamente entre 1900 y 1930 lo condujo a adquirir su fisonomía actual.

En este proceso destacan por ejemplo Élie Cartan, a quien se debe la clasificación de las álgebras de Lie semisimples, y Hermann Weyl, quien fue el principal artífice de la teoría de representaciones de grupos compactos, pero también I. Schur, H. Poincaré, E. Noether, J. Von Neumann, E. Dynkin y podríamos agregar un largo etcétera.

Fig. VI. Elie Cartan
(1869-1951)

Fig. VII. Hermann Weyl
(1885-1955)

Para no prolongar demasiado esta introducción, finalicemos este esbozo de la parte histórica con las siguientes observaciones:

En realidad, Lie no consideraba a sus grupos como los entendemos hoy —sin duda porque no tenía a su disposición la herramienta adecuada para ello—, y sólo trabajaba con objetos definidos en entornos apropiados de la identidad, así que hoy diríamos que estudiaba *grupos locales*. Pero es aún más importante señalar que desde el inicio se dio cuenta que este estudio debía acompañarse de lo que él llamó las *transformaciones infinitesimales* asociadas, que constituyen lo que hoy se conoce como el álgebra de Lie del grupo. Esto es algo que es muy específico del caso continuo, y ciertamente es una idea que no estaba presente en el trabajo de Galois.

Pero el punto es que si bien en un sentido esta relación —entre el grupo y el álgebra— es hasta cierto punto sencilla y natural (ya que, como hemos dicho, la operación en el álgebra básicamente no es sino la aproximación (bi)lineal al producto en el grupo), el hecho sorprendente es que en la otra dirección hay una relación que va mucho más allá de lo que se esperaría de una aproximación lineal; y esto es en esencia el contenido del tercer teorema fundamental de Lie al que aludimos en el título.

Ahora bien, ¿cuál era la idea básica de Lie?

Como dijimos, de una manera muy esquemática lo que él quería era "establecer un diccionario" entre la teoría de Galois, que estudia la solución de las ecuaciones polinomiales, y una "teoría de Lie", para estudiar las ecuaciones diferenciales. En otras palabras, podemos imaginar que Lie pensaba a sus grupos como una especie de "grupos de permutaciones" (o *simetrías*) de las soluciones de las ecuaciones diferenciales, y la principal originalidad de su aportación reside en que los grupos relevantes aquí son en general infinitos y, de hecho, dependientes de un cierto número de parámetros asociados a la ecuación, en vez de los grupos finitos de la teoría de Galois.

A muy grandes rasgos, podemos entonces decir que el diccionario que Lie proponía sería algo como lo siguiente:

$$\text{Ecuación polinomial} \longleftrightarrow \text{Ecuación diferencial}$$

$$\text{Grupo finito} \longleftrightarrow \text{Grupo continuo (de Lie)}$$

$$\text{Grupo de Galois} \longleftrightarrow \text{(Grupo de) simetrías de la E.D.}$$

$$\text{Soluble por radicales} \longleftrightarrow \text{Soluble por cuadraturas}$$

Y "cuadratura", por supuesto, no es sino una manera antigua de describir el proceso de integración.

Para vislumbrar mejor la estrategia propuesta por Lie podemos considerar los siguientes ejemplos (véase la excelente presentación en [1]):

Ejemplo 1. *La ecuación diferencial más sencilla es $\dot{x} = \alpha(t)$. Su solución, dada por una aplicación directa del Teorema Fundamental del Cálculo, es simplemente: $x(t) = x_0 + \int_0^t \alpha$.*

El punto que hay que enfatizar, desde la perspectiva de Lie, es que esta ecuación tiene la simetría implícita que corresponde a la condición inicial; esto se puede expresar como sigue:

$$\textit{Si } x_1,\ x_2 \textit{ son soluciones} \implies x_1 - x_2 = \textit{const.} \in \mathbb{R}$$

Es decir, trasladando una solución por un número real obtenemos otra solución y, de hecho, todas se obtienen así.

Similarmente, la ecuación diferencial $\dot{x} = \beta(t)x$ tiene por solución $x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t \beta\right)$, y la simetría implícita:

$$\textit{Si } x_1,\ x_2 \textit{ son soluciones} \implies x_1/x_2 = \textit{const.} \in \mathbb{R}$$

Es además evidente que hay una estrecha relación entre ambas ecuaciones —y sabiendo resolver una podemos resolver la otra—, ya que en la segunda hay simplemente una derivada logarítmica. Y por ello no es coincidencia que dicha relación sea a través de la función exponencial.

La extrema sencillez de estos dos casos quizá enmascara un poco la profundidad de la idea de buscar una simetría en la ecuación; pero consideremos a continuación otro ejemplo, que es algo más elaborado y que corresponde al llamado *método de variación de parámetros*, debido originalmente a Euler.

Ejemplo 2. *Para la ecuación diferencial lineal general:*

$$\dot{x} = \alpha(t) + \beta(t)x,$$

la solución general aún se puede dar de modo explícito en la forma:

$$x(t) = u(t) \exp\left(\int_0^t \beta\right),$$

donde u satisface

$$\dot{u} = \alpha(t) \exp\left(\int_0^t -\beta\right),$$

y es bastante claro que la solución de esta ecuación (¡que ciertamente ya no es trivial!) es una especie de combinación de las dos anteriores.

Pero lo interesante ahora es notar que se tiene también la siguiente simetría implícita: si x_1, x_2 y x_3 son soluciones,

$$\Longrightarrow \qquad \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} = const. \in \mathbb{R}.$$

Como se puede ver, ésta es a su vez como una combinación de las simetrías anteriores; y esto, que permite de nuevo construir nuevas soluciones a partir de soluciones conocidas, desde luego tampoco es coincidencia.

3. Nociones básicas sobre los grupos de Lie

Para precisar las ideas anteriores debemos dar ahora las definiciones formales, pero por supuesto lo haremos en lenguaje contemporáneo. (Supondremos que el lector conoce las propiedades básicas de los grupos y de las variedades diferenciales. Una muy buena referencia para esta parte clásica de nuestra exposición es el libro [2].)

Definición 1. *Un grupo de Lie es una variedad diferenciable G, provista de un punto distinguido $e \in G$ (la unidad), y de dos funciones, $\mu : G \times G \to G$ (el producto), $\iota : G \to G$ (la inversión), de modo que (G, μ, ι, e) es un grupo, donde las funciones son diferenciables.*

Teniendo a los objetos básicos, el siguiente paso es introducir las funciones relevantes, que es lo que se conoce como *morfismos*:

Definición 2. *Sean H y G dos grupos de Lie y $\Phi : H \to G$ un homomorfismo de grupos; Φ es homomorfismo de grupos de Lie si es diferenciable.*

En la perspectiva moderna, lo que lo anterior nos indica es que hay una *categoría de grupos de Lie*. Esto es algo de importancia, pues al realizar el estudio de cualquier estructura matemática que imaginemos, como en este caso la de los grupos de Lie, el saber que se tiene una categoría sirve siempre de guía. Dado el alcance de estas notas no profundizaremos en este sentido, aunque en esencia lo que esto quiere decir es que tiene sentido considerar muchas de las nociones que son recurrentes en matemáticas, como isomorfismos, sub-objetos, cocientes, etc., en el contexto de los grupos de Lie. En este sentido, y por razones que aparecerán un poco más adelante, nos conviene introducir explícitamente los siguientes conceptos:

Definición 3. *Un subgrupo de Lie es un homomorfismo inyectivo* $\iota : H \to G$.

