FOLIACIONES AMPLIAS CON COMPONENTE DE KUPKA

Omegar CALVO–ANDRADE

0. Introducción.

Una foliación holomorfa de codimension uno $\mathcal{F}$, en una variedad compleja M, puede ser definida por una clase de equivalencia de secciones holomorfas ω del fibrado vectorial $T^*M \otimes L$, donde L es un fibrado holomorfo de líneas sobre M y la sección ω satisface la condición de integrabilidad de Frobenius $\omega \wedge d\omega = 0$. Denotaremos por $\mathcal{F}_\omega$ a la foliación representada por la sección ω y por $\mathrm{Fol}(M; L)$ al conjunto de foliaciones representadas por secciones del fibrado $T^*M \otimes L$.

El **Conjunto singular** de la foliación es el subconjunto analítico de M definido por

$$S_\omega := \{p \in M \,|\, \omega(p) = 0\},$$

al que supondremos de codimensión ≥ 2.

El **Conjunto de Kupka** de la foliación $\mathcal{F}_\omega$, está definido por

$$K_\omega = \{p \in S_\omega| \quad d\omega(p) \neq 0\}.$$

Las propiedades más importantes de K_ω son la **Estabilidad por perturbaciones de la foliación** y la **propiedad de producto local:** la foliación está definida localmente por una 1–forma que depende de dos variables, $\eta = A(x,y)dx + B(x,y)dy$, con singularidad aislada en 0 y la foliación que ella define es única en cada componente conexa $K \subset K_\omega$. A esta forma la llamaremos en lo sucesivo, el **tipo transversal** de la componente K.

Denotemos por $\mathrm{K}(M, L) \subset \mathrm{Fol}(M; L)$ al conjunto de foliaciones cuyo estrato de codimension 2 del conjunto singular, consta de una componente conexa compacta del conjunto de Kupka, y por $\mathrm{K}(M, L, \eta) \subset \mathrm{K}(M, L)$ al subconjunto de foliaciones tales que la componente conexa compacta del conjunto de Kupka, tiene tipo transversal η.

Proyecto Conacyt 3398–E9307

El primer ejemplo de foliaciones holomorfas de codimension uno que poseen una componente conexa y compacta del conjunto de Kupka, está dado por secciones de la forma

$$\omega = pf\,dg - qg\,df \in \mathrm{Fol}(M;L) \quad L = L_1 \otimes L_2$$

donde f y g son secciones holomorfas de fibrados de líneas positivos L_1, L_2 sobre M que satisfacen $L_1^{\otimes q} = L_2^{\otimes p}$, donde p y q son enteros positivos. Las hipersuperficies $\{f = 0\}$ y $\{g = 0\}$ son lisas, irreducibles, reducidas y se intersectan transversalmente, de hecho, en este caso tenemos que el conjunto de Kupka es la intersección de estos dos divisores positivos: $K_\omega = \{f = 0\} \cap \{g = 0\}$.

Estas foliaciones, admiten la integral primera meromorfa $\varphi = f^q/g^p$, etos es, las hojas de la foliación está dada por la família de hipersuperficies

$$\{\lambda \cdot f - \mu \cdot g = 0 | [\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1\}.$$

Cuando la variedad M tiene dimensión compleja $n \geq 3$ y $H^1(M;\mathbb{C}) = 0$, es demostrado en [GM–L, C], que las foliaciones descritas anteriormente, definen componentes irreducibles de la variedad algebraica $\mathrm{Fol}(M;L)$.

Una pregunta natural es determinar las componentes irreducibles de $\overline{\mathrm{K}(M,L)}$. En esta dirección, el siguiente resultado es conocido:

Teorema. [C–L] *Sea ω una foliación holomorfa de codimension uno en $\mathbb{P}^n$, donde $n \geq 3$, supongamos que K_ω es compacto y conexo. Si K_ω es una interseccion completa, entonces existen polinomios homogeneos f y g tales que*

$$\omega = pf\,dg - qg\,df,$$

En el mismo trabajo, es planteada la siguiente conjetura:

Conjetura I. *Sea ω una foliación holomorfa de codimension uno en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ $\;n \geq 3$. Si el conjunto de Kupka K_ω de la foliación $\mathcal{F}_\omega$ es compacto y conexo, entonces K_ω es una intersección completa.*

Por el resultado de Cerveau Lins, la solución afirmativa de la conjetura I, nos da la respuesta afirmativa de la siguiente conjetura:

Conjectura II. *Sea ω una foliación holomorfa de codimension uno en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ $\;n \geq 3$. Si el conjunto de Kupka K_ω es compacto y conexo, entonces la foliación admite una integral primera meromorfa.*

En [C–S], es demostrado que las clases de Chern de una componente de Kupka, se comportan como las clases de Chern de una intersección completa, lo que refuerza la conjetura planteada por Cerveau y Lins en [C–L].

1 Formulación de los Resultados.

Los puntos importantes para la demostración del teorema de Cerveau–Lins son los siguientes:

De la hipótesis: K_ω es una intersección completa, deducimos las siguientes consecuencias:

(1) La primera clase de Chern del fibrado normal ν_K de $K_\omega \subset M$ es no cero.
(2) El complemento de la componente de Kupka $\mathbb{P}^n - K_\omega$ es una variedad 2–convexa.

De la primera propiedad, deducimos el tipo transversal de la componente está dado por una forma del tipo $\eta = px\,dy - qy\,dx$, donde $1 \leq p < q$ son números enteros primos relativos ó $p = q = 1$. Cuando $p \neq q$, es posible encontrar un factor integrante en una vecindad de K_ω y en el otro caso, la foliación admite una estructura transversal proyectiva en una vecindad de K_ω. De la 2–convexidad del complemento de la componente de Kupka, se sigue, por una generalización del teorema de extensión de Hartogs, que el factor integrante o la estructura transversal proyectiva se extienden a todo el ambiente, de donde se obtiene el resultado [C–L, Sc, Sc1].

En este trabajo, vamos a describir al conjunto $\mathrm{K}(M, L)$, cuando el fibrado de líneas L es **muy amplio**. Para esto, demostraremos que las dos propiedades utilizadas en la prueba del teorema de Cerveau–Lins, son siempre satisfechas, esto nos permitirá generalizar el resultado siguiendo los pasos mencionados anteriormente.

El primer paso en esta dirección, es el de calcular el tipo transversal de la componente de Kupka, este es el contenido del Teorema (5.3) que ahora enunciamos:

5.3 Teorema. *Sea $\omega \in K(M, L)$ donde L es muy amplio. Entonces existen enteros positivos $p \leq q$ tales que.*

$$\omega \in K(M, L, px\,dy - qy\,dx)$$

Este resultado, nos permite demostrar la positividad del fibrado normal de $K \subset M$, de donde, como consecuencia de un resultado de Schneider [S], podemos demostrar el siguiente teorema:

7.2 Teorema. *Sea $\omega \in K(M, L)$ donde L es muy amplio, entonces el complemento de la componente de Kupka, $M - K$ es una variedad* **2–convexa**

Teniendo los dos ingredientes de la prueba del teorema de Cerveau–Lins, y utilizando los resultados obtenidos por Scardua [Sc, Sc1], podemos generalizar el resultado de la siguiente manera:

7.3 Teorema. *Sea M una variedad compleja $\dim_{\mathbb{C}} M \geq 3$. Sea L un fibrado de líneas holomorfo muy amplio, y $\mathcal{F} \in K(M, L, \eta)$. Entonces:*

(1) *Si el tipo transversal $\eta \neq x\,dy - y\,dx$, la foliación posee al menos una hoja compacta y en el complemento de esta hoja la foliación admite una estructura transversal afín.*
(2) *Si $\eta = x\,dy - y\,dx$ la foliación admite una estructura transversal proyectiva.*

En el primer caso, cuando $H^1(M, \mathbb{C}) = 0$, y $\omega \in \mathrm{K}(M, L, px\,dy - qy\,dx)$, la foliacion admite una integral primera meromorfa, lo que demuestra en un contexto más general, la conjetura de Cerveau y Lins.

