

## Guía para el examen final

(fecha del examen: 4 jun, 2020)

### I. Exponentes y raíces

- Expresa en notación científica. Ejemplo:  $234,000 = 2.3 \cdot 10^5$ ,  $0.00234 = 2.34 \cdot 10^{-3}$ .
  - $0.0000742$
  - $183,000$
- Usar notación científica para simplificar. Dar la respuesta en notación decimal (sin exponentes).
  - $(25 \cdot 10^{-3})(1.2 \cdot 10^6)$
  - $\frac{24,000,000}{0.0006}$
  - $\frac{3.12 \cdot 10^6}{1.2 \cdot 10^{-2}}$
- Escribir en forma exponencial. Ejemplo:  $\frac{1}{\sqrt{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}$ 
  - $\sqrt[3]{x^7}$
  - $\sqrt[7]{6^{-2}}$
  - $\sqrt{x^{12}}$
  - $\sqrt[20]{a^5}$
- Escribir en forma radical (sin exponentes). Ejemplo:  $6^{-1/3} = \frac{1}{6^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{6}}$ .
  - $x^{1/7}$
  - $(8m^2n)^{7/4}$
  - $(x+y)^{-5/3}$
- Calcular, sin calculadora, dando la respuesta en notación decimal:
  - $4 \times 10^{-5}$
  - $-3^2$
  - $(-3)^2$
  - $\frac{4}{5}$
  - $10^{-4}$
  - $\frac{4}{5} \cdot 10^{-4}$
  - $\frac{1}{0.02}$
  - $\sqrt{0.0036}$
  - $\sqrt{0.1}\sqrt{0.001}$
  - $(\sqrt[3]{2})^9$
  - $27^{\frac{1}{3}}$
  - $(\frac{1}{2})^{-2}$
  - $(\frac{27}{8})^{-\frac{2}{3}}$
  - $\frac{0.1-2}{0.5}$
  - $\log 0.01$
  - $\log \sqrt{10}$
  - $\log 10^{2020}$
  - $10^{\log 3}$
  - $10^{2 \log 3}$
  - $\log 2 + \log 5$
  - $\log 8 - \log 0.8$
  - $\frac{\log 9}{\log 3}$
- Simplificar y escribir sin exponentes negativos o fraccionales: Ejemplo:  $x^{1/2}(x^{-1/2} + 2) = 1 + 2\sqrt{x}$ .
  - $(\frac{20x^5y^{-3}}{4y^{1/2}})^2$
  - $4x^{-2/3}(x^{1/2} + \frac{11}{4}x^{2/3})$
  - $\sqrt{\frac{49}{9}}$
  - $\sqrt[3]{-\frac{27}{125}}$
  - $\sqrt{27}\sqrt{3}$
  - $(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})$
  - $(\sqrt{3} + 2)^2$
  - $x^{2/5} + x^{7/5}$
  - $a^{-1/2} + a^{3/2}$

### II. Polinomios

- $(2x^2 + 2x - 12)/(x - 2)$  se simplifica a
  - $2(x - 2)$
  - $x + 3$
  - $2(x + 3)(x - 2)$
  - $x - 2$
  - $2(x + 3)$
- Factorizar
  - $4x^3 - 9x^2 + 5x$
  - $(x + 1)^2 - 9$
  - $(x + 1)^3 - 27$
  - $x^4 + 1$
- ¿Para qué valores reales de  $c$  se puede factorizar el polinomio  $x^2 + cx + 1$  como un producto de polinomios lineales (de grado 1)?

8a  $4x^3 - 9x^2 + 5x = x(4x^2 - 9x + 5)$   
 $\Delta = 81 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 81 - 80 = 1$   
 $x_{1,2} = \frac{9 \pm 1}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

