Examen parcial núm. 1 - soluciones

1. Calcular, sin calculadora, dando la respuesta en notación decimal:

   (a) $(32/5) \times 10^{-4} = \frac{32}{5} \times 10^{-4} = \frac{32 \cdot 2}{5 \cdot 2} \times 10^{-4} = \frac{64}{10} \times 10^{-4} = 64 \cdot 10^{-5} = 0.00064.$

   (b) $0.025/0.0005 = \frac{25 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-4}} = 5 \cdot 10^{-3+4} = 5 \cdot 10 = 50.$

   (c) $\left(\sqrt{3}\right)^6 = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 3^{\frac{1}{2} \cdot 6} = 3^3 = 27.$

   (d) $-(1/27)^{-1/3} = -\left(3^{-3}\right)^{-1/3} = -3^{(-3)\cdot(-1/3)} = -3^1 = -3.$

   (e) $3^{\log 3}$ (tachado)

   (f) $(\log 81)/(\log 3) = \frac{\log 3^4}{\log 3} = \frac{4 \log 3}{\log 3} = 4.$

2. Simplificar lo más que puedes.

   (a) $(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) = 2^2 - (\sqrt{2})^2 = 4 - 2 = 2.$

   (b) $(-2^{-1/2})(-4^{-1/2})(-8^{-1/8}) = -\left(2^{-1/2}\right)\left((2^2)^{-1/2}\right)\left((2^3)^{-1/8}\right) = -\left(2^{-1/2}\right)\left(2^{-1}\right)\left(2^{-3/8}\right) =$
   $= -2^{-(1/2)-1-(3/8)} = -2^{-15/8} = -2^{-2+1/8} = -2^{-2}2^{1/8} = -\frac{2^{1/8}}{2^2} = -\frac{\sqrt[8]{2}}{4}.$

   (c) $(2x + \sqrt{2x})(x - \sqrt{x}) = 2x^2 - 2x\sqrt{x} + \sqrt{2x}x - \sqrt{2x}\sqrt{x} = 2x^2 + (\sqrt{2} - 2)x\sqrt{x} - \sqrt{2}x.$

   (d) $2^{\log(2x)}$ (con $x > 0$) (tachado)

3. Encuentra el número de soluciones de cada ecuación (no es necesario encontrar las soluciones).

   (a) $5x^8 = \sqrt{5}x^2$

   ▷ Una obvia es $x = 0$. Si $x \neq 0$ entonces se divide ambos lados entre x^2, y se obtiene $5x^6 = \sqrt{5} \Leftrightarrow x^6 = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[6]{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \pm\frac{1}{\sqrt[12]{5}}$, así que son 3 soluciones.

   (b) $x^7(x+1)^8(x+2)^9 = 0 \Leftrightarrow x^7 = 0$, $(x+1)^8 = 0$, o $(x+2)^9 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $x + 1 = 0$, o $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0, -1$, o -2, así que son 3 soluciones.

   (c) $2^{x^2-3} = 4^x \Leftrightarrow 2^{x^2-3} = (2^2)^x = 2^{2x} \Leftrightarrow x^2 - 3 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$. La discriminante de la última ecuación es $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-3) > 0$, así que hay 2 soluciones.

   (d) $\log x = -1/5 \Leftrightarrow x = 10^{-1/5} = \frac{1}{\sqrt[5]{10}} > 0$, así que hay 1 solución.

   (e) $\log(x^2) = -1/5 \Leftrightarrow x^2 = 10^{-1/5} = \frac{1}{\sqrt[5]{10}} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{\sqrt[5]{10}}} = \pm\frac{1}{\sqrt[10]{10}}$, así que son 2 soluciones.

   (f) $(\log x)^2 = -1/5$ no tiene soluciones porqué el cuadrado de un número ($\log x$ en este caso) no puede ser negativo.

4. Encuentra el resíduo de cada división, sin hacer la división.

(a) x^8+1 entre $x+1$

▷ Al dividir, nos da $x^8+1 = q(x)(x+1)+r$, donde $q(x)$ es el cociente (un polinomio de grado 7) y r es el residuo, un número (ya que hemos dividido entre un poliomio de grado 1). Sustituimos $x=-1$ en ambos lados de la última ecuación y obtenemos $r = (-1)^8+1 = 2$.

(b) $(x^8+1)^8$ entre $x+1$

▷ Tenemos $(x^8+1)^8 = q(x)(x+1)+r$, donde $q(x)$ es el cociente (un polinomio de grado 63) y r es el residuo, un número (ya que hemos dividido entre un poliomio de grado 1). Sustituimos $x=-1$ en ambos lados de la última ecuación y obtenemos $r = ((-1)^8+1)^8 = 2^8 = 256$.

(c) $x^{99}-1$ entre x^2-1

▷ Tenemos $x^{99}-1 = q(x)(x^2-1)+r(x)$, donde $q(x)$ es el cociente (un polinomio de grado 97) y $r(x) = ax+b$ es el residuo, un polinomio de grado < 2 (ya que hemos dividido entre un poliomio de grado 2). Sustituimos $x=1$ en ambos lados de la última ecuación y obtenemos $0 = a+b$. Luego sustituimos $x=-1$ y obtenemos $-2 = -a+b$. Resolviendo el par de ecuaciones $a+b=0, -a+b=-2$, da $a=1, b=-1$, así que $r(x) = x-1$.

5. ¿Para qué valores de c el polinomio x^2-x+c tiene una sola raíz? ¿Ninguna raíz? ¿Dos raices?