Cuando el tipo transversal está dado por la forma $\eta = x\,dy - y\,dx$, tendremos que la foliación está definida por 2 variables: su conjunto de Kupka $K \subset M$ y la dinámica de la foliación, esta última, viene definida por una representación $\rho_{\mathcal{F}} : \pi_1(M) \to SL_2(\mathbb{C})$, esta pareja, puede definirse de la siguiente forma:

7.4 Teorema. *El conjunto $K(M, L, x\,dy - y\,dx)$, donde L es un fibrado muy amplio, está parametrizado por una pareja (E, σ) tal que E es una fibrado vectorial* *holomorfo proyectivamente plano de rango 2, y σ es una sección holomorfa de E que se anula en K*

2 Fibrados Vectoriales Positivos.

En esta sección, discutiremos la noción de positividad de un fibrado vectorial. Cuando una variedad $X \subset M$ está encajada de manera tal que su fibrado normal es positivo, podemos generalizar el teorema de extensión de Hartogs, que será fundamental en las secciones siguientes.

Sea M una variedad compleja. Dado un fibrado vectorial holomorfo $E \to M$, denotaremos por $\mathcal{O}(E)$ (resp. $\mathcal{A}(E)$) al haz de las secciones holomorfas del fibrado vectorial E (resp. al haz de las secciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ de E). El grupo de cohomología $H^0\big(M, \mathcal{O}(E)\big)$, corresponde a las secciones holomorfas globales de E, que también denotaremos por $\Gamma(E)$. Este es un $\mathbb{C}$–espacio vectorial de dimension finita cuando M es compacta.

Dado un fibrado vectorial complejo $E \to M$ (no necesariamente holomorfo), definimos una **métrica Hermitiana**, denotada por $\langle\cdot,\cdot\rangle$, a una asignación de un producto interno hermitiano $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$ en cada fibra del fibrado vectorial E_x, y que varia $\mathcal{C}^\infty$ en el siguiente sentido: dadas dos secciones X, $Y \in \mathcal{A}(E)$ la función

$$x \mapsto \langle X(x), Y(x)\rangle_x \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Sea $\mathcal{A}^p(E)$ al haz de p–formas de clase $\mathcal{C}^\infty$ con valores en el fibrado E, esto es, $\mathcal{A}^p(E) = \mathcal{A}(\wedge^p T^*M \otimes E)$.

Una **conexión** ∇ en el fibrado vectorial complejo $E \to M$ es una aplicación $\mathbb{C}$–lineal

$$\nabla : \mathcal{A}(E) \to \mathcal{A}^1(E)$$

que satisface la regla de Leibinitz:

$$\nabla(f \cdot \sigma) = df \otimes \sigma + f \cdot \nabla\sigma \quad f \in \mathcal{C}^\infty(M) \quad \sigma \in \mathcal{A}(E).$$

Dada una conexión ∇ en un fibrado vectorial E, la podemos extender a $\nabla : \mathcal{A}^p(E) \to \mathcal{A}^{p+1}(E)$ de la siguiente forma: Una sección $\tau \in \mathcal{A}^p(E)$, localmente se escribe como $\tau = \phi \otimes \sigma$ donde ϕ es una p–forma y σ es una sección local de E, la extension se define de la siguiente forma:

$$\nabla\tau = \nabla(\phi \otimes \sigma) = d\phi \otimes \sigma + (-1)^p \phi \wedge \nabla\sigma.$$

Con esta definición, tenemos que

$$\nabla \circ \nabla := \nabla^2 : \mathcal{A}^0(E) \to \mathcal{A}^2(E),$$

es $\mathcal{C}^\infty$–lineal, esto es, $\nabla^2 f \cdot \sigma = f\nabla^2\sigma$ para f una función $\mathcal{C}^\infty$ y $\sigma \in \mathcal{A}(E)$, por lo tanto, tenemos que $\nabla^2\sigma = \Theta \otimes \sigma$, donde Θ es la matríz de **curvatura de la conexión**. Esta matriz es de $k \times k$ (si el rango del fibrado es k), y sus coeficientes son 2–formas en M.

Decimos que la conexión ∇ en un fibrado vectorial E que posee una métrica Hermitiana $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es compatible con la métrica, si para X, $Y \in \mathcal{A}(E)$ tenemos que

$$d\langle X, Y\rangle = \langle \nabla X, Y\rangle + \langle X, \nabla Y\rangle.$$

Un resultado de geometría diferencial asegura que dado un fibrado vectorial siempre existen métricas Hermitianas y conexiones, además, si la métrica Hermitiana está dada, existe una única conexión compatible con la métrica.

Ahora vamos a introducir una propiedad que en lo sucesivo, será de gran importancia para nosotros:

2.1 Definición. Un fibrado vectorial holomorfo $E \to M$ es **positivo** si y solo si existe una metrica Hermitiana en E para la cual *el tensor de curvatura* $\Theta = (\Theta^{\rho}_{\sigma ij})$ tiene la propiedad que la forma Hermitiana

$$\Theta(\zeta,\eta) = \sum_{\rho,\sigma,i,j} \Theta^{\rho}_{\sigma ij}\zeta^{\sigma}\overline{\zeta}^{\rho}\eta^{i}\overline{\eta}^{j}$$

es definida positiva en las variables ζ, η.

Es fácil ver, que suma directa de fibrados vectoriales positivos es nuevamente positivo; en el caso de fibrados de líneas, la positividad es una propiedad topológica, pues esta sólo depende de la clase de Chern [G–H], esto es, un fibrado de líneas holomorfo es positivo, si y solo si, la clase de Chern está representadoa por una $(1,1)$–forma in $H^2_{DR}(M)$ positiva.

Decimos que un fibrado de líneas holomorfo L es **muy amplio**, si las secciones holomorfas de L nos induce un encaje en el espacio proyectivo de la variedad M. Esto es, podemos pensar a $M \subset \mathbb{P}(\Gamma(L))$, en este caso, el fibrado de líneas L es el fibrado asociado a una sección hiperplana de M con respecto a este encaje. El teorema de encaje de Kodaira, [G–H], establece que si un fibrado de líneas holomorfo es positivo, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L^{\otimes n}$ es muy amplio para $n \geq n_0$.

Una variedad compleja M de dimension compleja n es $k-$**convexa**, si existe una función de clase $\mathcal{C}^2$ $\quad\varphi : M \to \mathbb{R}$ tal que su forma de Levy

$$L(\varphi) = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}\right),$$

tiene, al menos, $n-k+1$ valores propios positivos y φ satisface que

$$M = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} \varphi^{-1}(a,\infty).$$

Sea M una variedad compleja 1–convexa de dimensión n, la función φ es **plurisubharmonica**, y por lo tanto, M es una variedad de Stein.

Sea $X \subset M$ una subvariedad, el siguiente resultado relaciona la manera en que está encajada X como subvariedad de M, con las propiedades de convexidad del complemento. La prueba de este resultado puede encontrarse en [S].

