

Guía para el examen parcial núm. 1

(Fecha del examen: 19 marzo, 2021)

1. Calcular, sin calculadora, dando la respuesta en notación decimal:

- | | | |
|-----------------------------------|-------------------------|---------------------------------------|
| (a) $(3/5) \times 10^{-5}$ | (b) $0.001/0.02$ | (c) $0.01/0.002$ |
| (d) $(\sqrt{10})^4$ | (e) $\sqrt{0.04}$ | (f) $\sqrt{1.2}\sqrt{0.3}$ |
| (g) $0.1 - 2$ | (h) -4^{-2} | (i) $-(1/4)^{-1/2}$ |
| (j) $(-8)^{-3}$ | (k) -8^{-3} | (l) $(-8)^{-1/3}$ |
| (m) $(10^{-2} - 10^{-3})/10^{-4}$ | (n) $(0.125)^{-2/3}$ | (ñ) $1 - 1/(1 - 1/(1 - 1/(1 - 1/2)))$ |
| (o) $\log 0.1$ | (p) $\log(\log 10)$ | (q) $\log 10^{2.3}$ |
| (r) $10^{\log 2.3}$ | (s) $(\log 8)/(\log 2)$ | (t) $\log \sqrt{10}$ |

2. Simplificar

- | | | |
|--|---|--|
| (a) $(2x^2 + 2x - 12)/(x - 2)$ | (b) $5/\sqrt{5}$ | (c) $\sqrt{2}\sqrt{8}$ |
| (d) $(1 - \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})$ | (e) $\sqrt{54^6}$ | (f) $(-2^{-1/2})(-2^8)(-4^{-1/4})$ |
| (g) $(x^2 + \sqrt{x})(x^2 - \sqrt{x})$ | (h) $\sqrt{\sqrt{x}}$ | (i) $(x^{-3}y^{-2})/(y^{-3} - x^{-2})$ |
| (j) $[2^{n+4} - 2(2^n)]/[2(2^{n+3})]$ | (k) $\sqrt{10 + \sqrt{96}} - \sqrt{10 - \sqrt{96}}$ | (l) $10^{\log x}$ (con $x > 0$) |

Respuesta de (k): $2\sqrt{6}$. Sugerencia: calcular el cuadrado de esta expresión y simplificar.

3. Encuentra el número de soluciones de cada ecuación (no es necesario encontrar las soluciones).

- | | | |
|-----------------------|------------------------------|---------------------------|
| (a) $x^2 = 7x$ | (b) $x^3 = 7x$ | (c) $x^{100} = 7x$ |
| (d) $x^2 + 1 = 0$ | (e) $x^2 = \sqrt{2}$ | (f) $\sqrt{2}x^2 = 1$ |
| (g) $\sqrt{2x^2} = 1$ | (h) $x(x-1)^2(x-2)^3 = 0$ | (i) $4x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ |
| (j) $x + x^2 = 1$ | (k) $(x-1)/(x+1) = x$ | (l) $x^3 = 0$ |
| (m) $2^{x^2-1} = 3^x$ | (n) $x^4 - 8x^3 + 16x^2 = 0$ | (ñ) $\log x = -2$ |
| (o) $\log(x^2) = -2$ | (p) $(\log x)^2 = -2$ | (q) $(\log x)^2 = 2$ |

4. Factorizar los polinomios siguientes, si es posible. Si no es posible, indícalo.

- | | | | |
|---------------|---------------|-----------------|-------------------|
| (a) $x^2 - 4$ | (b) $x^2 + 4$ | (c) $2x^2 - 3$ | (d) $x^2 + x - 1$ |
| (e) $x^3 - 1$ | (f) $x^3 + 1$ | (g) $x^3 - y^3$ | (h) $x^3 + y^3$ |

Nota: “factorizar” un polinomio significa escribirlo como un producto (multiplicación) de dos polinomios (los “factores”) ambos de grado menor que el original. Ejemplos: $x^3 = x^2x$, $x^1 - 1 = (x+1)(x-1)$, $x^3 - x = (x^2 - 1)x = (x+1)(x-1)x$, $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$. Luego, $2x^2 = 2 \cdot x^2$ no “cuenta” como factorización, ya que el segundo factor, x^2 , tiene el mismo grado que el original. Luego, $x^2 + 1$ no es factorizable (ya que no tiene raíces).

5. Encuentra el residuo de cada división, sin hacer la división.

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| (a) $x^2 + 1$ entre $x - 1$ | (b) $(x^2 + 1)^{10}$ entre $x - 1$ |
| (c) $(x^2 - 2)^{2020}$ entre $x - 1$ | (d) $(x^2 + 1)^{10}$ entre $x^2 - 1$ |

6. Para cada uno de los siguientes polinomios, encuentra su grado, sus raíces, y una factorización en polinomios irreducibles (polinomios que no se puede factorizar).

- | | | | |
|----------------|---------------------|-----------------------|---------------|
| (a) $x^2 - 1$ | (b) $2x^2 - 1$, | (c) $(x^2 - 1)^{10}$ | (d) $x^3 - 3$ |
| (e) $x^2 + 7x$ | (f) $2x^2 + 3x + 1$ | (g) $2x^3 + 4x^2 + x$ | |

- (a) $x^2 > x$ para todo $x > 0$. (b) $x^2 > x$ para todo $x > 1$.
 (c) $x^2 < x$ para todo $x < 1$. (d) $x^2 < x$ para todo $0 < x < 1$.
 (e) Toda ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ tiene 2 soluciones.
 (f) Toda ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con $b^2 + 4ac > 0$ tiene 2 soluciones.
 (g) Toda ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ tiene a lo más 2 soluciones.
 (h) Hay ecuaciones cuadráticas $ax^2 + bx + c = 0$ sin soluciones.

Opcionales:

26. La sucesión de números 9, 21, 37, ... se obtuvo al evaluar un polinomio cuadrático en una lista de enteros sucesivos. Encuentra el siguiente valor de la sucesión.
27. Encuentra el residuo de la división de $x^{100} + 1$ entre $x^2 + 1$
28. Ordenar los siguientes números en orden creciente, sin usar calculadora!
 $3/4, 4/7, -2/3, -7/4, -0.3, 9/7, -17/13, 113/74, \sqrt{3}, 12/11, 12/13 - 14/15, 223/142, \log 0.8$.
29. Encuentra el producto de las soluciones de la ecuación $x^2 + 3x - 7 = 0$, sin resolver la ecuación! Lo mismo para $x^3 - 3x + 2 = 0$.
30. Se sabe que $a > b$, $(a + b)^4 = 2$ y $(a - b)^4 = 8$. Encuentra $a^2 - b^2$.