8a, 10a, 36, 10 min  
6:05 - 6:15

Resp:  $4x^3 - 9x^2 + 5x = x(x-1)(4x-5)$

$4x^2 - 9x + 5 = 4(x - 5/4)(x - 1) = (4x - 5)(x - 1)$

III. Ecuaciones y desigualdades

10. Encuentra todas las soluciones de cada ecuación o desigualdad.

- (a)  $x^2 = 2$
- (b)  $x^2 = x - 1$
- (c)  $x^3 = 1$
- (d)  $x^4 = 1$
- (e)  $x^2(3x + 4)^5 = 0$
- (f)  $5 \log 2x = 2 \log 5x$
- (g)  $2^{x-4} = 4^{x-3}$
- (h)  $2 \log_3 x = 3 \log_2 x$
- (i)  $|x| < 4$
- (j)  $|x + 1| < 4$
- (k)  $3 < 4 - 5x < 6$
- (l)  $x^2 > x + 1$
- (m)  $\frac{x}{12} + \frac{1}{5} = \frac{x}{5}$
- (n)  $-8 \leq \frac{2x-9}{2} \leq -7$
- (ñ)  $|3x - 4| = 5$
- (o)  $|\frac{3-8x}{4}| > \frac{1}{2}$
- (p)  $x^2 + 12 = 7x$
- (q)  $3x + 11\sqrt{x} = 4$
- (r)  $3x^{-2} + 16x^{-1} = 12$
- (s)  $-2(2x - 4) = 5[6(x - (7x - 8)) - 9x]$

sol  
 $x^2 > x + 1$   
 $y = x^2 - x - 1 > 0$   
 $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$   
 $= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

11. El valor más pequeño de  $x$  que satisface  $x(x + 4) = -3$  es

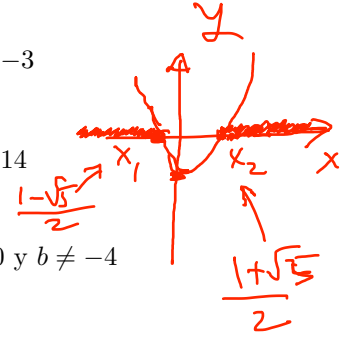
- (a) -1
- (b) 0
- (c) 1
- (d) 3
- (e) -3

12. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación  $x^2 - 7 = 0$ ?

- (a) 1
- (b) 2
- (c) 4
- (d) 7
- (e) 14

13. ¿Qué valores de  $a, b$  satisfacen que  $a|b + 4| > 0$ ?

- (a)  $a > 0$  y  $b \neq -4$
- (b)  $a > 0$  y  $b \neq 4$
- (c)  $a < 0$  y  $b \geq -4$
- (d)  $a < 0$  y  $b \neq -4$
- (e)  $a < 0$  y  $b \leq -4$



14. Si  $8y = 3x - 11$ , entonces  $x =$

- (a)  $(88/3)y$
- (b)  $(8/3)y + 11$
- (c)  $(8/3)y - 11$
- (d)  $(8y - 11)/3$
- (e)  $(8y + 11)/3$

15. El conjunto de soluciones a la ecuación  $-2(x + 8) = -2x + 20$  es

- (a) Solo  $x = -2$
- (b) Solo  $x = 0$
- (c) Solo  $x = 20$
- (d) El conjunto vacío (no hay soluciones)
- (e) Todos los números reales.

Resp:  
 $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$   
 $x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

16. Simplificar

- (a)  $\frac{x^2+5x+4}{x+1}$
- (b)  $(\sqrt{3}x^2)^4$
- (c)  $\frac{5}{\sqrt{5}}$
- (d)  $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$
- (e)  $\frac{x^{-3}y^2}{3x^4y^{-3}}$
- (f)  $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

17. Si  $x$  y  $y$  satisfacen que  $0 < x < 2 < y$  entonces

- (a)  $x < (xy)/2 < y$
- (b)  $0 < xy < 2x$
- (c)  $x < xy < 2$
- (d)  $0 < xy < 2$
- (e)  $xy < y$