▷ La discriminante del polinomio es $\Delta = 1^2-4c = 1-4c$. Luego la ecuación tiene 1 sola raíz $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 1-4c=0 \Leftrightarrow c = 1/4$; ninguna raíz $\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow 1-4c<0 \Leftrightarrow 1 < 4c \Leftrightarrow c > 1/4$; 2 raices $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 1-4c > 0 \Leftrightarrow 1 > 4c \Leftrightarrow c < 1/4$.

6. ¿Para qué valor de k las rectas $x-y=9$ y $x+ky=5$ son paralelas?

▷ "Rectas paralelas" significa rectas que no se intersectan; esto equivale a que el sistema de ecuaciones $x-y=9, x+ky=5$ no tiene solución. Intentamos resolver este sistema. Restando la 1era de a 2nda da $y(k+1) = -4$. Si $k=-1$ esto da $0=-4$ por lo que no hay solución al sisema para $k=-1$. Si $k \neq -1$ entonces $k+1 \neq 0$, así que podemos dividir los dos lados de la última ecuación entre $k+1$, y se obtiente el valor de y. Ese valor se sustituye en la 1era ecuación (digamos), y se obtiente el valor de x. Así vemos que para $k \neq -1$ el sistema tiene solución. Así que las rectas son paralelas solamente para $k=-1$.

7. Encuentra los valores de c tal que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+cy &= 1 \\ 2x+y &= c \end{cases}$$

no tenga solución.

▷ Multiplicando la 1era ecuación por 2 y le restamos la 2nda, obtenemos $(2c-1)y = 1-c$. Si $c=1/2$ entonces la última ecuación da $0 = 1/2$, por lo que el sistema no tiene solución para $c=1/2$. Si $c \neq 1/2$ entonces $2c-1 \neq 0$ y se puede dividir los dos lados de la ecuación $(2c-1)y = 1-c$ entre $2c-1$, y así obtenemos el valor de y. Este valor lo sustituimos en la 1era ecuación y la podemos resolver para x. Así que el único valor de c para el cual el sistema no tiene solución es para $c=1/2$.

8. (tachado por un error) Una bomba vacia una alberca llena en 13 horas. Otra bomba, trabajando 12 horas, no termina de vaciar la alberca, sino quedan todavía 10 mil litros. Trabajando las dos bombas juntas, vacian la alberca en 6 horas. ¿Cuantos litros hay en la alberca llena?

9. ¿Cierto o falso?

(a) $x^2 > x$ para todo $x > 0$.

▷ Falso. Para $x=1$ no es cierto.

(b) $x^2 > x$ para todo $x > 1$.

▷ Cierto. Multiplicamos los dos lados de $x > 1$ por x, y como $x > 0$, obtenemos $x^2 > x$.

(c) $x^2 < x$ para todo $x < 1$.

▷ Falso. Para $x=0$ no es cierto.

(d) $x^2 < x$ para todo $0 < x < 1$.

$\triangleright$ Cierto. Multiplicamos los dos lados de $x < 1$ por x, y como $x > 0$, obtenemos $x^2 < x$.

(e) Toda ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ tiene 2 soluciones.

$\triangleright$ Falso. La única solución de $x^2 = 0$ es $x = 0$.

(f) Toda ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con $b^2 + 4ac > 0$ tiene 2 soluciones.

$\triangleright$ Falso. Por ejemplo, $x^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones y satisface $b^2 + 4ac = 4 > 0$. (Nota que no basta decir que "es falso porque $b^2 + 4ac$ no es la descriminante", o "hubiera sido cierto si fuera $b^2 - 4ac$."Por ejemplo, $2\Delta = 2b^2 - 8ac$ tampoco es la discriminante, pero sin embargo cuando $2\Delta > 0$ tenemos que $\Delta > 0$ por lo que la ecuación tiene 2 soluciones.)

(g) Toda ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ tiene a lo más 2 soluciones.

$\triangleright$ Cierto, ya que un polinomio de grado d tiene a lo más d raices.

(Es una consecuencia del teorema del residuo. Si x_1 es una raiz de un poliomio $p(x)$ de grado d, entonces dividiendo entre $x - x_1$ nos da $p(x) = q(x)(x - x_1) + r$, donde $q(x)$ es un polinomio de grado $d - 1$ y r un número (el residuo de la división). Sustituimos $x = x_1$ en ambos lados y nos da $r = 0$, asi que $p(x) = q(x)(x - x_1)$. Si $p(x)$ tiene otra raiz, digamos $x_2 \neq x_1$, entonces sustituyendo $x = x_2$ en ambos lados de la última ecuacón nos da que x_2 es una raíz de $q(x)$. Así que, por el mismo argumento como para x_1, $q(x) = u(x)(x - x_2)$ para algun polinomio $u(x)$ de grado $d - 2$, por lo que $p(x) = u(x)(x - x_1)(x - x_2)$. Y así seguimos, cada raíz adicional da un factor adicional en una facorización de $p(x)$. Si $p(x)$ tiene d raices, digamos $x_1, \ldots x_d$, entonces $p(x) = c(x - x_1) \cdots (x - x_d)$ para una constante $c \neq 0$ (porque los dos lados deben tener grado d). Ahora, lo más importante: *no puede existir otra raiz, porque al sustituirla en ambos lados de la última ecuacion tendremos* 0 *al lado izquierdo y algo distinto de 0 a lado derecho.*)

(h) Hay ecuaciones cuadráticas $ax^2 + bx + c = 0$ sin soluciones.

$\triangleright$ Cierto. Por ejemplo $x^2 + 1 = 0$.