Si G *es un grupo de Lie y* M *una variedad, una acción (izquierda) es una aplicación diferenciable*

$$\rho : G \times M \to M : \ (g, x) \mapsto \rho(g, x) = g \cdot x,$$

que satisface

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x.$$

En este caso se dice que M *es un* G*-espacio.*

En particular, cuando $M = V$ *es un espacio vectorial y cada función* $T_g : x \mapsto g \cdot x$ *es lineal, entonces se dice que la acción es una representación del grupo (en el espacio* V*).*

Observación 1. *La definición de subgrupo puede parecer un poco extraña, pues permite que los subgrupos no necesariamente sean subvariedades encajadas (en inglés,* embedded*); de hecho, su topología es en general más fina. Sin embargo, conviene notar que los subgrupos que también son subvariedades son aquellos que son cerrados, y tienen desde luego una importancia especial.*

Consideremos ahora algunos ejemplos básicos de grupos de Lie:

Ejemplo 3. *Veamos cuáles son los grupos de simetría de las ecuaciones diferenciales de los ejemplos 1 y 2:*

El grupo de simetría de la ecuación $\dot{x} = \alpha$ *es simplemente* $\mathbb{R}$*, con la operación de adición. Por su parte,* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, con el producto usual, es el grupo de simetría de la ecuación* $\dot{x} = \beta x$*. Y por supuesto, la aplicación que los relaciona,* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ *es un homomorfismo de grupos de Lie, que es de hecho un isomorfismo, si restringimos su codominio a* $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$*.*

Por su lado, para la ecuación lineal general el grupo de simetría es el llamado grupo afín, cuya variedad subyacente es $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, con la operación

$$(a, b) \circ (c, d) = (c + ad, bd).$$

La razón por la que estos tres grupos son importantes, para la solución de las respectivas ecuaciones, es que cada uno de ellos actúa de manera no trivial en la recta real $\mathbb{R}$. En el primer caso la acción es $(a, x) \mapsto a + x$, en el segundo $(a, x) \mapsto ax$, y en el tercero $((a, b), x) \mapsto a + bx$.

Ejemplo 4. *Otro ejemplo fundamental de grupos de Lie lo constituyen los llamados grupos clásicos de matrices, entre los que tenemos a:*

$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in Mat(n, \mathbb{R})\ ;\ \det A \neq 0\}$ *(el grupo general lineal).*

$SL(n, \mathbb{R}) = \{A\ ;\ \det A = 1\} \subset GL(n, \mathbb{R})$ *(el grupo especial lineal).*

$SO(n, \mathbb{R}) = \{A\ ;\ A^T = A^{-1}\ ;\ \det A = 1\}$ *(el grupo de rotaciones en n dimensiones).*

$SU(n) = \{A \in Mat(n, \mathbb{C})\ ;\ A^{-1} = \bar{A}^T\ ;\ \det A = 1\}$ *(el grupo especial unitario).*

$Sp(2n, \mathbb{R}) = \{A \in Mat(2n, \mathbb{R})\ ;\ AJA^T = J\}$, *con* $J = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{pmatrix}$ *(el grupo simpléctico en $2n$ dimensiones).*

Los grupos de matrices descritos en el ejemplo anterior dan una clara idea de la gran cantidad de grupos de Lie importantes que existen, y además nos permiten hacer la observación de que algunas de las funciones más usadas en matemáticas —como es el caso ya mencionado de la exponencial, pero también el del determinante— son homomorfismos de grupos de Lie. Asimismo, conviene mencionar que otra razón por la que los grupos de matrices son útiles es que suelen ser algo más fáciles de entender y/o manejar, y esto es justamente lo que subyace a la idea de representación.

Con estos ejemplos a la mano, podemos de inmediato notar que si H y G son grupos de Lie, su *producto directo*, $H \times G$ con la operación coordenada por coordenada, es también grupo de Lie, de modo que ya podemos aumentar de forma considerable nuestro acervo de grupos de Lie. Por ejemplo, vemos así que $\mathbb{R}^n$, y por consiguiente los espacios vectoriales de dimensión finita en general, son grupos de Lie.

Por último y ya que apareció en nuestro discurso, cabe quizá señalar que el grupo afín es un ejemplo de un *producto semidirecto*. Una notación frecuente para este tipo de productos es $H \times_\rho G$, donde el símbolo ρ se refiere a que en su construcción interviene una acción del segundo factor en el primer factor; en el caso de $\mathbb{R} \times_\rho \mathbb{R}^*$ ésta está dada por el término ad, que aparece en la primera coordenada del producto. Pero lo más interesante de este ejemplo es que muestra que la variedad $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ admite al menos dos estructuras distintas de grupo: la del producto directo y ésta, de producto semidirecto.

Ahora bien, es claro que —casi por definición— el estudio de los grupos de Lie se puede dividir en dos partes fundamentales distintas, aunque desde luego no completamente independientes:

1. Los aspectos locales, que podemos decir que son de carácter esencialmente algebraico, y que conducen de manera natural a la noción de álgebra de Lie.

2. Los aspectos globales, que son de naturaleza más bien topológica, y que conducen a ideas como las de acciones y representaciones.

Por ejemplo, dentro de la faceta topológica podemos incluir temas como conexidad, conexidad simple, cubrientes (recubrimientos), espacios homogéneos, etc. Un par de ejemplos que ilustran esto son los siguientes:

Ejemplo 5. *Por construcción,* $GL(n,\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ *es un subconjunto abierto de un espacio vectorial, ya que* $\det$ *es una función continua. Como* $\mathbb{R}^*$ *tiene dos componentes conexas, automáticamente se tiene que* $GL(n,\mathbb{R})$ *tiene al menos (aunque no es muy difícil ver que exactamente) dos componentes conexas.*

Ejemplo 6. *Los cuaternios de Hamilton, denotados por* $\mathbb{H}$*, generalizan a los números complejos,* $\mathbb{C}$*. Se pueden definir como una copia de* $\mathbb{R}^4$*, la que pensamos generada por los símbolos* 1, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$*, lo que escribiremos* $\mathbb{H} = \langle 1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$ *(aquí* $\langle \cdot \rangle$ *denota al espacio generado), y en* $\mathbb{H}$ *definimos una operación de producto mediante las siguientes relaciones en los generadores*

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1\ ;\ \mathbf{ij} = \mathbf{k}\,,\ \mathbf{jk} = \mathbf{i}\,,\ \mathbf{ki} = \mathbf{j},$$

las que extendemos imponiendo la condición de que la operación sea bilineal.

En $\mathbb{H}$ hay dos subespacios distinguidos: el generado por 1, que son los cuaternios "reales", y $\mathbb{H}_0 = \langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle \cong \mathbb{R}^3$, que son los cuaternios "imaginarios puros", teniéndose así una separación similar a la que se tiene en $\mathbb{C}$ en partes real e imaginaria, y lo importante es que hay una estrecha relación del producto cuaterniónico con los productos interior ("punto") y exterior ("cruz") de vectores en $\mathbb{R}^3$. En efecto, si $x, y \in \mathbb{H}_0$, y los consideramos como vectores en el espacio tridimensional usual, es un cálculo directo ver que se tiene la siguiente igualdad:

$$xy = -x \cdot y + x \times y.$$

Aquí, en el lado izquierdo usamos el producto que hemos definido en los cuaternios, en tanto que en el lado derecho, como es usual, "$\times$" denota al producto cruz y "$\cdot$" al producto punto de vectores, y pensamos entonces que el cuaternio xy está separado en su parte real y su parte imaginaria. Es justamente en virtud de este tipo de propiedades que Hamilton consideró el haber podido dotar a $\mathbb{R}^4$ de este producto como su mayor logro.