e)  $xy < y / \div y$   
 $\frac{xy}{y} < \frac{y}{y} = 1$

18.  $\sqrt{45} =$

- (a) 15
- (b)  $5\sqrt{3}$
- (c)  $9\sqrt{5}$
- (d)  $3\sqrt{5}$
- (e) 3

19. Si  $x + 4y = 5$  y  $5x + 6y = 7$ , entonces  $3x + 5y =$

- (a) 12
- (b) 6
- (c) 4
- (d) 2
- (e) 1

d)  $0 < xy < 2$   
 $x=1, y=10$   
 $xy=10$

20. Si  $(a + b)^2 = 25$  y  $(a - b)^2 = 45$ , entonces  $a^2 + b^2 =$

- (a) 35
- (b) 70
- (c) 625
- (d) 2025
- (e) 4900

21. Si  $a = 3$  entonces  $2/(1/7 + 1/a) =$

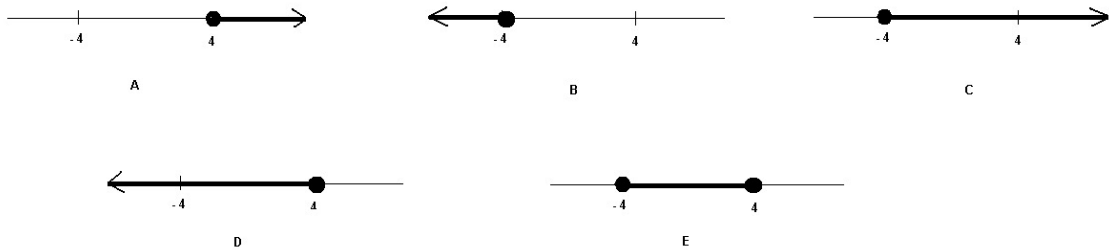
a)  $x < xy/2 / \div x$  ;  $\frac{xy}{2} < y / \div y$   
 $1 < y/2 / \cdot 2$  ;  $\frac{x}{2} < 1$   
 $2 < y$  ;  $x < 2$

- (a) 5                      (b)  $21/10$                       (c) 20                      (d) 10                      (e)  $21/5$
22. Si  $x^3 + 2hx - 2 = 6$  para  $x = -2$ , entonces  $h =$
- (a) 0                      (b) -2                      (c) -4                      (d) 4                      (e) 6
23. ¿Para qué valor de  $k$  las rectas dadas por las ecuaciones  $2x + ky = 5$ ,  $kx + (k+4)y = 7$  son paralelas?
- (a) -2                      (b) -5                      (c) -4                      (d) -7                      (e) -1
24. ¿Para qué valor de  $k$  el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + ky = 5 \\ kx + (k+4)y = 7 \end{cases}$$

no tiene solución?

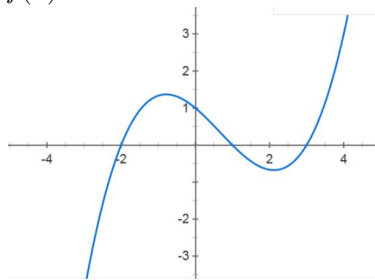
- (a) -2                      (b) -5                      (c) -4                      (d) -7                      (e) -1
25. ¿Cuál de los dibujos abajo muestra el conjunto de soluciones a la desigualdad  $-3x \leq 12$ ?



26. ¿Cuál de las rectas abajo no es paralela a la recta  $6x - 2y = 10$ ?
- (a)  $3x - y = 7$       (b)  $-6x + 2y = 20$       (c)  $3x + y = 7$       (d)  $6x - 2y = 5$       (e)  $x - y/3 = 9$
27. Si  $x = 2.0001$ , ¿cuál de los siguientes tiene el valor más grande?
- (a)  $2/(x+2)$       (b)  $2/(x-2)$       (c)  $(x+2)/2$       (d)  $2/x$       (e)  $x/2$
28. El producto (multiplicación) de las dos soluciones de la ecuación  $2x = 3 - x^2$  es
- (a) 3                      (b) 2                      (c) -2                      (d) 6                      (e) -3
29. Despejar la  $x$  de cada ecuación
- (a)  $ax + by = c$                       (b)  $1/x + 1/y = 1/R$                       (c)  $(x+y)/2 = \sqrt{xy}$

#### IV. Funciones y sus gráficas

30. La gráfica de una función  $y = f(x)$  se ve así

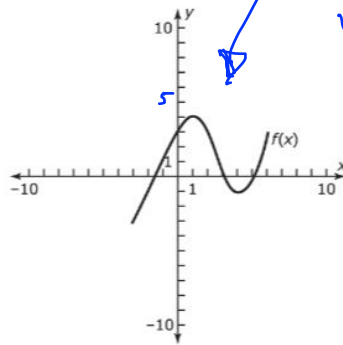


Usa la gráfica para encontrar:

- (a) los valores (aproximados) de  $f(x)$  para  $x = -1, 1$
- (b) los valores de  $x$  tal que  $f(x) = 0$ .
- (c) los valores de  $x$  tal que  $f(x) = 1$ .
- (d) La gráfica de  $y = f(x) - 1$ .
- (e) La gráfica de  $y = f(x - 1)$ .

