Examen final de álgebra 2, Marco “El niño” Figueroa, 8 de junio de 2017

Nombre completo:

Indicaciones: Para cada uno de los siguientes ejercicios, **escribe su desarrollo y su solución**. Tienes dos horas para este examen y no se vale usar calculadora/celular/hablar/etc. Toma tu tiempo, **revisa bien tus soluciones** y disfruta el examen.

1. ¿Qué valores de x deben omitirse al evaluar la expresión

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 2x - 15}?$$

   Solución. Debemos encontrar los valores que hacen que el denominador de esta expresión sea 0, es decir, resolver la ecuación $x^2 - 2x - 15 = 0$, la cual se factoriza como $(x-5)(x+3) = 0$, de donde los valores que debemos omitir son $x = 5$ y $x = -3$.

2. Reduce el siguiente número

$$\frac{(x^2 - x - 2)}{x^2 - 4} \cdot \frac{3x^2 + 6x}{6x^2 + 6x}.$$

   Solución. La expresión es igual a:

$$\frac{(x^2 - x - 2)(3x^2 + 6x)}{(x^2 - 4)(6x^2 + 6x)} = \frac{(x-2)(x+1)(3x)(x+2)}{(x+2)(x-2)(6x)(x+1)}.$$

   Cancelando todos los factores posibles, resulta igual a $\frac{1}{2}$.

3. Calcula y reduce el siguiente número

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2}.$$

   Solución. Es fácil ver que el MCM de los denominadores es $4x^2$. Luego, la expresión queda

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 2x + 4}{4x^2}.$$

   Aquí podemos notar que es posible factorizar el numerador pero no ayudaría a reducir la fracción, por lo que así se queda.

4. Reduce la siguiente suma

$$\frac{4x^2 + 4x}{x^2 - x - 2} + \frac{x^2 - 100}{x^2 + 8x - 20}.$$

   Solución. Factorizando los denominadores y numeradores obtenemos:

$$\frac{4x^2 + 4x}{x^2 - x - 2} + \frac{x^2 - 100}{x^2 + 8x - 20} = \frac{4x(x+1)}{(x-2)(x+1)} + \frac{(x-10)(x+10)}{(x+10)(x-2)} = \frac{4x}{x-2} + \frac{x-10}{x-2} = \frac{5x-10}{x-2} = \frac{5(x-2)}{x-2} = 5.$$

5. ¿La ecuación $7x^2 = 9x - 3$ tiene soluciones reales? (ten en cuenta que **no** tienes que encontrarlas)

   Solución. La ecuación es equivalente a $7x^2 - 9x + 3 = 0$. De esta podemos calcular el discriminante $D = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4(7)(3) = 81 - 84 = -3$. Como $D < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales.

6. Encuentra la o las soluciones a la siguiente ecuación:

$$\frac{2}{5x} - \frac{2}{10} = \frac{1}{x}.$$

   Solución. Si multiplicamos la ecuación por $5x$ obtenemos $2 - x = 5$, de donde $x = -3$.

7. Hugo, Paco y Luis se quieren comer las galletas que se ponen en el recreo. Hugo se tardaría 5 minutos en comérselas solo, mientras que Paco tardaría 10 minutos y Luis, solo 2 minutos. Si los tres las comen al mismo tiempo, ¿cuántos segundos durarían las galletas? (en este problema tienes que suponer que a Hugo, Paco y a Luis les gustan todas las galletas, no les hacen el feo a las de limón o a las de coco)

   Solución. Si x es el tiempo en minutos que se tardan, obtenemos la ecuación
$$\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{1}{x}.$$
   Si la multiplicamos por $10x$ obtenemos $2x + x + 5x = 10$, de donde $8x = 10$ y $x = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$. Si multiplicamos por 60 obtenemos que se tardan 75 segundos.

8. Evalúa y reduce
$$\frac{8^{\frac{4}{3}}}{64^{\frac{2}{3}}}.$$

   Solución. Usando las propiedades de los exponentes tenemos que
$$\frac{8^{\frac{4}{3}}}{64^{\frac{2}{3}}} = \frac{(\sqrt[3]{8})^4}{(\sqrt[3]{64})^2} = \frac{2^4}{4^2} = \frac{16}{16} = 1.$$

9. Simplifica la expresión $\sqrt{24} - \sqrt{150} + \sqrt{54}$.

   Solución. Simplificando cada una de las raíces obtenemos que
$$\sqrt{24} - \sqrt{150} + \sqrt{54} = \sqrt{4 \cdot 6} - \sqrt{25 \cdot 6} + \sqrt{9 \cdot 6} = 2\sqrt{6} - 5\sqrt{6} + 3\sqrt{6} = 0.$$

10. Con el método que prefieras, resuelve la siguiente ecuación: $2r(r + 1) = (r + 2)(r - 2) + 7$.

    Solución. Desarrollando obtenemos que $2r^2 + 2r = r^2 - 4 + 7$ de donde $r^2 + 2r - 3 = 0$. Factorizando el lado izquierdo obtenemos que $(r + 3)(r - 1) = 0$ de donde $r = 1$ ó $r = -3$.