Pero el punto esencial para nosotros es que el producto de cuaternios tiene la propiedad fundamental de hacer que la norma euclidiana usual en $\mathbb{R}^4$ sea multiplicativa*; es decir, $\|xy\| = \|x\|\|y\|$. Como consecuencia de ello, resulta que existe un homomorfismo entre los cuaternios de norma 1, denotado $Sp(1, \mathbb{H})$ y que por lo recién dicho resulta ser un grupo con operación el producto de cuaternios, y el grupo usual de rotaciones: $Sp(1, \mathbb{H}) \to SO(3, \mathbb{R})$. Esta función es 2 a 1, y se puede dar fácilmente de manera explícita como sigue:*

Dado el cuaternio de norma 1 q, le asociamos la función R_q, que a $x \in \mathbb{H}_0$ le asocia $R_q(x) = qxq^{-1}$. No es difícil demostrar entonces que R_q es una aplicación que preserva la norma y la orientación en los cuaternios imaginarios puros, y por lo tanto define una rotación en $\mathbb{R}^3$.

E igualmente importante para nosotros es que $Sp(1, \mathbb{H})$ es topológicamente más simple que $SO(3)$, ya que el primero es simplemente la esfera $S^3 \subset \mathbb{R}^4$. En particular, $Sp(1, \mathbb{H})$ es simplemente conexo en tanto que $SO(3)$ es (algo) más complejo en su topología; de hecho, la aplicación anterior muestra que es un espacio proyectivo.

En la faceta algebraica, por su parte, se incluyen conceptos como conmutatividad, solubilidad, nilpotencia, simplicidad, etc. Para ilustrar esto, podemos recurrir a la idea original de Lie, de relacionar propiedades de los grupos con la posibilidad de resolver (o no) explícitamente ecuaciones diferenciales. La instancia quizá más simple e ilustrativa de este fenómeno es la siguiente:

Ejemplo 7. *La ecuación diferencial de tipo Ricatti:*

$$\dot{x} = \alpha(t) + \beta(t)x + \gamma(t)x^2,$$

no admite en general una expresión cerrada para la solución general; no obstante, tiene una simetría implícita.

Ésta, que es sin duda mucho menos directa que las anteriores, proviene del hecho que el grupo $SL(2,\mathbb{R})$ también actúa de manera no trivial en $\mathbb{R}$, mediante las llamadas transformaciones de Möbius. *Explícitamente dicha acción es:*

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, x\right) \mapsto \frac{ax+b}{cx+d},$$

y la simetría es: si x_1, x_2, x_3 y x_4 son soluciones, entonces su razón cruzada *se conserva:*

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} \frac{x_4 - x_3}{x_4 - x_2} = const.$$

Aunque no daremos aquí la prueba, lo más destacable aquí es que, a diferencia de los grupos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$ y $\mathbb{R} \times_\rho \mathbb{R}^*$, $SL(2,\mathbb{R})$ ***no*** *es un grupo soluble, y es precisamente por ello que no existe la fórmula general para la solución.*

Pero por otra parte, cuando hacemos el cociente de $SL(2,\mathbb{R})$ por algún subgrupo uniparamétrico normal, el grupo resultante es de dimensión dos, y estos grupos son todos solubles. Esto en particular es la base del siguiente hecho, bien conocido pero en apariencia sorprendente: si se conoce una solución de una ecuación de Ricatti, la ecuación se puede reducir a una ecuación lineal, y entonces se puede dar la solución general.

Retomando el hilo de nuestra historia, vamos ahora a considerar el problema algebraico fundamental de cómo medir la conmutatividad —y quizá más en concreto, la falta de ella— en un grupo de Lie:

Recordemos para ello que un grupo G es conmutativo o *abeliano* si y sólo si $\forall\ x, y \in G$, $xy = yx$, lo que es equivalente a que $\forall\ x, y \in G$

$$\mathbf{Ad}_x y = xyx^{-1} = y$$

Con la primera igualdad hemos introducido la función $x \mapsto \mathbf{Ad}_x$, que a cada $x \in G$ le asocia un isomorfismo de G en sí mismo, es decir un *automorfismo* (este tipo de automorfismo se llama *interior*). El conjunto de automorfismos, $Aut(G)$, es de hecho un grupo, y la función $\mathbf{Ad} : G \to Aut(G)$ así definida un homomorfismo de grupos;

pero nuestro interés es que con esta noción podemos decir que G **no** es abeliano si y sólo si el homomorfismo $\mathbf{Ad}$ es no trivial, es decir, si y sólo si $\exists\ x \in G$ tal que $\mathbf{Ad}_x \neq Id_G$.

La caracterización anterior de no conmutatividad vale desde luego para un grupo arbitrario; pero, con la ventaja de ya saber a donde queremos llegar, supongamos ahora que $G \subset Mat(n, \mathbb{R})$ (más en general, podríamos suponer que es un grupo de funciones invertibles); entonces hay otra opción natural para analizar la conmutatividad, que es justamente mediante el llamado *conmutador* de matrices, $[x, y] = xy - yx$: En efecto, tenemos que G es abeliano si y sólo si $\forall\ x, y \in G$,

$$ad_x y = [x, y] = 0$$

La idea detrás de escribirlo así, claro está, es que con la fórmula anterior tenemos definida otra función —que a $x \in Mat(n, \mathbb{R})$ le asocia ad_x—, que nos permite decir que G no es abeliano si y sólo si $\exists\ x \in G$ tal que $ad_x \neq 0$.

Y la pregunta ahora es: ¿cómo se relacionan estas dos medidas de no conmutatividad? O, más precisamente, ¿cuál es la relación entre las funciones $\mathbf{Ad}$ y ad?

Dado que en lo que sigue aparecen algunas derivadas, supongamos por simplicidad que de manera aún más particular $G = GL(n, \mathbb{R})$, (con lo que G es un abierto en $Mat(n, \mathbb{R})$, y $T_eG \cong Mat(n, \mathbb{R})$, así que es claro que en el cálculo que sigue todo está bien definido): Entonces, dadas dos curvas en G, $x(t)$, $y(s)$, con $x(0) = y(0) = e$ y tales que $X = x'(0), Y = y'(0) \in T_eG$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\Big|_{0,0} x(t)y(s)x^{-1}(t) &= x'(0)y'(0)x^{-1}(0) + x(0)y'(0)(x^{-1})'(0) \\ &= [x'(0), y'(0)] = [X, Y]. \end{aligned}$$

Es decir, se tiene que

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\Big|_{0,0} \mathbf{Ad}_{x(t)} y(s) = ad_X Y.$$

El punto es ahora que el lado izquierdo de la ecuación anterior tiene sentido en un grupo de Lie abstracto G, y esto permite definir a la función ad en general. Por consiguiente, para un grupo de Lie cualquiera podemos definir en $\mathfrak{g} = T_eG$ su *corchete de Lie* vía

$$[X, Y] = ad_X Y.$$

Con esta estructura, $\mathfrak{g}$ se llama el *álgebra de Lie* del grupo G, y por lo que hemos dicho, podemos relacionar la no conmutatividad del grupo con la no trivialidad del corchete en su álgebra de Lie.

Es conveniente hacer la observación de que el álgebra $\mathfrak{g}$ se puede también caracterizar como el conjunto de campos vectoriales en G que son *invariantes por la derecha*; a grandes rasgos, cada campo invariante se obtiene al trasladar el vector tangente $X \in T_eG$ a los distintos puntos $x \in G$ mediante la diferencial de la *traslación a la derecha* por x, $R_x : y \mapsto yx$.