2.2 Teorema. *Sea M una variedad compleja, compacta, sea $X \subset M$ una subvariedad compacta de codimensión k en M. Si el fibrado normal ν_X es positivo, entonces $M - X$ es una variedad k–convexa.*

La propiedad de las variedades k–convexas, que es utilizada en [C–L], es la siguiente generalización del Teorema de extensión de Hartogs:

2.3 Corolario. *Sea $X \subset M$ una subvariedad que satisface las hipótesis del Teorema (1.2). Sea $X \subset U$ una vecindad conexa de X tal que $M - U$ es conexo. Sea $E \to M$ un fibrado vectorial holomorfo y $\mathcal{O}(E)$ el haz de secciones holomorfas. Entonces la restricción*

$$\Gamma\big(M; \mathcal{O}(E)\big) \to \Gamma\big(U; \mathcal{O}(E)\big)$$

es sobreyectiva

Dicho de otra forma, toda sección σ del haz $\mathcal{O}(E)$ en el abierto U, puede extenderse a una sección $\widetilde{\sigma}$ definida en M.

3. Foliaciones holomorfas de Codimensión uno.

Una foliación holomorfa $\mathcal{F}$ de codimensión p en una variedad compleja M, está dada por una terna $(\{U_\alpha\}, \{f_\alpha\}, \{\phi_{\alpha\beta}\})$ donde $\{U_\alpha\}$ es una cubierta abierta de M, una família de submersiones holomorfas $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^p$ y una família de biholomorfismos $\phi_{\alpha\beta} : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^p$ tales que si $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces $f_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = \phi_{\alpha\beta} \circ f_\beta|_{U_{\alpha\beta}}$.

Una foliación holomorfa de codimension p, con singularidades en la variedad compleja M, es una pareja $(S(\mathcal{F}), \mathcal{F})$ donde $S(\mathcal{F}) \subset M$ es un subconjunto analítico de M y $\mathcal{F}$ es una foliación holomorfa de codimensión p en $M - S(\mathcal{F})$.

Cuando la codimensión de la foliación es uno, y el conjunto singular tiene codimensión al menos 2, la foliación puede ser dada por una família de 1–formas holomorfas $\{\omega_\alpha\}$, que no se anulan identicamente, definidas en una cubierta abierta $U := \{U_\alpha\}$, que satisfacen la condición de integrabilidad $\omega_\alpha \wedge d\omega_\alpha = 0$, y la condición de cociclo $\omega_\alpha = \lambda_{\alpha\beta}\omega_\beta$, donde $\lambda_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$ siempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Sea $\{\omega'_\alpha\}$ otra família de 1–formas que satisface las condiciones de integrabilidad y de cociclo, $\omega'_\alpha = \lambda'_{\alpha\beta}\omega'_\beta$ donde $\lambda'_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta))$ es otro cociclo. Las famílias $\{\omega_\alpha\}$ y $\{\omega'_\alpha\}$ son *equivalentes* si existe una família de funciones holomorfas nunca nulas $\rho_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$ tal que $\omega_\alpha = \rho_\alpha\omega'_\alpha$; en este caso, es facil ver, que los cociclos $\{\lambda_{\alpha\beta}\}$ y $\{\lambda'_{\alpha\beta}\}$ son co–homologos en $H^1(\{U_\alpha\}, \mathcal{O}^*)$. Si denotamos por L al fibrado de líneas holomorfo definido por el cociclo $\{\lambda_{\alpha\beta}\}$, las famílias de 1–fromas $\{\omega_\alpha\}$ y $\{\omega'_\alpha\}$, nos definen dos secciones holomorfas del fibrado vectorial holomorfo $T^*M \otimes L$.

2.1 Definición. Una **foliación holomorfa de codimensión uno con singularidades** en una variedad compleja M, es una clase de equivalencia de secciones holomorfas del fibrado $T^*M \otimes L$, donde L es un fibrado de líneas holomorfo y la sección es integrable $\omega \wedge d\omega = 0$.

Denotaremos por $\Omega^1(L)$ al haz de secciones holomorfas del fibrado vectorial $T^*M \otimes L$. Denotemos por $\mathbb{H}$ al fibrado de líneas de $\mathbb{P}^n$ asociado a la sección hiperplana. Todo fibrado de líneas en el espacio proyectivo es de la forma $\mathbb{H}^{\otimes k}$, con $k \in \mathbb{Z}$, el haz de secciones hoomorfas será denotado por $\mathcal{O}(k)$ y a las secciones del fibrado $T^*\mathbb{P}^n \otimes \mathbb{H}^k$ lo denoatremos por $\Omega^1(k)$.

Una sección integrable $\omega \in H^0\big(\mathbb{P}^n, \Omega^1(k)\big)$, esta dada por 1–formas en $\mathbb{C}^{n+1}$ de la siguiente forma:

$$\omega = \sum_{i=0}^{n} a_i(z_0, \ldots, z_n)\, dz_i, \quad \omega \wedge d\omega = 0,$$

donde $a_0, \ldots a_n$ son polinomios homogéneo de grado $k-1$ y la forma anula al campo radial en $\mathbb{C}^{n+1}$, o sea

$$\omega\left(\sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i}\right) = \sum_{i=0}^{n} z_i \cdot a_i(z_0, \ldots, z_n)\, dz_i = 0$$

En este caso, el fibrado de líneas tiene clase de Chern $k \in H^2(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, y corresponde al **grado** de la foliación.

En general, si $\omega \in \Gamma(T^*M \otimes L)$ es una sección que representa una foliación de codimension uno, la clase de Chern del fibrado de líneas $c_1(L) \in H^2(M, \mathbb{C})$, es un invariante discreto de la foliación que generaliza la noción de grado. Diremos que la foliación es **muy amplia**, si el fibrado de líneas L lo es, denotaremos por $\mathrm{Fol}(M; L)$ al conjunto de foliaciones definidas por secciones de $T^*M \otimes L$. Cuando M es compacta de dimensión ≥ 3, $\mathrm{Fol}(M; L)$ es una subvariedad, en general singular, del espacio proyectivo $\mathbb{P}\big(H^0\big(M, \Omega^1(L)\big)\big)$.

El **conjunto singular** o **singularidades** de la foliación representada por ω, es el conjunto analítico de M

$$S_\omega := \{p \in M \,|\, \omega(p) = 0\},$$

el cual supondremos desde ahora, de codimensión mayor o igual a 2, la sección ω define una foliación holomorfa de $\mathcal{F}_\omega$ en $M - S_\omega$, cuyas hojas son las hojas de la foliación con singularidades.

Por abuso de lenguaje, si V es una hipersuperficie compacta invariante por la foliación, dado que el conjunto singular tiene codimension 2, es fácil ver que $V - V \cap S_\omega$ es una hoja, en este caso diremos que V es una **hoja compacta**.

Una **família holomorfa** $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ de **foliaciones holomorfas de codimensión uno** con singularidades, parametrizada por un espacio analítico $\mathcal{T}$ consiste de:

(1) Una família analítica de variedades complejas $\{M_t\}$ definidas por una aplicación $\pi : \mathcal{M} \to \mathcal{T}$ entre espacios analíticos, tal que la diferencial de π tiene rango máximo y $M_t = \pi^{-1}(t)$.

(2) Una foliación holomorfa con singularidades $\widetilde{\mathcal{F}}$ en $\mathcal{M}$ cuyas hojas están contenidas en las fibras de la aplicación π, y la restricción $\widetilde{\mathcal{F}}|_{M_t} = \mathcal{F}_t$ es una foliación holomorfa de codimensión uno con singularidades en la variedad M_t.