31. Encuentra los valores de  $b$  tales que la gráfica de la función  $y = x^2 + bx + 1$  interseca el eje de  $x$  en (a) dos puntos; (b) un punto; (c) ningún punto.

32. La gráfica de una función  $y = f(x)$  es la siguiente



*vieja*  $y = f(x)$   
*lucera*  $y = 2f(x-2) + 1 = g(x)$   
 $f(\text{vieja})$   $g(\text{lucera})$

x	y
0	3
3	0

x	y
0	$2f(-2) + 1 = 2(-1) + 1 = -1$
2	$2f(0) + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

$g(0) \approx -1$

¿Cuál de las siguientes gráficas puede ser la gráfica de  $y = 2f(x - 2) + 1$ ?

$g(0) = 0$

(A)

$g(0) \approx -1$

(B)

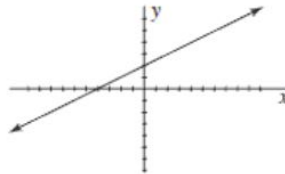
$g(0) \approx -3$

(C)

$g(0) = 7$

(D)

33. La gráfica siguiente es la gráfica de una función de la forma  $y = ax + b$ .



¿Cuál de las siguientes gráficas es la gráfica de la función  $y = 3ax + b$ ?

A

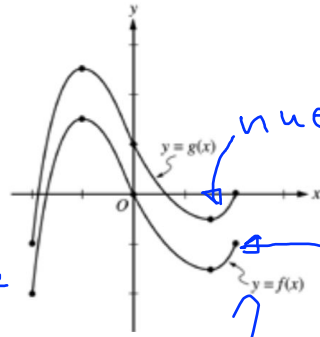
B

C

D

E

34. Las gráficas de las funciones  $f$  y  $g$ , restringidas al intervalo  $-2 \leq x \leq 2$ , se muestran abajo.



$f(0) = 0$   
 $g(0) = 1$

- a)  $g(0) = f(1) < 0$  (frown)
- b)  $g(0) = f(-1) = 1.5 \neq 1$
- c)  $g(0) = f(1) + 1 = -1.5 + 1 = -1/2$  (frown)
- d)  $g(0) = f(0) + 1 = 0 + 1 = 1$  (smiley)
- e)  $g(0) = -1$  (frown)

¿Cuál de las siguientes fórmulas expresa correctamente la relación entre  $f$  y  $g$ ?

- (a)  $g(x) = f(x + 1)$  (crossed out)
- (b)  $g(x) = f(x) + 1$  (checked)
- (c)  $g(x) = f(x + 1) + 1$  (crossed out)
- (d)  $g(x) = f(x - 1)$  (crossed out)
- (e)  $g(x) = f(x) - 1$  (crossed out)

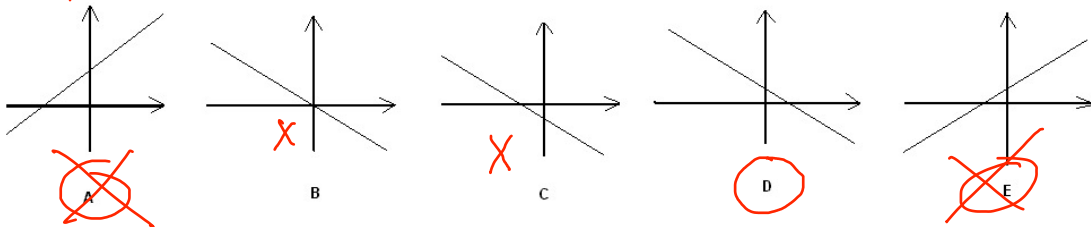
35. ¿Cuál de las siguientes funciones corresponde a la siguiente tabla de valores?