Observación 2. *Probar la equivalencia de ambas descripciones es algo técnico, pero lo importante es que el corchete anterior coincide entonces con el corchete dado por el conmutador de esos campos vectoriales, pensados éstos como operadores que actúan sobre funciones.*

Más adelante precisaremos un poco de estos dos puntos de vista, y de ahí que los mencionemos aquí. De momento queremos también señalar que algo importante es que esta identificación parece además, de algún modo, sugerir que el corchete así definido es el "único corchete natural" en T_eG, que es lo que se considera en la teoría clásica. Pero como veremos, detrás de esta tesis hay una suposición no trivial implícita.

En todo caso, dada esta definición no es muy difícil probar que el corchete de Lie $[\cdot,\cdot]$ es bilineal y antisimétrico, pero **no** es asociativo, sino que satisface la llamada *identidad de Jacobi*:

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0.$$

Estas son las propiedades básicas del corchete; abstrayéndolas se tiene entonces la siguiente noción:

Definición 4. *Un álgebra de Lie es un espacio vectorial con una aplicación bilineal, $[\cdot,\cdot]$, antisimétrica y que satisface la identidad de Jacobi:*

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0.$$

Esta definición se acompaña de la correspondiente noción de morfismo:

Definición 5. *Sean H y G dos álgebras de Lie y $\phi : H \to G$ una transformación lineal; ϕ es homomorfismo de álgebras de Lie si satisface:*

$$\phi([x,y]) = [\phi(x), \phi(y)]$$

Con ello se tiene que las álgebras de Lie constituyen una nueva categoría y, análogamente al caso de los grupos, se pueden introducir otras nociones categóricas, como subálgebras, ideales, cocientes, etc. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 8. *Cada uno de los grupos clásicos de matrices define un álgebra de Lie de matrices:*

Como ya mencionamos, el álgebra de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$ *es* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = Mat(n, \mathbb{R})$*, con el conmutador usual.*

El álgebra de $SL(n, \mathbb{R})$ *es* $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{A \; ; \; trA = 0\} \subset Mat(n, \mathbb{R})$ *(las matrices de traza cero).*

El álgebra de $SO(n, \mathbb{R})$ *es* $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = \{A \; ; \; A^T = -A \; ; \; trA = 0\}$ *(matrices antisimétricas de traza nula).*

Y así con los restantes grupos.

Observación 3. *Como sugiere el ejemplo anterior, es común denotar el álgebra de Lie de un grupo dado usando las correspondientes letras góticas minúsculas.*

Ejemplo 9. *El producto cruz dota a* $\mathbb{R}^3$ *de una estructura de álgebra de Lie, poniendo* $[x, y] = x \times y$*.*

Además —esencialmente por lo dicho en el ejemplo 6—, resulta que $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ *es isomorfa (como álgebra de Lie) al álgebra de Lie* $(\mathbb{R}^3, \times)$*.*

Ejemplo 10. *El grupo* $U(1)$ *de los números complejos de norma 1 y su álgebra de Lie,* $\mathfrak{u}(1)$*, están naturalmente incluidos en el plano complejo:* $U(1)$ *es el círculo unidad* S^1*, y* $\mathfrak{u}(1) \cong T_1S^1$ *es esencialmente el eje imaginario. De manera totalmente análoga, el álgebra de Lie del grupo* $Sp(1, \mathbb{H}) \approx S^3$*, denotada por* $\mathfrak{sp}(1, \mathbb{H})$*, está dada por los cuaternios imaginarios puros.*

Pero lo realmente interesante es que como hemos dicho, $Sp(1, \mathbb{H})$ *es localmente isomorfo a* $SO(3, \mathbb{R})$*, y por lo tanto, ya que para calcular derivadas sólo se utiliza información alrededor del punto en que se deriva, sus álgebras de Lie son isomorfas, es decir,* $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \cong \mathfrak{sp}(1, \mathbb{H})$*.*

4. Los "teoremas fundamentales" de Lie

Teniendo a nuestra mano las nociones anteriores, ya podemos ahora describir con suficiente precisión los "teoremas fundamentales" de Lie (a menos que explícitamente se diga lo contrario, en lo que sigue todos los objetos serán de dimensión finita):

Primer teorema fundamental: Todo grupo de Lie determina un álgebra de Lie en T_eG.

Segundo teorema fundamental: Toda álgebra de Lie de campos vectoriales determina (localmente) un grupo de Lie de difeomorfismos.

Tercer teorema fundamental: Toda álgebra de Lie abstracta determina un álgebra de Lie de campos vectoriales (y, por ende, un grupo de Lie).

El análisis del primer teorema fundamental consiste, en esencia, en lo ya expuesto en la sección anterior sobre la definición del álgebra de Lie, y quizá lo más importante que podemos agregar es que describe una relación entre las dos categorías que hemos descrito; técnicamente, define un *funtor* que va de los grupos de Lie a las álgebras de Lie. Pasemos pues a discutir los dos restantes.

Es claro que estos son en cierto modo recíprocos del primero y están evidentemente muy relacionados entre sí. Ahora, para describir como se puede probar el segundo teorema fundamental, conviene introducir otra herramienta básica en la teoría de grupos de Lie, la llamada *aplicación exponencial*. En aras de la simplicidad, consideremos una vez más primero un caso muy especial:

Supongamos que $X \in Mat(n, \mathbb{R})$; entonces tiene sentido definir

$$\exp(X) = e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!},$$

ya que la serie converge (en cualquier norma). Más aún, $e^X \in GL(n, \mathbb{R})$, pues su inversa es simplemente e^{-X}.

En otras palabras, tenemos una aplicación

$$\exp : Mat(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R}).$$

Fijemos ahora $X \in Mat(n, \mathbb{R})$ y consideremos la curva en $GL(n, \mathbb{R})$,

$$\gamma_X(t) = \exp tX\ ,\ \ t \in \mathbb{R}.$$

Ya que

$$\exp tX \exp sX = \exp(t+s)X,$$

esta curva determina un subgrupo de G, llamado *subgrupo uniparamétrico*; pero además es claro que satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d\gamma_X(t)}{dt} = X\gamma_X(t).$$

la que corresponde precisamente a considerar al vector X como definiendo un campo vectorial invariante por la derecha en $GL(n, \mathbb{R})$.

El punto es de nuevo que la ecuación anterior tiene sentido en general, pues como hemos dicho, cada vector en el álgebra de Lie de un grupo de Lie arbitrario se puede pensar como un campo invariante por la derecha.

Para un grupo de Lie arbitrario G, esto implica la existencia de una aplicación natural, $\exp : \mathfrak{g} \to G$. llamada *aplicación exponencial*. Esta aplicación es un difeomorfismo local; esto es, en general es un difeomorfismo sólo de un entorno de $0 \in \mathfrak{g}$ sobre un entorno de $e \in G$. Su inversa local, a veces llamada logaritmo, determina una carta especial en la variedad G alrededor de e.