Dada una família de foliaciones $\{\mathcal{F}_t\}$. La **holonomia deformada** de una hoja $\mathcal{L}$ de la foliación $\mathcal{F}_0$, es la holonomia de la hoja $\mathcal{L}$ considerada como una hoja de la foliación $\widetilde{\mathcal{F}}$, la cual tiene la forma:

$$H_\delta(z, t) = (h_\delta(z, t), t) \quad \delta \in \pi_1(\mathcal{L}).$$

además; $h_\delta(z, 0) : \Sigma \to \Sigma$ es la holonomia asociada al lazo $\delta \in \pi_1(\mathcal{L})$ como hoja de la foliación $\mathcal{F}_0$.

Una hoja compacta V de la foliación $\mathcal{F}$ es **estable** para la família $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ si para toda vecindad tubular $\pi : \mathcal{V} \to V$ de V, existe una vecindad $\mathcal{N}$ de $0 \in \mathcal{T}$ tal que, para cada $t \in \mathcal{N}$ existe una hoja compacta $V_t \subset \mathcal{V}$ de la foliación $\mathcal{F}_t$, y la aplicación $\pi|_{V_t} : V_t \to V$ es un difeomorfismo $\mathcal{C}^\infty$.

Sea $\mathcal{F}_t$ una família de foliaciones y sea V una hoja compacta de la foliación $\mathcal{F}_0$. Si esta hoja compacta V es estable para la família, entonces existe un punto fijo de la holonomia perturbada de la hoja $V - V \cap S_\omega$. Esto es de hecho equivalente cuando $V \cap S_\omega = \emptyset$, en general, es necesario tener alguna condición adicional sobre el tipo de singularidades que intersectan a V.

4. Singularidades de Kupka.

En esta sección, daremos las propiedades más importantes del conjunto de Kupka $K_\omega \subset S_\omega$ de una foliación holomorfa de codimensión uno.

4.1 Definición. Sea $\mathcal{F}_\omega \in \mathrm{Fol}(M; L)$. El **Conjunto de Kupka**, denotado por $K_\omega \subset S_\omega$ está definido por:

$$K_\omega := \{p \in S_\omega \,|\, d\omega(p) \neq 0\}.$$

Diremos que la foliación $\mathcal{F}$ tiene una **componente de Kupka** K si es compacta y conexa K_ω.

Sea $\omega \in \mathrm{Fol}(M; L)$, supongamos que la sección está representada por las 1–formas integrables ω_α en la cubierta abierta $U = \{U_\alpha\}$ de M, tal que $\omega_\alpha = \lambda_{\alpha\beta} \cdot \omega_\beta$ cuando $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, donde $\lambda_{\alpha\beta}$ son los cociclos que definen a L. El conjunto de Kupka está bien definido, de hecho, si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$,tenemos que $\omega_\alpha = \lambda_{\alpha\beta} \cdot \omega_\beta$, de donde, para $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap S_\omega$, tenemos

$$d\omega_\alpha(p) = \lambda_{\alpha\beta}(p) \cdot d\omega_\beta(p),$$

por lo tanto, $d\omega_\alpha(p) \neq 0$ siempre que $d\omega_\beta(p) \neq 0$. Esto prueba que el conjunto de Kupka está bien definido, y este mismo argumento, demuestra que no depende de la elección de la sección que define a la foliación.

Las principales propiedades del conjunto de Kupka son las siguientes:

(1) **Estructura de Producto Local** [M]. Dada una componente conexa $K \subset K(\mathcal{F})$ existe un germen en $0 \in \mathbb{C}^2$ de 1–forma holomorfa $\eta = A(x, y)\, dx + B(x, y)\, dy$, que tiene una singularidad aislada en 0, una cubierta abierta de $\{U_\alpha\}$ de una vecindad $K \subset M$, y una familia de submersiones $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^2$ tal que

$$\varphi_\alpha^{-1}(0) = K \cap U_\alpha \quad \text{y} \quad \omega_\alpha = \varphi_\alpha^* \eta.$$

Observación. La 1–forma η será llamada **tipo transversal** de la componente K. Esta está bien definida módulo biholomorfismo y multiplicación por funciones holomorfas nunca nulas.

(2) **Estabilidad bajo Pertrurbaciones.** Sea $\mathcal{F}_t$ una família de foliaciones. Si K_0 es una componente conexa del conjunto de Kupka de la foliación $\mathcal{F}_0$, y tiene tipo transversal η_0, existen una família analítica de 1–formas η_t y de submersiones

$\varphi_{\alpha t} : U_\alpha \to \mathbb{C}^2$ tal que la foliación $\mathcal{F}_t$ está definida por $\varphi^*_{\alpha t}\eta_t$ en U_α, y $\varphi^{-1}_{\alpha t}(0) = U_\alpha \cap K_t$.

Como $\varphi^*\eta$ define a la foliación en un punto de K, tenemos que $d\eta_0 \neq 0$, por lo tanto, la parte lineal del tipo transversal es no nula. De acuerdo a la parte lineal del tipo transversal, podemos clasificar a la componente en tres tipos diferentes:

(1) Degenerada: Si la parte lineal tiene un valor propio cero.
(2) No Semisimple: Si la parte lineal tiene ambos valores propios iguales y es no semisimple.
(3) Semisimple: Si la parte lineal tiene 2 valores propios no nulos.

Sea $\eta = \eta_1 + \cdots$ el tipo transversal, supongamos que la parte lineal $\eta_1 = x\,dy - \lambda y\,dx$, donde $\lambda \in \mathbb{C} - \{1\}$. Los espacios propios en cero de la forma η_1, nos inducen una descomposición del fibrado normal $\nu_K = L_1 \oplus L_\lambda$ en suma directa de fibrados de líneas, además, tenemos la siguiente relación de las clases de Chern:

$$\nu_K = L_1 \oplus L_\lambda \quad \text{y} \quad \lambda \cdot c_1(L_1) - c(L_\lambda) = \mathbf{0} \in H^2(K, \mathbb{C}).$$

Este resultado, cuya prueba aparece en [GM–L], junto con la estabilidad del conjunto de Kupka bajo deformaciones nos da la siguiente propiedad:

(3) **Rigidez del Tipo Transversal** [GM–L]. Si la primera clase de Chern del fibrado normal ν_K de una componente de Kupka conexa, compacta $K \subset K(\mathcal{F})$ es no nula, la parte lineal del tipo transversal η tiene la forma $px\,dy - qy\,dx$ donde p, q son enteros primos relativos ó $p = q = 1$ (en este caso la parte lineal es semisimple). Además; si la parte lineal pertenece al dominio de Poincaré la 1–forma η debe ser linealizable y permanece constante bajo deformaciones de la foliación.

(4) **Geometría del Encaje** [C–S]. Sea $\mathcal{F} \in \mathrm{Fol}(M; L)$, y $K \subset K(\mathcal{F})$ una componente conexa compacta. Entonces K está subcanónicamente encajada, esto es:

$$\Omega^{n-2}_K = \left(\Omega^n_M \otimes L\right)|_K \quad \text{y} \quad \wedge^2 \nu_K = L|_K,$$

donde ν_K es el fibrado normal de $K \subset M$, y Ω^{n-2}_K, Ω^n_M denotan a los haces canónicos de K y M respectivamente.

Esto puede ser probado de la siguiente forma:

Prueba.