11. Si $a = 2 + 5i$ y $b = 3 - i$, calcula $a + b$ y $a - b$.

    Solución. $a + b = 2 + 5i + 3 - i = 5 + 4i$, $a - b = 2 + 5i - 3 + i = -1 + 6i$.

12. Si $a = 2 + 5i$ y $b = 3 - i$, calcula ab y $\frac{a}{b}$.

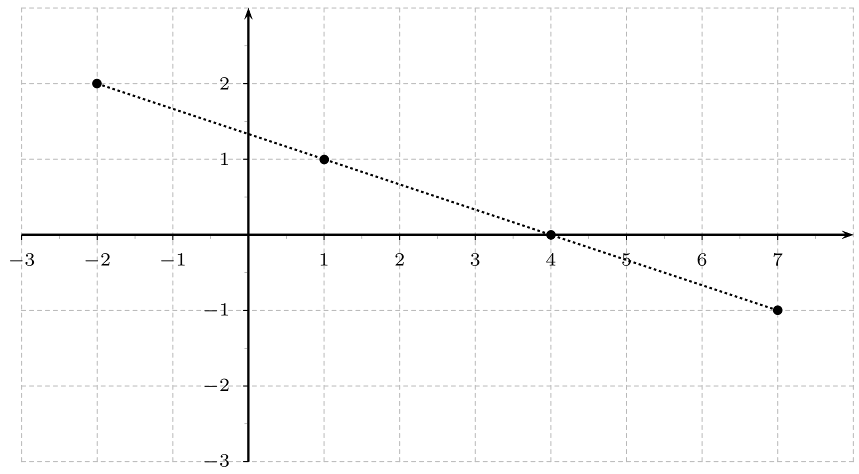
    Solución. Usando las propiedades de los complejos:
$$ab = (2 + 5i)(3 - i) = 6 + 15i - 2i - 5i^2 = 6 + 15i - 2i + 5 = 11 + 13i,$$
    y
$$\frac{a}{b} = \frac{2 + 5i}{3 - i} = \frac{(2 + 5i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{6 + 15i + 2i + 5i^2}{9 + 1} = \frac{6 + 15i + 2i - 5}{10} = \frac{1 + 17i}{10}.$$

13. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $3x + 2y = 1$, $10x + 7y = 1$.

    Solución. Procederemos a eliminar la y. Para ello, multiplico la primera ecuación por 7 y la segunda por -2:
$$\begin{aligned} 21x + 14y &= 7, \\ -20x - 14y &= -2. \end{aligned}$$
    Sumando estas ecuaciones obtenemos $x = 5$. Sustituyendo este valor en la primera ecuación obtenemos que $15 + 2y = 1$ de donde $y = -7$.

14. Grafica en el plano cartesiano los puntos $(-2, 2)$, $(4, 0)$, $(7, -1)$ y $(1, 1)$. ¿Están alineados? Si están alineados y encuentras la ecuación que los representa, tienes un punto no-imaginario extra.

    Solución. Al graficar obtenemos que los cuatro puntos están alineados:



Para encontrar la ecuación, hay que recordar que esta es de la forma $y = mx + b$. No es muy difícil ver que la que los cumple es $y = \frac{4-x}{3}$.

15. Usa la división larga o la sintética para dividir el polinomio $3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$ entre el polinomio $x - 2$. Tienes que determinar el cociente y el residuo de esta división.

    Solución. En este caso podemos usar la división sintética:

	3	-4	-5	2
2		6	4	-2
	3	2	-1	0

    de donde obtenemos que el cociente es $3x^2 + 2x - 1$ y el residuo es igual a 0.

Acertijo final (da puntos extras): Hugo, Paco y Luis comen galletas. Entre Hugo y Paco se comen una caja en $\frac{30}{7}$ de hora. Entre Paco y Luis se la comen en 6 horas. Entre Hugo y Luis se las comen en $\frac{15}{4}$ de hora. ¿Cuánto se tardarían en comerse la caja entre los tres?

Solución. Si H, P y L son el tiempo que se tardan Hugo, Paco y Luis en acabarse ellos solos las galletas, respectivamente. Obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\frac{1}{H} + \frac{1}{P} &= \frac{1}{\frac{30}{7}} = \frac{7}{30} \\
\frac{1}{P} + \frac{1}{L} &= \frac{1}{6} = \frac{7}{30} \\
\frac{1}{L} + \frac{1}{H} &= \frac{1}{\frac{15}{4}} = \frac{4}{15} \\
\frac{1}{H} + \frac{1}{P} + \frac{1}{L} &= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

donde x es el tiempo que se tardarían los tres juntos. Al sumar las tres primeras ecuaciones obtenemos que

$$2\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{P} + \frac{1}{L}\right) = \frac{7}{30} + \frac{1}{6} + \frac{4}{15} = \frac{7+5+8}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

de donde $\frac{1}{H} + \frac{1}{P} + \frac{1}{L} = \frac{1}{3}$ de donde $x = 3$ y concluimos que juntos se tardarían 3 horas.

Muchas gracias por todo su esfuerzo durante el semestre/año... yo ya no estaré, ¡pero ojalá continúen viniendo al CIMAT!