Observación 4. *Los subgrupos uniparamétricos, como los que acabamos de describir, son todos los subgrupos unidimensionales de un grupo de Lie conexo G, y en general no son subvariedades. El ejemplo más sencillo que se puede dar de este fenómeno ocurre en el toro, $U(1) \times U(1)$, donde hay dos tipos de subgrupos uniparamétricos: aquellos que son topológicamente un círculo, que son los subgrupos cerrados, y aquellos que son topológicamente una recta, que son densos. En parte es por esta razón que un subgrupo se define como un homomorfismo y no como una subvariedad.*

Observación 5. *Otra observación que podemos hacer aquí es que las ecuaciones de los ejemplos iniciales tienen en realidad una forma muy similar a la que determina a la exponencial, pues están también determinadas por una acción de un grupo de Lie sobre un álgebra de Lie. En el fondo, es gracias a ello que se pueden exhibir de manera tan explícita sus simetrías y estudiar su solubilidad (véase* [1]*).*

La aplicación exponencial aparece en muchos contextos, pero en particular el que es de interés para nosotros es el siguiente resultado:

Teorema 1. *("Fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff"): Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $mathfrakg$. Si $X, Y \in \mathfrak{g}$ entonces*

$$e^X e^Y = e^{\mu(X,Y)};$$

donde

$$\begin{aligned}\mu(X,Y) &= X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \\ &\quad \frac{1}{12}[X,[X,Y]] + [Y,[Y,X]] + t.o.s.\end{aligned}$$

La demostración de este teorema es demasiado técnica para comentarla aquí; pero lo que nos interesa es señalar que esto nos da una prueba del segundo teorema fundamental por lo siguiente: Ya que $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial, $T_0\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}$. Podemos entonces identificar a cada $X \in \mathfrak{g}$ con un campo vectorial y considerar su flujo según la ecuación anterior. Como la función exp es un difeomorfismo en un entorno U de $0 \in \mathfrak{g}$, la fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff define entonces una operación en el grupo local de difeomorfismos (locales) dados por estos flujos.

Observación 6. *La fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff anterior (que según* [2] *es más bien debida a Dynkin) es demasiado complicada para ser de mucha importancia práctica, y es poco útil al tratar de hacer cálculos explícitos.*

Pero por otro lado, además de que es un expresión explícita del sentido en el que el corchete de Lie "mide", en la aproximación bilineal, la desviación de la operación en G con respecto de la operación del espacio vectorial $\mathfrak{g}$, es sumamente interesante observar que podemos usarla para probar cosas como el siguiente hecho: ya que la fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff es "como" una serie de Taylor en un entorno de $0 \in \mathfrak{g}$, basta con que el grupo sea C^2 para concluir que en realidad es analítico.

Finalmente, con respecto al tercer teorema fundamental de Lie, la respuesta al planteamiento original está dada por el siguiente resultado general, que en cierto modo lo reduce a un corolario del segundo teorema fundamental:

Teorema 2. *(Teorema de Ado) Toda álgebra de Lie de dimensión finita se puede representar como un álgebra de matrices.*

Sin embargo, la historia no termina aquí ya que, en la actualidad, al referirse al "tercer teorema fundamental de Lie" se piensa en una versión global del mismo; esto es, aunque como hemos dicho Lie mismo no lo habría podido pensar así, al referirnos al tercer teorema de Lie pensamos en que un álgebra de Lie determina a un grupo (o, mejor dicho, a una familia de grupos) de **manera global**. Y es que este punto de vista es lo consistente con la filosofía del propio Lie ya que, aunque operativamente no lo pudiera hacer de ese modo, lo que él tenía en mente era en realidad la familia completa de simetrías de las ecuaciones, que es un grupo y no un grupo local.

Resulta hasta cierto punto sorprendente que se pueda siquiera plantear tal cuestión: En efecto, el álgebra de Lie proporciona esencialmente información sobre una(s) derivada(s) de la operación en el grupo. Para una función dada, en general esto sólo permite recuperar información de la función en un entorno del punto donde se deriva; y además en general sólo de manera aproximada. El saber que la operación es analítica es un indicio de que ésta se podría quizá recuperar en todo un entorno, que es lo que hace la fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff; pero aún hay un largo trecho para esperar que se pueda obtener alguna información global sobre ella.

Sin embargo, la gran homogeneidad implícita en la construcción de los grupos permite dar respuestas globales en varios contextos, y existen bastantes soluciones clásicas importantes del tercer teorema fundamental de Lie. Y es a ello a lo que aludo en el título como "variaciones de un tema de Lie".

En lo que sigue mencionaremos brevemente algunos ejemplos "clásicos" de estas variaciones, y después discutiremos algunas versiones más "modernas", que ocurren en un contexto que generaliza al de las álgebras de Lie. Pero antes de hacer esto, es necesario recalcar algo que ya se ha insinuado, y es que cuando se pretende buscar soluciones globales al tercer teorema de Lie, la determinación del grupo a partir del álgebra no puede por principio ser unívoca. Esto es, en general habrá varios grupos con la misma álgebra de Lie, los que serán localmente, pero **no** globalmente, isomorfos.

Que esto es necesariamente así se sigue casi de inmediato —por la continuidad misma de las aplicaciones involucradas— del hecho que el álgebra de Lie sólo puede dar información acerca de la *componente conexa de la identidad*, la que se denota usualmente por G^0.

No es difícil ver que G_0 es un subgrupo normal y cerrado de G, lo que implica que existe el grupo cociente. La topología que este cociente hereda es sin embargo la *discreta*, por lo que en cierto modo toda la información interesante de la topología del grupo G está contenida en G^0. Pero la estructura algebraica de este grupo cociente es totalmente "transparente" para el álgebra de Lie.

Mas en realidad, aún si el grupo es conexo puede haber distintos grupos localmente, pero no globalmente, isomorfos, y que compartan la misma álgebra de Lie. El ejemplo más sencillo lo constituyen la recta real $\mathbb{R}$ y el círculo unitario $U(1) \approx S^1$, que (salvo isomorfismo) son los dos únicos grupos unidimensionales; pero otro ejemplo importante, y en cierto modo más ilustrativo, es el siguiente:

Ejemplo 11. *Siguiendo el patrón general esbozado en el ejemplo 8, se puede ver que el álgebra de Lie de $SU(2)$ es*

$$\mathfrak{su}(2) = \{A \in Mat(2, \mathbb{C})\ ;\ A^T = -\bar{A}\ ;\ trA = 0\}.$$

El punto es que $Sp(1, \mathbb{H}) \cong SU(2)$. Esto se sigue del hecho que $\mathbb{H} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\mathbf{j}$, pues $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$. Bajo esta idenificación, la operación de multiplicación por el cuaternio $a + b\mathbf{j}$ (que sólo es $\mathbb{R}$-lineal) se identifica entonces con el producto por la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in U(2)$$

y, por consiguiente, los cuaternios de norma 1 se identifican con las matrices de determinante 1.

Así, en virtud del isomorfismo local $Sp(1, \mathbb{H}) \to SO(3)$, el álgebra $\mathfrak{su}(2)$ es también isomorfa a $\mathfrak{so}(3)$, y por lo tanto también a $(\mathbb{R}^3, \times)$.

Un tanto sorprendentemente, la existencia de esta relación entre estos grupos es de gran importancia, por ejemplo, ¡al estudiar el espín en mecánica cuántica!

Observación 7. *En los dos ejemplos mencionados se puede apreciar un mismo fenómeno: uno de los dos grupos es simplemente conexo, y se tiene una aplicación cubriente de este grupo en el otro.*

De hecho, se puede probar que para $n > 2$, los grupos $SO(n, \mathbb{R})$ tienen un cubriente simplemente conexo (el cubriente universal*) que es 2 a 1; y debido a esta relación con el grupo de rotaciones, estos grupos se conocen precisamente como grupos de espín y se denotan $Spin(n, \mathbb{R})$; en particular $Spin(3, \mathbb{R}) \cong SU(2)$.*

La importancia de esta observación reside en que se tiene el siguiente teorema, que permite construir un grupo global a partir de un álgebra de Lie, y que podemos pensar que es una primera variación del tercer teorema fundamental de Lie:

Teorema 3. *Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ existe un (único) grupo de Lie simplemente conexo $\tilde{G}$, con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.*

La demostración de este teorema no es sencilla, ya que utiliza algunos argumentos relativamente finos de topología, como la existencia del grupo de lazos; pero podemos destacar que este resultado permite, mediante el uso de técnicas de topología algebraica, estudiar los grupos conexos asociados a un grupo de Lie, ya que todos ellos aparecen como cocientes de este grupo simplemente conexo. Por esta razón, a este grupo se le denomina el *grupo cubriente universal*.