Observemos que la forma $\omega_\alpha := \varphi^*_\alpha\eta$ define localmente a la foliación en U_α, por lo tanto, para $p \in K$, tenemos las siguientes ecuaciones

$$d\omega_\alpha(p) = \varphi^*_\alpha\left(\frac{\partial B}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A}{\partial y_\alpha}\right)(0) \cdot dx_\alpha \wedge dy_\alpha$$
$$d\omega_\alpha(p) = \lambda_{\alpha\beta}(p) \cdot d\omega_\beta(p)$$

Por lo tanto, $d\omega_\alpha$ es una sección holomorfa nunca nula del fibrado $\wedge^2\nu^*_K \otimes L|_K$ y por lo tanto, este fibrado es holomorficamente trivial, de donde tenemos

$$\wedge^2\nu^*_K = L^{-1}|_K \Longrightarrow \wedge^2\nu_K \simeq L|_K.$$

Por otra parte, de la sucesión exacta de fibrados vectoriales

$$0 \to \tau_K \to \tau_M|_K \to \nu_K \to 0,$$

obtenemos el isomorfismo

$$\Omega_K^{n-2} \otimes \wedge^2 \nu_K^* = \Omega_K^{n-2} \otimes L^{-1}|_K \simeq \Omega_M^n|_K$$

de donde

$$\Omega_K^{n-2} \simeq (\Omega_M^n \otimes L)|_K. \quad \square$$

Esta propiedad impone serias restricciones sobre las posibles subvariedades de codimension dos que pueden ser el conjunto de Kupka de una foliación; por ejemplo, ninguna curva lisa $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^3$, que sea **proyectivamente normal y que no sea intersección completa**, puede ser el conjunto de Kupka de ninguna foliación. Esto nos dá, en particular, que la cúbica torcida $t \mapsto (t, t^2, t^3)$ no puede ser el conjunto de Kupka de ninguna foliación en $\mathbb{P}^3$ [C–S].

La consecuencia inmediata de esta propiedad geométrica del conjunto de Kupka, es la siguiente:

4.2 Lema. *Dada $\omega \in K(M, L)$, cuya componente de Kupka es K, y donde el fibrado L es muy amplio, entonces $c_1(\nu_K) \neq 0 \in H^2(K, \mathbb{C})$.*

Prueba. En efecto, por definición, la primera clase de Chern del fibrado normal $c_1(\nu_K) = c_1(\wedge^2 \nu_K)$.

Sea $\imath : K \to M$ la inclusión de K en M, por la naturalidad de las clases de Chern, tenemos que

$$c_1(\nu_K) = c_1(\wedge^2 \nu_K) = c_1(L|_K) = \imath^* c_1(L),$$

como L es muy amplio, tenemos que $\imath^* c_1(L) \neq 0$. $\square$

4.3 Corolario. *Sea $\omega \in K(M, L)$, cuya componente de Kupka es K, y donde el fibrado L es muy amplio, entonces la parte lineal del tipo transversal tiene la forma $px\,dy - qy\,dx$ donde p, q son enteros.*

Prueba. Es consecuencia inmediata del lema (4.2) y de la propiedad de rigidez del tipo transversal. $\square$

Dada $X \subset M$ una subvariedad, denotamos por $[X] \in H^*(M, \mathbb{C})$ a la clase fundamental X en M.

Cuando la foliación $\omega \in \mathrm{K}(M, L)$, donde L es un haz positivo, el hecho de que una componente de Kupka este subcanonicamente encajada, implica, por una construcción de Serre, el siguiente resultado [C–S]:

4.4 Teorema. *Dada $\mathcal{F} \in K(M, L)$, cuya componente de Kupka es K, y donde el fibrado L es positivo, existe una pareja (E, σ), donde E es un haz vectorial holomorfo de rango 2 sobre M, una sección holomorfa $\sigma \in H^0\big(M, \mathcal{O}(E)\big)$ que se anula en K. Si $\mathcal{J}_K$ denota al haz de ideales de K, la sección induce la sucesión exacta:*

$$0 \to \mathcal{O}_M \xrightarrow{\cdot\sigma} E \to \mathcal{J}_K \otimes L \to 0.$$

La clase de Chern Total de E está dada por

$$c(E) = 1 + c_1(L) + [K] \in H^*(M, \mathbb{Z}).$$

La construcción de la pareja (E, σ), depende del anulamiento de los grupos de cohomología $H^i(M, L^{-1}) \simeq 0$ para $i = 1, 2$, dado que $\dim_{\mathbb{C}} M \geq 3$, por el teorema de anulamiento de Kodaira, [G–H], estos grupos se anulan si L es un fibrado de líneas positivo.

El fibrado vectorial E del teorema (4.4), es una extensión del fibrado normal de $K \subset M$. Muchas propiedades de E están relacionadas con las propiedades geométricas de K, y estas a su vez, lo están con el comportamiento global de la foliación.

En la siguiente sección, usando el fibrado vectorial holomorfo que construimos anteriormente, y la fórmula de Baum–Bott, probaremos la siguiente propiedad:

(5) Dada una foliación holomorfa amplia con una componente de Kupka con tipo transversal η, entonces η es linealizable y pertenece al dominio de Poincaré.

5. Formula de Baum–Bott y Componentes de Kupka.

En esta sección, calcularemos la clase fundamental de una componente Kupka, como consecuencia, tendremos la clase de Chern Total del fibrado vectorial asociado a dicha componente de Kupka, para esto, usaremos la fórmula de Baum–Bott.

Consideremos una variedad compleja, compacta y conexa M de dimensión n. Una foliación holomorfa con singularidades en está dada por: [B–B]

(1) $\Theta_{\mathcal{F}}$ es un subhaz analítico coherente del haz de campos vectoriales holomorfos Θ_M.

(2) $\Theta_{\mathcal{F}}$ es cerrada bajo el corchete de Lie.

El **conjunto singular** consta de los puntos donde el haz cociente $Q = \Theta_M / \Theta_{\mathcal{F}}$ no es localmente libre.

Por definición, tenemos la sucesión exacta:

$$0 \to \Theta_{\mathcal{F}} \to \Theta_M \to Q \to 0$$

Sea $\Theta_{\mathcal{F}} \subset \Theta_M$ un subhaz integrable de dimensión $n-k$ y $\varphi \in \mathbb{C}[x_1 \ldots, x_n]$ un polinomio homogéneo simétrico de grado $1 \leq l \leq n-k$. Para este polinomio, existe un único polinomio $\widetilde{\varphi}$ tal que

$$\varphi = \widetilde{\varphi}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

donde σ_i denota a las funciones simetricas elementales.

Denotaremos por

$$\varphi(Q) := \widetilde{\varphi}\big(c_1(Q), \ldots c_n(Q)\big)$$

donde por $c_i(Q)$ denotamos a las clases de Chern del haz Q.

Sea Z una componente conexa compacta del conjunto singular. Consideremos μ_* definida por $\mu_* = \alpha \circ i_*$ donde $i_* : H_j(Z, \mathbb{C}) \to H_j(M, \mathbb{Z})$ está inducida por la inclusión y $\alpha : H_j(M, \mathbb{C}) \to H^{2n-j}(M, \mathbb{C})$ es el isomorfismo de Poincarè. el resultado principal de [B–B] es el siguiente:

5.1 Teorema. *Sea M una variedad compleja, compacta, sean $\Theta_{\mathcal{F}}, Q, \varphi$ como en el párrafo anterior. Entonces*

(1) *Existe una clase de homología $Res_{\varphi}(\Theta_{\mathcal{F}}, Z) \in H_{2n-2l}(Z, \mathbb{Z})$ con las siguientes propiedades*

(1.1) $Res_{\varphi}(\Theta_{\mathcal{F}}, Z)$ *depende solamente de* φ *y del comportamiento local de las hojas de la foliación* $\Theta_{\mathcal{F}}$ *cerca de* Z.

(1.2) $\sum_{Z} \mu_* Res_{\varphi}(\Theta_{\mathcal{F}}, Z) = \varphi(Q)$.