$x$	$y$
-20	-1/8
-10	-1/3
0	1/2
5	2/9
20	1/12

Receso 5:45 pm

- (a)  $y = 1/(x + 2)$
- (b)  $y = 2/(x + 4)$  (pend)
- (c)  $y = (x - 1)/(x + 2)$
- (d)  $y = 2/(x - 2)$
- (e)  $y = 1/(2x + 2)$

36. ¿Cuál de las siguientes gráficas podría ser la de  $y = -2x + 2$ ?



$-2x + 2 = 0$   
 $2 = 2x$   
 $x = 1$

37. La pendiente de la recta con la ecuación  $4x = -3y + 8$  es

- (a) 4
- (b) -3/4
- (c) -4/3
- (d) 2
- (e) 8

38. ¿Para qué valores de  $c$  la parábola  $y = x^2 + 2x + c$  tiene su vértice arriba del eje de  $x$ ?

39. ¿Para qué valor de  $k$  las rectas dadas por  $2x + ky = 5/7$ ,  $x + 2y = 7/9$ , son paralelas?

40. Dibujar las gráficas de las funciones  $y = x + 1$  y  $y = (x + 1)^2$  en el mismo sistema de coordenadas y encontrar sus puntos de intersección (en caso que se intersectan).

41. Si graficamos las líneas  $2x + 3y = 5$  y  $x = -2$  en el plano de coordenadas  $x, y$  se van a intersectar en

- (a) (-2, 0)
- (b) (-2, 5)
- (c) (0, 5/3)
- (d) (0, 5)
- (e) (-2, 3)

10  
10  
9  
10  
10  
10  
10  
9  
8  
9  
7  
8

## V. Sucesiones

42. Determina el quinto término de una sucesión geométrica que empieza con  $\frac{1}{2}, -1, \dots$
43. Determina el décimo término y la suma de los primeros 20 términos de la sucesión aritméticas que empieza con  $-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$
44. Calcula la suma  $215 + 217 + 219 + \dots + 2019$  (la suma de los números impares entre 215 y 2019).

## VI. Miscelanea

45. En una tienda venden dos tipos de café: tipo A cuesta 50 pesos el kilo y tipo B cuesta 100 pesos el kilo. El dueño quiere preparar 20 kilos de mezcla de estos dos tipos, tal que cueste 80 pesos el kilo. ¿Cuántos kilos de tipo A y cuántos kilos de tipo B debe usar para hacer la mezcla?
46. La masa de la tierra es  $\approx 5.97 \cdot 10^{24}$  kg (lo que “pesa”). La masa del sol es  $\approx 1.98 \cdot 10^{30}$  kg. ¿Cuántas veces más grande es la masa del sol que la masa de la tierra?
47. El salario anual de un trabajador empieza con 30,000 pesos y aumenta por 10% cada año.
  - (a) ¿Cuánto va a ganar en el décimo año?
  - (b) ¿Cuánto es el total de dinero que gana en 20 años de trabajo?

Nota: en los últimos dos problemas se puede usar calculadora.

48. El precio de un producto subió 11% en el año 2018 y bajó 10% en el año 2019. ¿Cuánto% ha subido o bajado en total el precio en los dos años 2018-2019?

## VII. Retos (opcionales)

49. Tenemos dos jaras, una con 1 litro de agua, otra con 1 litro de leche. Pasamos 1 cuchara (10 mililitros) de la jara de agua a la jara de leche, mezclamos, luego una cuchara de leche (mezcalada con poco de agua) de regreso a la jara de agua. ¿Qué hay más ahora, agua en la leche o leche en el agua?
50. Un número  $x$  satiface  $x + 1/x = 3$ . Encontrar  $x^2 + 1/x^2$  y  $x^3 + 1/x^3$ .
51. La sucesión 99, 106, 110, ... se obtuvo al evaluar un polinomio cuadrático en los enteros positivos 1, 2, 3, ... ¿Cuáles son los siguientes 3 términos de la sucesión?