Observación 8. *Incidentalmente, la propiedad del cubriente universal del grupo de rotaciones de ser 2 a 1 se suele interpretar en física, de manera informal, diciendo que "las partículas pueden girar hacia arriba o hacia abajo".*

En todo caso, esto permite en algunos casos dar descripciones sencillas y muy completas de los grupos que comparten una misma álgebra de Lie. El ejemplo fundamental de esto es la siguiente variación clásica del teorema de Lie, cuya demostración se puede dar de maner independiente del anterior, basándose en la clasificación de los subgrupos discretos de $\mathbb{R}^n$:

Teorema 4. *Un grupo de Lie conexo es abeliano si y sólo si $\mathfrak{g}$ lo es.*

Todo grupo de Lie abeliano y conexo es de la forma

$$G \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^k \approx (S^1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$$

con $0 \leq k \leq n$. En particular, si el grupo es compacto es un toro (generalizado).

Por último, otra variación clásica que mencionaremos es la siguiente, que muestra además hasta que punto es estrecha la relación entre un grupo (conexo) y su álgebra de Lie.

Teorema 5. *Hay una correspondencia biyectiva entre los subgrupos conexos $H \subset G$ (no necesariamente cerrados) de un grupo de Lie G y las subálgebras $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ de su álgebra de Lie.*

Más aún, un subgrupo conexo es normal si y sólo si la correspondiente subálgebra es un ideal de $\mathfrak{g}$.

La demostración de este resultado se puede hacer a partir de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, apelando al hecho de que cualquier subconjunto de un grupo genera un subgrupo, pues la intersección de subgrupos es un subgrupo; sin embargo, hay que señalar que también presenta varios puntos técnicos no triviales por lo que no daremos más detalles.

Concluímos esta sección con la siguiente reflexión:

Las “variaciones” del tercer teorema que hemos mencionado aquí no son los únicos resultados que se conocen que se podrían incluir en este rubro; pero con ellas nos basta para mostrar de manera elocuente la estrecha relación entre las dos categorías involucradas; y constituyen además un claro testimonio de la genial intuición que tuvo Lie al introducir el estudio de las álgebras de Lie para entender a los grupos. Por ello, resulta entonces hasta cierto punto natural preguntarse por otros contextos en los que se pueda aplicar este mismo método, que es lo que haremos a continuación.

5. Las álgebras de Leibniz y los digrupos

La teoría expuesta hasta aquí puede considerarse como algo clásico; pero siguiendo en la línea del último comentario, en lo que sigue, consideraremos brevemente cómo se puede trasladar esto a un terreno relativamente nuevo: el de las llamadas *álgebras de Leibniz*.

El interés en estas ideas surgió a raíz de que J. L. Loday propusiera como problema el entender el análogo del tercer teorema de Lie para las álgebras de Leibniz; y es justamente por la manera en que él planteó las cosas que se le conoce usualmente como el *problema de las "coquecigrues"*. Loday ha sido el principal promotor del estudio de las álgebras de Leibniz (y por esta razón a veces se les llama *álgebras de Loday*), como una generalización natural y muy útil de las álgebras de Lie, ya que aparecen en multitud de contextos, y esto confiere interés al problema de las coquecigrues.

Citando sus palabras originales ([6]):

"Le problème consiste à définir des objets algébriques qui seraeint aux algèbres de Leibniz ce que les groupes sont aux algèbres de Lie. Ces objets mythiques seront appelés, pour l'instant, des *coquecigrues.* [...]

Une coquecigrue munie d'une structure de variété (avec quelques compatibilités) serait un groupe de Leibniz, c'est à dire que l'espace tangent aurait une structure d'algèbre de Leibniz (on peut rêver)."

(El problema consiste en definir objetos algebraicos que tendrían la misma relación con las álgebras de Leibniz, que los grupos con las álgebras de Lie. Estos objetos míticos serán llamados, de momento, *coquecigrues.* [...]

Una coquecigrue provista de una estructura de variedad (con algunas compatibilidades) sería un grupo de Leibniz, es decir, que el espacio tangente tendría una estructura de álgebra de Leibniz (se puede soñar).)

Nótese que el problema propuesto por Loday procede en la dirección opuesta a la del problema abordado por Lie, pasando del caso lineal al no lineal, y es por eso que el problema de las coquecigrues se asocia con el tercer teorema. Y claramente Loday propuso el término "coquecigrue" como una especie de "broma matemática" ("objetos míticos", "se puede soñar", podemos leer en su texto), ya que no existía una definición formal de cuál es esta estructura algebraica que tendrían las variedades integrales de las álgebras de Leibniz (y a la fecha sigue sin existir una definición universalmente aceptada).

Y en efecto, si buscamos en un diccionario qué significa "coquecigrue" (el *Larousse on line*, en este caso), encontramos:

Coquecigrue.

Nom féminin (peut-être de coq, cigogne et grue, animal imaginaire)

Littéraire. Rêverie fantasque, absurdité.

(*Coquecigrue. Nombre femenino (quizá de gallo, cigüeña y grulla, animal imaginario). Literatura. Ensoñación fantasiosa, algo absurdo.*)

Fig. VI. Representación pictórica de una coquecigrue

Pero más allá de estas consideraciones lingüisticas, cabe preguntarse: ¿por qué son tan distintos los casos de las álgebras de Lie y de Leibniz, como para que esto fuera considerado como una especie de sueño por Loday? Pero la respuesta no es trivial y, como hemos dicho, aún no se tiene una solución completa del problema de las coquecigrues.

Sin embargo, en los últimos años se han hecho progresos interesantes, algunos de los cuales veremos a continuación, aunque en estas notas centraremos nuestra atención sólo en un caso particular de álgebras de Leibniz, que son las llamadas *escindidas* (*"split"*, en inglés), para las cuales hay un cierto consenso en que se tiene una solución aceptable.

Pero vayamos a las definiciones matemáticas:

Definición 6. *Un álgebra de Leibniz es un espacio vectorial L, provisto de una aplicación bilineal $[\cdot,\cdot]$, que satisface la identidad de Leibniz (izquierda):*

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x,z]]$$

Nótese que aquí es necesario distinguir entre la identidad de Leibniz izquierda y la correspondiente identidad derecha; pero si el corchete es antisimétrico, un álgebra de Leibniz es simplemente un álgebra de Lie.

Igual que en el caso clásico, se pueden definir las nociones de homomorfismo, subálgebra, ideales (aquí hay que dividirlos en derechos e izquierdos), etc., para las álgebras de Leibniz, y éstas también forman una categoría.

Al estudiar la estructura de las álgebras de Leibniz, aparecen dos ideales que son sumamente importantes, que son los ideales izquierdos

$$S = \{\, X = \sum_i [X_i, X_i] \,\}$$

(sumas finitas) y

$$K = \ker ad = \{\, X \;;\; \forall\, Y \;\, [X, Y] = 0 \,\},$$

donde como para las álgebras de Lie, se define la aplicación ad mediante $ad_X Y = [X, Y]$.