(2) *Sea* Z *una componente irreducible del conjunto singular con* $dim(Z) = n - k - 1$. *Si* $\Theta_{\mathcal{F}}$ *está generada localmente por*

$$\Big\{X(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} X_i(x_1, \ldots x_k)\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial z_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}\Big\} \quad \textit{Entonces}$$

$$Res_{\varphi}(\Theta_{\mathcal{F}}, Z) = \begin{bmatrix} \widetilde{\varphi}\big(DX(0)\big)\, dx_1 \cdots dx_k \\ X_1(x) \cdots X_k(x) \end{bmatrix} [Z]$$

Sea A una matriz con valores propios $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ definimos $\varphi(A) := \widetilde{\varphi}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Si el polinomio φ tiene grado k, tenemos

$$\varphi(X, 0) = Res_0 \begin{bmatrix} \widetilde{\varphi}\big(DX(0)\big)\, dx_1 \cdots dx_k \\ X_1(x) \cdots X_k(x) \end{bmatrix} = \Big(\frac{1}{2i\pi}\Big)^k \int_{\|X_i\| = \epsilon} \frac{\widetilde{\varphi}(DX(0)) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k}{X_1(x) \cdots X_k(x)}.$$

En el caso de una componente de Kupka, el haz tangente a la foliación $\Theta_{\mathcal{F}}$, consiste en los gérmenes de campos vectoriales holomorfos X para los cuales $\omega(X) = 0$ y tiene dimensión $n-1$, el conjunto singular es el conjunto de ceros de ω, que tiene codimensión compleja ≥ 2, de la fórmula de the Baum-Bott tenemos el siguiente resultado:

5.2 Teorema. *Sea* $\mathcal{F}_\omega \in K(M, L)$ *cuya componente de Kupka* K *con tipo transversal lineal* $\eta = x\, dy - \lambda \cdot y\, dx$, *con* $\lambda \neq 0, -1$. *Entonces La clase fundamental*

$$[K] = \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} \cdot c(L)^2 \in H^4(M; \mathbb{C}).$$

Prueba. Consideremos al polinomio $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + x_2)^2$. Entonces

$$\widetilde{\varphi}(x_1, x_2, 0, \ldots, 0) = \sigma_1^2(x_1, x_2, 0, \ldots, 0),$$

además tenemos que Q es el **haz normal** a la foliación en los valores regulares, el haz tangente es el anulador de la 1–forma local que define a la sección ω, por lo tanto, para cada sección local γ del haz Q, tenemos

$$\omega(\gamma) \neq 0$$

de donde $\omega|_{(M-S)}$ es una sección nunca nula de $\mathcal{O}(L) \otimes Q^*|_{(M-S)} \simeq \mathcal{O}$ de donde

$$Q \simeq \mathcal{O}(L).$$

Ahora bien, la fórmula de Baum-Bott nos da

$$\begin{aligned} \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda}[K] =& \sigma_1^2(Q) \\ =& \sigma_1^2\big(\mathcal{O}(L)\big) = c_1(L)^2. \end{aligned}$$

de donde la clase fundamental del conjunto de Kupka es

$$[K] = \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} c(L)^2 \in H^4(M; \mathbb{C}). \quad \square$$

Veamos algunas consecuencias de este resultado:

5.3 Teorema. *Sea $\omega \in K(M,L)$ donde L es muy amplio. Entonces existen enteros positivos $p \leq q$ tales que.*

$$\omega \in K(M, L, px\,dy - qy\,dx)$$

Prueba. Como $\wedge^2 \nu_K = L|_K$, tenemos que la primera clase de Chern del haz normal no se anula, por lo tanto, la parte lineal del tipo transversal tiene la forma $x\,dy - \lambda \cdot y\,dx$, donde $\lambda \in \mathbb{Q}$. Tomando $\lambda = p/q$, donde $(p,q) = 1$, vemos que la parte lineal es equivalente a $px\,dy - qy\,dx$.

Consideremos el encaje $M \subset \mathbb{P}\big(H^0(M; \mathcal{O}(L))\big)$. El grado del conjunto de Kupka, relativo a este encaje, está dado por la siguiente integral

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_M c_2(E) \cdot c_1(L)^{n-2} &= \frac{p \cdot q}{(p+q)^2} \cdot \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_M c_1(L)^n \\ &= \frac{p \cdot q}{(p+q)^2} \cdot \mathrm{vol}(M)\end{aligned}.$$

Dado que el grado es un entero positivo, necesariamente tenemos que $p \cdot q > 0$, lo cual implica que, la parte lineal del tipo transversal pertenece al dominio de Poincaré, y como fué demostrado en [GM–L], tenemos que el tipo transversal es linealizable. $\square$

Cuando el tipo transversal es $x\,dy - y\,dx$, la clase fundamental de la componente de Kupka es igual a

$$[K] = \frac{c_1(L)^2}{4},$$

si E es el fibrado construido en el Teorema (4.4), tenemos el siguiente resultado:

5.4 Corolario. *Sea $\omega \in K(M, L, x\,dy - y\,dx)$, una foliación muy amplia. Entonces la clase de Chern total del fibrado asociado a la componente de Kupka es*

$$c(E) = \left(1 + \frac{c_1(L)}{2}\right)^2 \in H^*(M, \mathbb{C}).$$

Este último resultado nos muestra que, cuando el tipo transversal es la forma $x\,dy - y\,dx$, la clase de Chern Total del fibrado asociado a la componente de Kupka, es compatible con que este fibrado sea **proyectivamente plano** o equivalentemente, que sea **semiestable**.

6. Foliaciones holomorfas con estructura transversal.

En esta sección, daremos algunos resultados acreca de foliaciones holomorfas de codimension uno, que poseen estructura transversal afín o proyectiva. La demostración de los mismos, puede encontrarse en [Sc, Sc1]

6.1 Definición. Sea $\mathcal{F}$ una foliación holomorfa de codimensión uno en una variedad compleja M. Entonces:

(1) $\mathcal{F}$ posee una estructura transversal **afín** si existe una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de M, submersiones $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ que definen a la foliación tal que si $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ tenemos que

$$f_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = a_{\alpha\beta} \cdot f_\beta|_{U_{\alpha\beta}} + b_{\alpha\beta} \quad a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}^*, \quad b_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}.$$

(2) $\mathcal{F}$ posee una estructura transversal **proyectiva** si existe una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de M, submersiones $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ que definen a la foliación tal que si $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ tenemos que

$$f_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = \frac{a_{\alpha\beta} \cdot f_\beta|_{U_{\alpha\beta}} + b_{\alpha\beta}}{c_{\alpha\beta} \cdot f_\beta|_{U_{\alpha\beta}} + d_{\alpha\beta}} \quad a_{\alpha\beta}d_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}c_{\alpha\beta} = 1.$$

Nosotros hemos definido a las foliaciones en términos de formas diferenciales, como secciones holomorfas integrables del fibrado vectorial $T^*M \otimes L$, donde L es un fibrado de líneas holomorfo. En general, dado un fibrado vectorial E y un fibrado de líneas L, ambos holomorfos, hay una correspondencia biyectiva entre las secciones holomorfas del fibrado $E \otimes L$ con secciones meromorfas σ de E cuyo divisor polar σ_∞ es un divisor que define al fibrado L.

