Resumen de reglas de operaciones con números y manipulación de fracciones

- *Multiplicación.* El símbolo $\times$ casi no se usa para la multiplicación (se confunde con la letra x). Se usa en su lugar un punto $\cdot$, o a veces nada (si no causa confusión). Por ejemplo, escribimos $2 \cdot 3 = 6$ (en lugar de $2 \times 3 = 6$), $2(3+5) = 2 \cdot (3+5) = 2 \cdot 8 = 16$.
- *División.* Se denota por a/b, $\frac{a}{b}$, $a \div b$ (el último se usa muy poco). Cada notación tiene su ventaja.
$$(2-1/2)/(1-1/3) = (2-1/2) \div (1-1/3) = \frac{2-1/2}{1-1/3} = \frac{2-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}.$$
- *Resta y negativo.* El símbolo $-$ se usa para la resta, como en $7-3=4$, pero también se usa para la operación de tomar el negativo de un número, como en -3. Para evitar confusión, utilizamos paréntesis para indicar el segundo uso, como en $-(2-3) = -(-1) = 1$, $2 \cdot (-3) = -6$ (y no $2 \cdot -3 = 6$).
- *Conmutatividad de adición y multiplicación*:
$$a+b = b+a, \quad a \cdot b = b \cdot a.$$
Por ejemplo, $3+5 = 5+3 = 8$, $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 = 15$.

  Ojo: la resta y la división *no* son conmutativas, $5-3=2$, $3-5=-2$, $4/2=2$, $2/4=1/2$.
- *La ley distributiva de la multiplicación y división sobre la adición y resta*:
$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \qquad \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$
(en la segunda fórmula $c \neq 0$).

  Por ejemplo, $2(3+5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 6 + 10 = 16$, $(18-27)/3 = 18/3 - 27/3 = 6 - 9 = -3$.

  Ojo: también es importante saber cuál ley *no* es correcta. Por ejemplo, $(6+4)/2 \neq 6 + 4/2$, $-(3+4) \neq -3+4$, $(-3)^2 \neq -3^2$.
- *Orden de las operaciones:* multiplicación y división tienen prioridad sobre suma y resta. Potencia tiene prioridad sobre multiplicación y división.

  Por ejemplo, $2 + 3 \cdot 2 = 2 + 6 = 8$ (primero se multiplica, despues se suma), $9 \div 3 - 10 \div 5 = 3 - 2 = 1$ (primero se hace las divisiones, despues la resta), $-3^2 = -9$ (primero se toma el cuadrado, después se toma el negativo).

  Entre suma y resta o entre multiplicación y división el orden de las operaciones no importa: $2+6-3 = (2+6)-3 = 2+(6-3) = 5$, $2 \cdot 6 \cdot 3 = (2 \cdot 6) \cdot 3 = 2 \cdot (6 \cdot 3) = 36$, $2 \cdot 6/3 = (2 \cdot 6)/3 = 2 \cdot (6/3) = 4$.

  Ojo: da el mismo resultado, pero muchas veces hacerlo en un orden es más facil que el otro. Por ejemplo: cuánto es $12 \cdot 34/17$? Podemos hacerlo así: $(12 \cdot 34)/17 = 408/17 = 24$. Pero es mucho más fácil hacer la división primero: $12 \cdot (34/17) = 12 \cdot 2 = 24$. ¿Cómo saber? Experiencia.
- Si queremos romper estas reglas de prioridad usamos paréntesis: $(2+3) \cdot 2 = 5 \cdot 2 = 10$, $(6/3-10)/5 = (2-10)/5 = (-8)/5 = -\frac{8}{5}$, $(-3)^2 = 9$.

- Una regla *muy útil* para la manipulación de fraciones: *al multiplicar o dividir el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número (distinto de 0), no cambia el valor de la fracción* (da una fracción "equivalente"):
$$\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{10}{15},\qquad \frac{14}{21}=\frac{14/7}{21/7}=\frac{2}{3},\qquad \frac{1.1}{0.1}=\frac{1.1\cdot 10}{0.1\cdot 10}=\frac{11}{1}=11$$
Usando esta regla, se puede reducir cualquier fracción a su forma más simple, dividiendo el númerador y denominador por sus factores comunes (se puede hacerlo sucesivamente, varias veces, hasta que no tienen factores comunes):
$$\frac{336}{480}=\frac{336/4}{480/4}=\frac{84}{120}=\frac{84/4}{120/4}=\frac{21}{30}=\frac{21/3}{30/3}=\frac{7}{10}.$$
- Para *sumar o restar fracciones* los llevamos primero a un denominador comun, y despues usamos la ley de distribición:
$$\frac{2}{3}-\frac{4}{7}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 7}-\frac{3\cdot 4}{7\cdot 3}=\frac{2\cdot 7-3\cdot 4}{3\cdot 7}=\frac{14-12}{21}=\frac{2}{7},$$
$$2-\frac{17}{7}=\frac{14}{7}-\frac{17}{7}=\frac{14-17}{7}=\frac{-3}{7}=-\frac{3}{7}.$$
- *Multiplicar fracciones* es fácil:
$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{10}{21}.$$
- *División de fracciones* es un poco más complicado:
$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 5}=\frac{14}{15}.$$
En palabras: "se multiplica el númerador por el *recíproco* del denumerador" (el recíproco de un número x es $1/x$; el recíproco de a/b es b/a). En fórmula:
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ac}{bd}.$$
Nota: esta regla es típicamente más útil que la famosa "ley de sandwich".
- No usamos "fracciones mixtas". Por ejemplo, escribimos $\frac{5}{2}$ en lugar de $2\frac{1}{2}$.
- Una fracción negativa la escribimos como el negativo de una fracción positiva. Por ejemplo, escribimos $-\frac{3}{5}$ en lugar de $\frac{-3}{5}$.
- Fracciones decimales, como 2.5, 0.034, son fracciones cuyo denominador es una potencia de 10. Por ejemplo,
$$2.5=\frac{25}{10},\quad 0.034=\frac{34}{1000},$$
$$\frac{3}{7}-3.5=\frac{3}{7}-\frac{35}{10}=\frac{3}{7}-\frac{7}{2}=\frac{3\cdot 2-7\cdot 7}{14}=\frac{6-49}{14}=\frac{-35}{14}=-\frac{35}{14}.$$