No es difícil ver que en general $S \subseteq K$; pero su importancia se debe a que si $S \subseteq J \subseteq K$ es un ideal izquierdo, la primera inclusión implica que el cociente $\mathfrak{g} = L/J$ es un álgebra de Lie, en tanto que la segunda implica que J es un L/J-módulo.

Esto motiva la siguiente definición:

Definición 7. *Un álgebra de Leibniz se escinde relativa a un ideal $S \subseteq J \subseteq K$ si existe una subálgebra H isomorfa a $\mathfrak{g}$, de modo que $L \cong J \oplus H$.*

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 12. *Sea V un espacio vectorial y $\varphi \in V \setminus \{0\}$ un funcional lineal.*

Extendamos este funcional a una aplicación lineal (a la que por economía de escritura seguiremos denotando con la misma letra)

$$\varphi : Mat\,(k, V) \to Mat\,(k, \mathbb{R})\,,$$

para la cual la entrada ij es el funcional φ inicial.

Entonces, $L = Mat\,(k, V)$, con el corchete

$$[x, y] = \varphi\,(x)\, y - y \varphi\,(x)\,,$$

es un álgebra de Leibniz, llamada φ-álgebra, que para $k \geq 2$ no es un álgebra de Lie (ya que el producto matricial no es conmutativo).

Como veremos más adelante, este tipo de álgebras se escinden. Pero cabe enfatizar que no todas las álgebras de Leibniz lo hacen; un tipo de álgebras que en general no son escindidas es el siguiente:

Ejemplo 13. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y Δ una derivación tal que $\Delta^2 = 0$; enotnces $\mathfrak{g}$ con el corchete $[x, y]_\Delta = [\Delta x, y]$ es un álgebra de Leibniz, llamada a veces* álgebra derivada.

Por ejemplo, esencialmente sólo hay un álgebra bidimensional no abeliana, $\mathbb{R}^2 = \langle e_1, e_2 \rangle$ con el corchete de Lie dado por

$$[x, y] = (x_1 y_2 - x_2 y_1)\, e_1.$$

Para esta álgebra, $\Delta x = x_2 e_1$ es una derivación y obviamente $\Delta^2 = 0$. Por tanto, el corchete $[x, y]_\Delta = [\Delta x, y] = x_2 y_2 e_1$ determina una estructura de álgebra de Leibniz en $\mathbb{R}^2$.

En esta álgebra, $S = K = \langle e_1 \rangle$, y no es difícil probar que el álgebra no se escinde sobre este ideal.

Ahora bien, la respuesta que se ha dado al problema de las coquecigrues en el caso de las álgebras escindidas pasa por la siguiente noción, introducida de manera independiente y casi simultánea en [3], [4] y [5]:

Definición 8. *Un digrupo es un conjunto D, provisto de dos operaciones asociativas, $\vdash, \dashv$, que satisfacen las condiciones de compatibilidad*

$$x \dashv (y \dashv z) = x \dashv (y \vdash z)\,;$$
$$(x \vdash y) \vdash z = (x \dashv y) \vdash z;$$
$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z)\,.$$

En D existen además un elemento distinguido, e, que es neutro en el sentido que para toda x, $e \vdash x = x \dashv e = x$ (estas condiciones definen lo que se llama una unidad barra*), e inversos, en el sentido de que para toda x existe un único elemento x^{-1} tal que $x \vdash x^{-1} = x^{-1} \dashv x = e$.*

El digrupo es de Lie si D es una variedad y las operaciones involucradas son diferenciables.

Y es de nuevo claro que se pueden definir homomorfismos de manera natural, para obtener otra categoría.

Ejemplo 14. *Dada una φ-álgebra se puede construir un φ-digrupo:*

Sea $e \in V$ tal que $\varphi(e) = 1$ fijo, y definamos $E = Diag(e, \ldots, e) \in Mat_k(V)$; entonces el conjunto abierto $D = \varphi^{-1}(GL(k, \mathbb{R}))$ hereda la *estructura de un digrupo, con E como la unidad barra distinguida, con las operaciones definidas por*

$$X \vdash Y = \varphi(X)Y \ ; \ X \dashv Y = X\varphi(Y),$$

y donde el inverso de X es $X^{-1} = \varphi(X)^{-1}E = E\varphi(X)^{-1}$.

Claramente D es de Lie.

Nótese además que este digrupo tiene la descomposición

$$D = GL(k, \mathbb{R})) \times \ker \varphi;$$

esto es en realidad un caso especial de un hecho general, probado por M. Kinyon (*cf.* [4], con algunas adaptaciones hechas en [10]):

Teorema 6. *(Kinyon) Dado un digrupo D, tenemos el conjunto de los inversos,*

$$G = \left\{ y \mid \exists \ x \ \textit{tal que} \ y = x^{-1} \right\},$$

y el conjunto de las unidades barra,

$$J = \{ y \mid \forall \ x, \ y \vdash x = x \dashv y = x \}.$$

Entonces:

- *G es un grupo;*
- *J es un G-espacio para la acción izquierda*

$$(a, \alpha) \mapsto a \cdot \alpha = a \vdash \alpha \dashv a^{-1};$$

- *$\{e\} = G \cap J$;*
- *e es un punto fijo de la acción.*

Más aún, las funciones

$$D \to G : x \mapsto e \dashv x \ ; \ D \to J : x \mapsto x \dashv x^{-1},$$

son proyecciones que determinan una biyección, $D \approx G \times J$.

Esta biyección es un isomorfismo de digrupos si las operaciones en $G \times J$ se definen como

$$(a, \alpha) \vdash (b, \beta) = (ab, a \cdot \beta) \ \ ; \quad (a, \alpha) \dashv (b, \beta) = (ab, \alpha) .$$

Si el digrupo es de Lie, estas identificaciones son diferenciables.

Observación 9. *Aunque no es esencial para lo que sigue, es digno de mencionar que este teorema se puede refinar como sigue (cf.* [10]*):*

Teorema 7. *Un digrupo queda completamente determinado por la acción de G en J. Esta acción debe poseer un punto fijo, pero éste no necesariamente es único.*

Esta relación entre digrupos y G-acciones con punto fijo es de hecho una equivalencia de categorías.

6. Algunas variaciones no clásicas del tercer teorema fundamental de Lie

Ahora bien, la razón por la que la estructura de digrupo se puede relacionar con el problema de las coquecigrues es que dado un digrupo D se puede definir en él una conjugación:

$$\mathbf{Ad}_x : \ y \longmapsto x \vdash y \dashv x^{-1}$$

Esto permite reproducir, *mutatis mutandis*, el razonamiento que ya se tenía para los grupos de Lie para pasar de $\mathbf{Ad}$ a *ad*, y nos conduce directamente a la primera "variación" no clásica anunciada del tercer teorema de Lie, esencialmente debida de nuevo a M. Kinyon ([4]).

Teorema 8. *(Kinyon) Dado un digrupo de Lie D, la derivación de la conjugación dos veces en el elemento distinguido e (una en la variable x y una en la variable y, exactamente como en el caso de los grupos de Lie), determina un corchete de Leibniz en el espacio tangente a D en e, T_eD.*

Este espacio se puede descomponer como

$$T_eD = T_eG \oplus T_eJ = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{j}$$

de modo que esta álgebra es escindida.

Recíprocamente, toda álgebra de Leibniz escindida $L = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{j}$ proviene de derivar la conjugación en un digrupo apropiado $D = G \times J$, donde $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de G, y $\mathfrak{j}$ es el espacio tangente a J en un punto que es fijo para la acción.