En [Sc] es probado que la existencia de una estructura transversal afín o proyectiva, es equivalente al siguiente problema en formas diferenciales

6.2 Proposición. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación holomorfa de codimensión uno en la variedad M, definida por una 1–forma meromorfa ω. Entonces*

(1) *$\mathcal{F}$ admite una estructura transversal afín si existe una 1–forma cerrada, meromorfa η con polos $\eta_\infty = \omega_\infty$ y tal que $d\omega = \eta \wedge \omega$. Además, dos parejas (ω, η) y (ω', η') definen la misma estructura afín para $\mathcal{F}$ si existe una función meromorfa $g : M \to \mathbb{P}^1$ que satisface $\omega' = g \cdot \omega$ y $\eta' = \eta + \dfrac{dg}{g}$.*

(2) *$\mathcal{F}$ admite una estructura transversal proyectiva si existen 1–formas meromorfas η y ζ que satisfacen:*

$$d\omega = \eta \wedge \omega \quad d\eta = \omega \wedge \zeta \quad d\zeta = \zeta \wedge \eta.$$

Además (ω, η, ζ) y (ω', η', ζ') definen la misma estructura transversal proyectiva si existen funciones meromorfas f, g tal que

$$\begin{aligned}
\omega' &= f \cdot \omega \\
\eta' &= \eta + \frac{df}{f} + 2g \cdot \omega \\
\zeta' &= \frac{1}{f}\left(\zeta - 2dg - 2g \cdot \eta - 2g^2 \cdot \omega\right),
\end{aligned}$$

Sea $\mathcal{F}$ una foliación con una componente de Kupka K, supongamos que el tipo transversal es de la forma $\eta = x\,dy - \lambda \cdot y\,dx$, donde $\lambda \in \mathbb{C}$.

Si $\lambda \neq 0$, la 1–forma η admite el factor integrante $x \cdot y$, esto nos da el siguiente resultado:

6.3 Teorema. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación con una componente de Kupka K con tipo transversal $\eta = x\,dy - \lambda \cdot y\,dx$. Si $\lambda \neq 0, 1$, entonces existe una vecindad $U \supset K$, y un divisor en $D \subset U$, tal que $\mathcal{F}$ admite una estructura transversal afín en $U - D$.*

Prueba. Debemos considerar dos casos:

(1) Si el tipo transversal es $\eta = x\,dy - \lambda y\,dx$ donde λ y λ^{-1} son enteros. En este caso, las formas meromorfas

$$\eta_\alpha = \frac{\omega_\alpha}{x_\alpha y_\alpha},$$

define a la foliación en U_α fuera de sus polos, además, como fué observado en [C–L], estas formas meromorfas satisfacen la igualdad $\eta_\alpha = \eta_\beta$ siempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

esto nos muestra que $\{x_\alpha y_\alpha\}$ define una sección holomorfa del haz de líneas L en la vecindad $U = \cup U_\alpha \supset K$, y por lo tanto, define un factor integrate de la foliación definida por ω en la vecindad U.

(2) El segundo caso, si el tipo transversal está dado por $\eta = x\,dy - \lambda y\,dx$, y $\lambda \in \mathbb{N}$. Ahora podemos ver que $\{x_\alpha^{q+1} = 0\}$ define un divisor invariante por la foliación, pero en este caso tenemos que

$$\frac{\omega_\alpha}{x_\alpha^{q+1}} = c_{\alpha\beta}\frac{\omega_\beta}{x_\beta^{q+1}}, \quad c_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}^*.$$

Integrando las formas cerradas

$$\eta_\alpha := \frac{\omega_\alpha}{x_\alpha^{q+1}},$$

obtenemos la estructura transversal proyectiva. $\square$

Cuando el tipo transversal está dado por el campo radial, tenemos el siguiente resultado análogo al Teorema 6.3.

6.4 Teorema. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación con una componente de Kupka K con tipo transversal $\eta = x\,dy - y\,dx$. Entonces $\mathcal{F}$ admite una estructura transversal proyectiva en una vecindad de K.*

Prueba. En este caso, si explotamos a lo largo de K, obtenemos una foliación holomorfa de codimensión 1 que es transversal al divisor excepcional, el cual es el proyectivizado del fibrado normal de $K \subset M$, en particular, todas las hojas que están suficientemente próximas a la componente de Kupka K, al considerar su levantamiento admiten una transversal que es $\mathbb{P}^1$, lo cual nos define la estructura transversal proyectiva. $\square$

En este caso, tenemos que la foliación está dada en términos de una representación $\rho : \pi_1(K) \to SL_2(\mathbb{C})$, de hecho, si $\mathcal{F}$ es una foliación que admite una estructura transversal proyectiva, se tiene el siguiente resultado:

6.5 Teorema. [Sc] *Sea $\mathcal{F}$ una foliación holomorfa de codimension uno que admite una estructura transversal proyectiva. Entonces existe una representación $\rho : \pi_1(M) \to SL_2(\mathbb{C})$, un espacio de recubrimiento $p : \mathbf{P} \to M$, correspondiente al nucleo de la representación y una submersion meromorfa $\Phi : \mathbf{P} \to \mathbb{P}^1$ que satisface:*

(1) *Φ es ρ–equivariante.*
(2) *La foliación $\mathcal{F}_\Phi$ definida por las curvas de nivel de Φ, coincide con la foliación $p^*\mathcal{F}$.*

7. El Complemento de una Componente de Kupka.

Sea $\omega \in \mathrm{K}(M,L)$, con componente de Kupka K, donde L es un fibrado muy amplio, en esta sección usaremos los resultados anteriores para estudiar el complemento de la componente de Kupka, por el Teorema (1.2), tendremos que $M-K$ es 2–convexo, que es la propiedad usada en [C–L], para describir las foliaciones.

En la sección anterior, el teorema (5.3) afirma que el tipo transversal de la componente de Kupka K, es de la forma $\eta = px\,dy - qy\,dx$, donde $p \leq q$ son enteros positivos, primos relativos o bien, $p = q = 1$, y el tipo transversal es el campo radial.

7.1 Teorema. *Sea $\mathcal{F} \in K(M,L)$ donde L es muy amplio. Entonces el fibrado normal de la componente de Kupka ν_K es positivo.*

Prueba. Por el teorema (4.3), tenemos que el tipo transversal pertenece al dominio de Poincaré, es linealizable y los valores propios pueden escogerse enteros positivos.

Tenemos 2 casos: Si el tipo transversal es de la forma $px\,dy - qy\,dx$, donde $p \neq q$.

En este caso, el haz normal, que tiene dimensión 2, se escinde en suma directa de haces de dimensión 1, L_p y L_q, cuyas clases de Chern se relacionan de la siguiente forma:

$$p \cdot L_q - q \cdot L_p = \mathbf{0} \in H^2(K,\mathbb{C}).$$

Dado que $\wedge^2 \nu_K = L$, tenemos que $L = L_p \otimes L_q$, y por lo tanto

$$\imath^* c_1(L) = c_1(L_p) + c_1(L_q) \in H^2(M,\mathbb{C}),$$

de donde tenemos que

$$c_1(L_p) = \left(\frac{q}{p+q}\right) \cdot \imath^* c(L) \quad c(L_q) = \left(\frac{p}{p+q}\right) \cdot \imath^* c(L),$$

dado que L es muy amplio, tenemos que L_q y L_p son fibrados de líneas positivos y por lo tanto el fibrado normal es positivo.

