Probabilidad y Estadística para Bachillerato, CIMAT, ene-jun 2018

Segundo Examen Parcial (Solución)

Nombre: ____

1. *a*) Suponga que X tiene una distribución Binomial con $n = 6$ y $p = ,01$, ¿Cuánto vale $P(X \leq 2)$?

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \binom{6}{0} ,01^0(1 - ,01)^{6-0} + \binom{6}{1} ,01^1(1 - ,01)^{6-1} + \binom{6}{2} ,01^2(1 - ,01)^{6-2} \\ &= ,99^6 + 6(,01)(,99^5) + 15(,01^2)(,99^4) \\ &= 0{,}9414801 + 0{,}0570594 + 0{,}001440894 = 0{,}9999804 \end{aligned}$$

   b) Suponga que X tiene una distribución geométrica con $p = ,2$, ¿Cuánto vale $P(X > 3)$?

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= 1 - P(X \leq 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3] \\ &= 1 - [,2 + ,8^1,2 + ,8^2,2 + ,8^3,2] = 0{,}4096 \end{aligned}$$

   c) Suponga que X tiene una distribución Poisson, con media $\lambda = 3$, ¿Cuánto vale la probabilidad de que $2 < X < 6$?

$$\begin{aligned} P(2 < X < 6) &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= \frac{e^{-3}3^3}{3!} + \frac{e^{-3}3^4}{4!} + \frac{e^{-3}3^5}{5!} = e^{-3}\left(\frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!}\right) \\ &= 0{,}492892 \end{aligned}$$

2. Llegan clientes a un cajero automático de acuerdo con un proceso Poisson con media de 20 clientes por hora. ¿Cuál es la probabilidad de que no llegue ningún cliente durante los primeros 15 minutos de una hora específica?

   Sea X el número de clientes que llegan en 15 min.

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda = 5)$$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-5}5^0}{0!} = e^{-5} = 0{,}006737947$$

3. En Estados Unidos (y en muchos otros lados también) se tienen leyes anti-discriminatorias. En un caso legal, una mujer negra demandó a la tienda donde trabajaba por discriminación. Los antecedentes son los siguientes:

   En cierta temporada navideña, una tienda departamental contrata a esta persona. Para poder ser contratada, la tienda requiere que se tome cierta prueba sobre capacidades. Sin embargo, debido a la urgencia de contratr empleados por la temporada, se le contrató de todos modos sin haber tomado antes dicha prueba. Dos semanas después, tomó la prueba y no la pasó. Consecuentemente la tienda la despidió. La mujer demandó a la tienda alegando que la prueba está sesgada pues una gran proporción de personas de raza negra la han reprobado. Los datos históricos de resultados de las pruebas son:

	Aprueba	No Aprueba	Totales
Negros	448	322	770
Blancos	240	101	341
Totales	688	423	1,111

¿Tiene razón la mujer?, use intervalos de confianza para contestar esta pregunta.

Sea p_1 la probabilidad de que una persona de raza negra repruebe el examen, y sea p_2 la probabilidad correspondiente para blancos. Los intervalos de confianza para estos parámetros son:

$$\widehat{p}_1 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{\widehat{p}_1(1-\widehat{p}_1)}{n}} \qquad \Rightarrow \qquad (0{,}3833411, 0{,}4530225)$$

$$\widehat{p}_2 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{\widehat{p}_2(1-\widehat{p}_2)}{n}} \qquad \Rightarrow \qquad (0{,}2477269, 0{,}3446485)$$

Los intervalos no se intersectan, esto implica que realmente negros y blancos tienen diferente probabilidad de reprobar. Una posible explicación de esto es que, efectivamente, la prueba esté sesgada en contra de personas de raza negra.

4. Ciertas componentes electrónicas son recibidas en lotes de tamaño 10. El lote es aceptado si, al probar 3 unidades tomadas al azar (de las 10), ninguna falla. ¿Cuál es la probabilidad de aceptación si hay 2 piezas defectuosas en el lote?

$$P(\text{ aceptar lote }) = \frac{\binom{2}{0}\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{56}{120} = 0{,}4666667$$

5. Suponga que los diámetros de las piezas producidas por cierta máquina, pueden considerarse normalmente distribuídos con un valor de $\sigma = 0{,}006$ centímetros, ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza, tomada al azar, tenga un diámetro que difiera del diámetro medio por más de 0.02 cms?

Sea X el diámetro de una pieza.

$$P(|X-\mu| > ,02) = P(|z| > ,02/,006) == P(|z| > 3{,}333333) = 2(0{,}0004290603) = 0{,}0008581207$$

Duración: 2 horas y media.