De nuevo, la versión que hemos dado de este teorema se puede hallar en [10], y constituye un cierto refinamiento del resultado original, ya que en su trabajo Kinyon supone en el enunciado ciertas hipótesis innecesariamente restrictivas, como que el digrupo resultante de la integración es un fibrado vectorial. Por ello, parece conveniente enfatizar que este punto de vista nos permite entender mejor la geometría de los digrupos, ya que por ejemplo tenemos el siguiente:

Corolario 1. *Un digrupo de Lie $D = G \times J$ tiene la estructura geométrica de un fibrado asociado trivial, $D \to G$, con fibra J.*

Y como ilustración de la ganancia obtenida, podemos con este enfoque construir fácilmente muchos ejemplos de digrupos, como el siguiente:

Ejemplo 15. *Un ejemplo sencillo de un digrupo de Lie que no es un fibrado vectorial es:*

Consideremos el grupo $SO(2)$ de rotaciones en el plano, y hagámoslo actuar en la esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ por rotaciones alrededor del eje z. Notemos que esta acción tiene dos puntos fijos, los polos; si escogemos cualquiera de ellos, digamos el polo norte $(0,0,1)$, la construcción anterior da una estructura de digrupo en $SO(2) \times S^2$.

La estructura de álgebra de Leibniz 3-dimensional correspondiente a este digrupo se puede calcular fácilmente: Si $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$, entonces

$$[X, Y] = (0, -y_3, y_2).$$

Es claro también que la misma álgebra de Leibniz se obtiene si consideramos $\mathbb{R}^2$ en vez de S^2, y de nuevo actuamos por rotaciones.

Pero además, y lo que quizá es lo más importante, esto tiene consecuencias no triviales incluso en el caso clásico. En el fondo, la razón para ello es que un álgebra de Leibniz se puede escindir de varias maneras, como se puede ver con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 16. *Las φ-diálgebras se escinden sobre $S = \ker \varphi$. Para verlo, basta con escoger, como antes, un elemento $e \in V$ tal que $\varphi(e) = 1$, y definir $E = Diag\{e, \dots, e\}$; no es difícil probar que la relación*

$$X = (X - \varphi(X)E) + \varphi(X)E$$

da entonces la escición deseada.

Pero también se escinden sobre el ideal $K = \ker ad = J \oplus \mathbb{R}E$. En este caso, una descomposición explícita es la siguiente:

$$X = \left(X - \left(\varphi(X) - \frac{1}{n} tr\left(\varphi(X)\right) \right) E \right) + \left(\varphi(X) - \frac{1}{n} tr\left(\varphi(X)\right) \right) E$$

Esto nos lleva a nuestra segunda y última "variación no clásica" del teorema de Lie (que es parte de unos resultados obtenidos recientemente en colaboración con Juan Monterde, de la Universidad de Valencia, [8]):

Teorema 9. *Supongamos que* $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{g}$ *es un ideal no trivial de un álgebra de Lie abeliana,* $\mathfrak{g}$*. Entonces como álgebra de Leibniz,* $\mathfrak{g}$ *se escinde sobre* $\mathfrak{j}$*.*

Por consiguiente, existe un digrupo de Lie D*, que no es un grupo de Lie (ya que no todos los elementos de* D *son inversos), tal que el espacio tangente en la unidad barra distinguida hereda la estructura del álgebra de Leibniz (que en este caso es de Lie) dada.*

Un ejemplo de esto (implícitamente considerado ya en [9]) es:

Ejemplo 17. *Dada un álgebra de Lie abeliana* $\mathfrak{g}$*, como álgebra de Leibniz* $S = 0$ *y* $K = \mathfrak{g}$*; esta álgebra se escinde sobre cualquier ideal.*

La integración "usual" de $\mathfrak{g}$ *se realiza relativamente a la escición con respecto del ideal trivial* $\{0\}$*, y tiene como resultado el digrupo* $\mathfrak{g}$*, donde ambas operaciones son iguales a la suma, y que por supuesto es un grupo.*

Sin embargo, el digrupo asociado al ideal $\ker ad$ *es simplemente la variedad* $\mathfrak{g}$ *pensada como un fibrado trivial sobre el punto* $\{0\}$*, que* ***no*** *es un grupo de Lie; de hecho, el grupo de inversos se reduce al mismo* $\{0\}$*.*

Vemos así que el problema planteado en el tercer teorema de Lie puede tener soluciones que no son grupos de Lie, si admitimos que los digrupos pueden ser solución (y no sólo los grupos).

7. Algunos comentarios finales

1. Quizá la conclusión más importante y sorprendente es que puede haber "soluciones no clásicas" al tercer teorema de Lie, si ampliamos la clase de estructuras algebraicas donde buscamos la solución. Es decir, si no suponemos *a priori* que la estructura algebraica de la variedad integral es la de grupo, hemos visto en particular que bajo ciertas circunstancias podemos obtener digrupos además de grupos.

Una pregunta natural es entonces si hay más opciones que los digrupos. Por ejemplo, en [10] se da una respuesta parcial, en términos de fibrados asociados no necesariamente triviales (aunque, en retrospectiva, el ejemplo explícito discutido ahí es poco natural, y en consecuencia quizá poco satisfactorio).

2. El problema global de integrar álgebras no escindidas sigue abierto. En los últimos meses se han hecho algunos avances, en particular

en la dirección de hallar una solución local; pero aún hay varios puntos que requieren más precisión (véase por ejemplo [8], y las referencias ahí citadas).

3. Por último quisiera plantear la siguiente pregunta: ¿Qué otras generalizaciones de álgebra de Lie se pueden considerar, que conduzcan a un "tercer teorema fundamental"?

Por ejemplo: Tiene sentido (y si no, ¿por qué no?) el tercer teorema para "álgebras de Jacobi", donde éstas se definirían reteniendo la identidad de Jacobi en vez de la de Leibniz.

Agradecimientos. Este trabajo surgió de charlas que impartí en las universidades de Valencia, España, y de Antioquia y Nacional, sede Medellín, Colombia, así como en el Congreso de la Sociedad Colombiana de Matemáticas, en Bucaramanga. Deseo hacer patente mi reconocimiento a los organizadores de los eventos en Colombia, tanto por la amable invitación que me fue hecha, como por el excelente trato que me brindaron durante mi estancia ahí; pero sobre todo es un placer expresar aquí mi agradecimiento al Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Valencia por su hospitalidad durante una estancia sabática.

Referencias

[1] R. L. Bryant. *An introduction to Lie groups and symplectic geometry.* En Geometry and quantum field theory (Park City, UT, 1991), 5-181, IAS/Park City Math. Ser., 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
[2] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie Groups, Universitext, Springer Verlag.
[3] R. Felipe, *Digroups and their linear representations*, East-West Journal of Mathematics **8**, No.1 (2006), 27-48.
[4] Michael K. Kinyon, *Leibniz algebras, Lie Racks, and Digroups*, Journal of Lie Theory, **17** No. 4 (2007), 99-114.
[5] K. Liu, *Transformation digroups*, arXiv Math. GR/0409256 (2004).
[6] J.L. Loday, *Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz*, Ens. Math. **39** (1993) 269-293.
[7] J.L. Loday, *Dialgebras*; in: *Dialgebras and related operads*, Lecture Notes in Mat. vol. **1763**, Springer Verlag 2001, p. 7-66.
[8] J. Monterde, F. Ongay *On integral manifolds for Leibniz algebras*, aceptada en Algebra (2014).
[9] Fausto Ongay, *φ-Dialgebras and a Class of Matrix 'Coquecigrues"*, Canad. Math. Bull., **50** (1) (2007), 126-137.
[10] Fausto Ongay, *On the Notion of Digroup* Preprint CIMAT I-10-04 (MB) (2010).

CIMAT, Gto., México