Tarea núm. 1

(para entregar el jueves 23 ene)

Nota: esta tarea es sobre polinomios. El material de apoyo para esta tarea es (ver en la sección de bibliografía de la página del curso):

- Sección 5.1 y 5.2 del libro de Angel.
- Sección 28 (p. 44) del Libro de Gelfand.

Resumen de los conceptos más importantes que se vieron en la primera clase (21 ene, 2020):

- **Polinomio:** es una expresión ("fórmula") que contiene letras (las *variables*) y números *reales*, combinados mediante suma, resta y multiplicación.

  Por ejemplo: $x^4 + x^3y + y^3$, $(5 - x)(3 + x^2)$, $-\sqrt{2}x$, $(x - y)^{2014}$, 7.

  Las letras $x, y, \ldots$ se llaman las variables del polinomio. Las potencias que aparecen, como x^4, son abreviaciones de multiplicación, $x^4 = xxxx$, así que se permite. Potencias negativas, como x^{-1}, o fraccionales, como $x^{1/2} = \sqrt{x}$, no están permitidas, ya que implican división. Potencias negativas, raices etc de *números* se permiten, como en el 3er ejemplo, ya que estos son números reales, que son permitidos. El *número de variables* de un polinomio es el número de letras distintas que aparecen. Así que el 1er y 4to ejemplos arriba son de dos variables, el 2ndo y 3ero de 1 variable, el último de 0 variables.

  Todo polinomio de una variable se puede escribir en su *forma estandar*

  $$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n, \quad a_n \neq 0,$$

  donde $a_0, \ldots, a_n$ son números (reales) arbitrario, los *coeficientes* del polinomio.

  Al multiplicar, sumar o restar dos polinomios se obtiene otro polinomio. En cambio, el resultado de la división de un polinomio por otro es una operación más delicada; no es un polinomio, en general, sino una *expresión racional*, pero a veces sí es un polinomio; esto lo veremos más adelante.

- **Monomios:** es un polinomio especial, en donde no se usa suma o resta, solo multiplicación (o cómo se dice en el libro, un polinomio con un solo término). Todo polinomio se puede expresar como suma de monomios.

  Por ejemplo: x^2, $2x$, $\sqrt{3}x^2y$, -5.

- **Grado:** para un monomio, su *grado* es la suma de las potencias de las variables que aparecen en él (o sea el numero de letras que aparecen, si expandemos las potencias a multiplicación).

  Por ejemplo, los grados de los monomios x^2, $2x$, $\sqrt{3}x^2y$, -5 son 2, 1, 3, 0 (resp.).

  El grado de un polinomio es el grado de su monomio de mayor grado.

  Por ejemplo: el grado de $xy^{10} - x^4y$ es 11.

  Nota: el grado del polinomio 0 (el polinomio "nulo") no está definido.

  Terminología: un polinomio de grado 1 es polinomio 'lineal', de grado 2 es un polinomio 'cuadrático', polinomio de grado 3 es un polinomio 'cúbico', de grado 4 es 'cuártico', etc.

  Hecho importante (un 'teorema'): el grado del producto de dos polinomios *no nulos* es la *suma* de sus grados.

  Por ejemplo: el grado de $(5 - x)(3 + x^2)$ es $1 + 2 = 3$. El grado de $(1 + x^2)^{100}$ es 200.

- **Evaluación:** "evaluar" un polinomio de una variable en un número es el resultado de la sustitución del número en lugar de la variable.

  Por ejemplo: evaluando el polinomio x^2-3x+2 en $x = -1$ da $(-1)^2-3(-1)+2 = 6$.

  Notación: si un cierto polinomio de una variable, x, se denota por $p(x)$ (se lee: "p de x"), entonces el resultado de la evaluación de $p(x)$ en un número a se denota por $p(a)$. Por ejemplo: si $p(x) = x^2 - 3x + 2$ entonces $p(1) = 0$, $p(-1) = 6$, etc.

- **Raíces:** una *raíz* de un polinomio de una variable $p(x)$ es un número r tal que $p(r) = 0$ (es decir, al evaluar el polinomio en el número da 0). Por ejemplo $x^2 - 1$ tiene dos raices (1 y -1). En cambio $x^4 + 1$ no tiene raíces (¿porqué?). Se sabe que un polinomio de grado n tiene a lo más n raices. Esto no es obvio, pero lo vamos a ver un poco más adelante (el caso especial de grado 2 lo deberian conocer).

  Nota: el término "raíz" es raro, admito. No se cual es su origen.

- **Factorización:** factorizar un polinomio de grado > 1 significa expresarlo como un producto (multiplicación) de dos polinomios de grado menor que él. Por ejemplo: $x^2-1 = (x+1)(x-1)$ es una factorización de x^2-1, un polinomio cuadrático (de grado 2), en un producto de dos polinonios lineales (de grado 1). Otro ejemplo: $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$. Hay polinomios que no son factorizables, por ejemplo $x^2 + 1$. En general, no es facil factorizar polinomios o saber si un polinomio es factorizable. Por ejemplo: ¿puedes factorizar el polinomio $x^4 + 1$? (Sí se puede, pero no es tan facil).

Los problemas

Nota: Problemas marcados por * son opcionales.

1. Convertir los siguientes polinomios en una suma de monomios y simplificar .

   Ejemplo: $(1+x-y)(1-2x) = 1+x-y-2x-2x^2+2xy = 1-x-y-2x^2+2xy$.

   a) $(1 + x - y)(12 - zx - y^2)$
   b) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$
   c) $(1 + x)(1 + x^2)$
   d) $(1 + x + x^2 + x^3)^2$.
   e) * $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{10})^2$.
   f) * $(1 - x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{10})$.
   g) ** $(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots + x^{10})(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^{10})$.

2. En cada caso se especifica un polinomio $p(x)$ y se pide encontrar algunos números.

   Ejemplo cómo hacer el inciso a): $p(1) = 1^2 - 4 = -3$. Luego, si $p(r) = 0 \Rightarrow r^2 - 4 = 0 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2, -2$ (el polinomio tiene dos raíces). Si $p(r) = 1 \Rightarrow r^2 - 4 = 1 \Rightarrow r^2 = 5 \Rightarrow r = \sqrt{5}, -\sqrt{5}$.

	$p(x)$	Encontrar
a	$x^2 - 4$	$p(1)$; los r tal que $p(r) = 0$, $p(r) = 1$.
b	$x^2 - 2x + 1$	$p(1)$; los r tal que $p(r) = 0$, $p(r) = 1$.
c	$x^4 - 2x^2 + 1$	$p(1)$; los r tal que $p(r) = 0$, $p(r) = 1$. (Ayuda: factorizar el polinomio)
d	$(1 + x)^{10}$	$p(0)$; los r tal que $p(r) = 0$, $p(r) = 1$.
e	$(2x - 3)(4x + 5)$	los r tal que $p(r) = 0$, $p(r) = 1$.
f	$x(x^2 - 1)(x^2 - 5)$	los r tal que $p(r) = 0$. (Ayuda: hay 5 tales r).
g	$x^3 - x$	los r tal que $p(r) = 0$. (Ayuda: hay 3 tales r).