Si el tipo transversal es $\eta = x\,dy - y\,dx$:

En este caso, si explotamos a lo largo de la componente de Kupka K, la foliación inducida es transversal al divisor excepcional, que es la proyectivización del haz normal a K, esto nos da una **estructura plana** en la proyectivización del fibrado normal, por lo tanto escinde en suma directa de fibrados de líneas de la forma

$$\nu_K = L_1 \oplus L_1 \quad L_1 \in Pic(K).$$

además $c(L_1) = \dfrac{1}{2}\imath^* c(L)$, por lo tanto, como en el caso anterior, el fibrado normal es positivo. $\square$

7.2 Teorema. *$M-K$ es 2–convexo.*

Prueba. Esto es consecuencia inmediata de los Teoremas (7.1) y (2.2). $\square$

Ahora, estamos en posición de demostrar el resultado principal:

7.3 Teorema. *Sea M una variedad compleja $dim_{\mathbb{C}} M \geq 3$. Sea L un fibrado de líneas holomorfo muy amplio, y $\omega \in K(M, L, \eta)$. Entonces:*

(1) *Si el tipo transversal $\eta \neq x\,dy - y\,dx$, la foliación posee al menos una hoja compacta y en el complemento de esta hoja la foliación admite una estructura transversal afín.*
(2) *Si $\eta = x\,dy - y\,dx$ la foliación admite una estructura transversal proyectiva.*

Prueba. Por el teorema (6.3), existe una vecindad del conjunto de Kupka donde la foliación admite una estructura transversal afín (resp. proyectiva), como $M - K$ es 2–convexo, por el Corolario (2.3), estas estructuras se extienden a toda la variedad, pues están definidas por formas meromorfas.

Cuando el tipo transversal no es la forma $x\,dy - y\,dx$, de la prueba del teorema (7.1), tenemos dos casos:

Si el tipo transversal es de la forma $\eta = px\,dy - qy\,dx$ donde $1 < p \leq q$, de la demostración del teorema (6.3), tenemos que la foliación está definida por una forma meromorfa que localmente tiene la forma

$$p\frac{dy}{x} - q\frac{dx}{x},$$

dado que la forma meromorfa se extiende a una 1–forma meromorfa global, que define a la foliación fuera de sus polos, además el divisor de polos es invariante por la foliación, lo que nos da dos hojas compactas de la foliación.

Cuando el tipo transversal es de la forma $\eta = x\,dy - qy\,dx$, la foliación se puede definir por una sección meromorfa, definida por formas cerradas localmente, del fibrado vectorial $T^*M \otimes L_0$, donde L_0 es un fibrado de lineas holomorfo con clase de Chern cero. El divisor de polos es tambien invariante por la foliación, lo cual nos da una hoja compacta. $\square$

Finalmente, si el tipo transversal es $x\,dy - y\,dx$, tenomos el siguiente resultado:

7.4 Teorema. *El conjunto $K(M, L, x\,dy - y\,dx)$, donde L es un fibrado muy amplio, está parametrizado por una pareja (E, σ) tal que E es una fibrado vectorial holomorfo proyectivamente plano de rango 2, y σ es una sección holomorfa de E que se anula en K*

Prueba. Dada una pareja (E, σ), donde $E \to M$ es un fibrado vectorial holomorfo de rango 2 proyectivamente plano y σ es una sección holomorfa, que se anula en una subvariedad lisa de codimension 2, podemos considerar a $[\sigma]$ como una sección en $M - \{\sigma = 0\}$ del $\mathbb{P}^1$ fibrado, el fibrado proyectivizado $\mathbb{P}(E)$, y tomar a la forma meromorfa $[\sigma]^*\Omega$ donde Ω es la forma de conexión que define la estructura plana plana en $\mathbb{P}(E)$. Esto nos define una foliación en $\mathrm{K}(M, L, x\,dy - y\,dx)$, donde $L = \wedge^2(E)$.

Sea $\omega \in K(M, L, x\,dy - y\,dx)$, donde L es un fibrado de líneas muy amplio, la foliación inducida admite una estructura transversal proyectiva y por lo tanto, existe una representación $\rho : \pi_1(M) \to SL_2(\mathbb{C})$, por otra parte, existe una pareja (E, σ) donde E es un fibrado holomorfo de rango 2, que es una extensión de ν_K, el fibrado normal de $K \subset M$, y sigma es una sección hoomorfa de E que se anula transversalmente en K. Afirmamos que E es un fibrado proyectivamente plano.

Sea $\pi : \widetilde{M} \to M$ la explosión a lo largo K. La foliación en $\widetilde{M}$ definida por $\widetilde{\mathcal{F}} = \pi^* \mathcal{F}_\omega$, es transversal al divisor excepcional que es $\mathbb{P}(\nu_K)$, el proyectivizado del fibrado normal, además la foliación $\mathcal{G} = \widetilde{\mathcal{F}} \cap \mathbb{P}(\nu_K)$ es una foliación transversal a las fibras del fibrado $\mathbb{P}(\nu_K) \to K$, por lo tanto, esta proviene de una representación $\rho' : \pi_1(K) \to SL_2(\mathbb{C})$. Por otra parte, la foliación $\widetilde{\mathcal{F}}$ admite una estructura transversal proyectiva, que viene dada por una representación $\rho : \pi_1(M) \to SL_2(\mathbb{C})$, de donde si $\imath : K \to M$ es la inclusión, tenemos que $\rho \circ \imath = \rho'$ esto permite extender la estructura proyectiva plana de $\mathbb{P}(\nu_K)$ a $\mathbb{P}(E)$. $\square$

Agradecimientos. Quiero aprovechar estas líneas para agradecer a Jesús Muciño, por el tiempo y conocimiento que ha compartido durante la elaboración de este trabajo, a Ricardo Vila, por comunicarme la relación entre estabilidad de haces vectoriales y las estructuras proyectivas planas, finalmente a Bruno Scardua por las discuciones acerca de las foliaciones con estructura transversal afín y proyectiva.

Referencias

[B–B] Baum P, Bott R, *Singularities of holomorphic foliations*, J. of Diff. Geometry **7** (1972), 279-342.

[Ca–L] Camacho, C, Lins, A., *Teoria Geormétrica das Folheações*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1979.

[C] Calvo, O., *Deformations of Branched Lefschetz Pencils*, Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática **26–1** (1995), 67–83.

[C1] Calvo, O., *Complex Manifolds as Open Books*, CIMAT preprint (1994).

[C–S] Calvo, O., Soares, M., *Chern numbers of a Kupka component*, Ann. Inst. Fourier **44–4** (1994), 1219–1236.

[C–L] D. Cerveau, A. Lins, *Codimension one Foliations in $\mathbb{C}P^n$, $n \geq 3$, with Kupka components*, Complex Analytic Methods in Dynamical Systems (C. Camacho, A. Lins, R. Mossou, P. Sad., eds.), vol. 222, Astérisque, 1994, pp. 93–133.

[GM–L] Gómez–Mont X., Lins A., *Structural Stability of foliations with a meromorphic first integral*, Topology **30** (1991), 315-334.

[G] Griffiths Ph., *Hermitian Differential Geometry, Chern Classe and Positive Vector Bundles*, Global Analysis, papers in honor of K. Kodaira, Tokyo, Princenton: University of Tokyo Press, Princenton University Press, 1969, pp. 185–251.

[G–H] Griffiths Ph., Harris J., *Principles of Algebraic Geometry*, Pure & Appl. Math., Wiley Interscience, New York, 1978.

[K] Kobayashi, S., *Differential Geometry of Complex Vector Bundles*, Kano Memorial Lectures 5, Princeton University Press, 1987.

[OSS] C. Ockonek, M. Schneider, H. Splinder, *Vector Bundles on Complex Projective spaces*, vol. 3, Progress in Math., Birckhäuser, 1980.

[S] Schneider, M., *Über eine Vermutung von Hartshorne*, Math. Ann. **201** (1973), 221–229.

[Sc] Scárdua, B., *Transversely Affine and transversely proyective Foliations on Complex Projective Spaces*, Ph. D. Thesis IMPA (1993).

[Sc1] Scárdua, B., *Transversely Affine and Transveresly projective Foliations*, to appear (1993).

Cimat: Ap. Postal 402, Guanajuato, Gto. 36000 México

E-mail address: omegar@fractal.cimat.conacyt.mx calvo@buzon.main.conacyt.mx