

Tarea núm. 9

(para entregar el jueves 28 marzo)

1. En cada caso, hay que encontrar el residuo de la división de los dos polinomios, *sin hacer la división*.

Ejemplo. Hagamos el (b). Podemos escribir el resultado de la división (si la hubieramos hecho) como

$$x^7 + 2x^2 + 1 = (x^2 - 1) \cdot \text{cociente} + \text{residuo}.$$

Vamos usar esta ecuación para encontrar el *residuo*, sin tener que hacer la división y sin encontrar el *cociente*. Primero, observamos que como $x^2 - 1$ es de grado 2, el *residuo* es un polinomio de grado ≤ 1 ; es decir, $\text{residuo} = Ax + B$, para unos números A, B que tenemos que encontrar. Volvemos a escribir entonces la última ecuación así:

$$x^7 + 2x^2 + 1 = (x^2 - 1) \cdot \text{cociente} + Ax + B.$$

Esta ecuación se cumple para *cualquier* valor de x que uno escoja. La pregunta es: ¿cuáles valores conviene escoger? Pues, intentamos escoger valores de x que hagan que desaparezca el término a la derecha con el *cociente* (porque no conocemos el *cociente* y no lo queremos conocer). Por eso, buscamos valores de x tales que al sustituirlos en $x^2 - 1$ den 0. O sea, buscamos las *raíces* de $x^2 - 1$. Son $x = 1$ y $x = -1$. Si sustituimos $x = 1$ en los dos lados de la última ecuación obtenemos la ecuación $4 = A + B$ y si sustituimos $x = -1$ obtenemos $2 = -A + B$. La solución del sistema $A + B = 4, -A + B = 2$ es $A = 1, B = 3$, así que $\text{residuo} = x + 3$.

(a) $x^7 + 2x^2 + 1$ entre $x + 1$.

(b) $x^7 + 2x^2 + 1$ entre $x^2 - 1$.

(c) $x^7 + 2x^2 + 1$ entre x .

(d) $x^7 + 2x^2 + 1$ entre x^2 .

(e) $x^7 + 2x^2 + 1$ entre x^3 .

(f) $x^7 + 2x^2 + 1$ entre $x^3 - x^2$.

(g)* $x^{77} + 2x^2 + 1$ entre $x^2 - 2x + 1$.

(h) $x^{77} + 2x^2 + 1$ entre $x^{76} + 2x^2 + 1$.

(i)* $x^{77} + 2x^2 + 1$ entre $x^2 + 1$.

(j)** $x^{77} + 2x^2 + 1$ entre $x^3 + 1$.

2. Hacer las divisiones de los incisos (b), (d), (e) del problema anterior, verificando que los residuos coinciden con la respuesta que obtuviste en el problema anterior.

3. Resolver

(a) $(1 - 2x)^{-1} - (3x - 1)^{-1} = 4$.

(b) $(1 - 2x)^{-1} - (1 - 2x)^{-2} = (1 - 2x)^{-3}$.

(c) $x(1 - 2x)^{-1} + (1 - 3x)^{-1} = 2$.

(d) $x^4 = 10x^3 + x^2$.