Tarea núm. 10

(para entregar el jueves 23 abr, 2020)

Repaso de polinomios.

- Un polinomio de grado n es una expresión de la forma $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, donde $a_0, \ldots, a_n$ son números reales cualesquiera, llamados los *coeficientes* del polinomio, y $a_n \neq 0$. Si todos los coeficientes se anulan $p(x)$ es el polinomio *nulo*, $p(x) = 0$, y no tiene grado. Por ejemplo, los grados de $x^2, 2^6x^2, x^2 + 2^6$, $(1.2x - \sqrt{3})^2$ son todos 2.
- Hecho (básico): *el grado del producto de dos polinomios no nulos es la suma de sus grados.* Por ejemplo, los grados de $(x^3 + 4)(x^4 - \sqrt{3})$, $(x^2/2 - 1.3)^6$ y $(x^2 + 3)^6$ son 12.
- Una *raiz* de un polinomio $p(x)$ es un número, digamos c, tal que $p(c) = 0$. Por ejemplo, 1 es una raíz de $x - 1$, $x^2 - 2x + 1$ y $x^8 - 1$. Hecho: *un polinomio de grado n tiene a lo más n raices* (pero a veces menos, hasta ninguno; por ejemplo, $x^8 + 1$).
- Una *factoización* de un polinomio no nulo consiste en escribirlo como el poducto de dos polinomios de grado menor. Por ejemplo, $2x^2 - 1$ se puede factorizar como $2x^2 - 1 = (\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1)$. Hay polinomios que no se puede factorizar. Por ejemplo, $x^2 + 1$. Más general, todos los polinomios cuadráticos (de grado 2) con discriminante negativa no son factoizables. Es un hecho, bastante profundo, que estos son los *únicos* polinomios no factorizables. En general, es dificil factorizar polinomios (no existe una receta). Por ejemplo, intenta factorizar $x^4 + 3$.
- Dados dos polinomios $p(x)$, $d(x)$, con $d(x)$ no nulo, decimos que $d(x)$ *divide* a $p(x)$ si $p(x) = d(x)q(x)$ para algun polinomio $q(x)$. Otra manera de decirlo: $p(x)$ es un *múltiplo* de $d(x)$. Otra: $d(x)$ es un *factor* de $p(x)$.
- Otro hecho básico: dados dos polinomios $p(x)$, $d(x)$, con $d(x)$ no nulo, existen dos polinomios únicos $q(x)$, $r(x)$, con grado$[r(x)] <$grado$[d(x)]$ o $r(x) = 0$, tal que

  $$p(x) = d(x)q(x) + r(x)$$

  El caso de $r(x) = 0$ es justo cuando $d(x)$ divide a $p(x)$. En esta ecuación $p(x)$ es el *dividente*, $d(x)$ el *divisor*, $q(x)$ el *cociente* y $r(x)$ el *residuo*. El *algoritmo de división* (o "división sintética"), es una receta que permite encontrar el cociente y el residuo, pero en muchos casos es posible adivinarlos o usar trucos, evitando el algoritmo. Por ejemplo, si $d(x)$ es lineal (de grado 1), el residuo es un número, asi que basta encontrar la raíz de $d(x)$, digamos c, y sustituirla en ambos lados de $p(x) = d(x)q(x) + r$, obteniendo $r = p(c)$. También funciona a veces esta idea para $d(x)$ de grado mayor que 1, si conocemos suficientes raices de $d(x)$.

Los poblemas

1. Encuentra los grados de los siguientes polinomios

   (a) $x^2 - \sqrt{2}$ (b) $(\sqrt{2}x^2 - 1)^{15}$ (c) $(x^2 - 1)^{15}(x^{15} - 1)^2$

   (d) $(x^2 - \sqrt{2})^2 - x^4$ (e) 2^6 (f) 0

2. Se divide un polinomio de grado 10 entre un polinomio de grado 3. ¿Qué puedes decir acerca de los grados del cociente y el residuo?

3. En cada inciso encuentra el cociente y el residuo de la división y sus grados.

   Nota: todos los incisos, excepto el último, se puede resolver fácilmente sin usar división sintética.

   (a) x^9 entre x^3. (b) x^9 entre $\sqrt{2}x^3$. (c) $\sqrt{2}x^9$ entre x^3.

   (d) x^9 entre 5. (e) x^3 entre x^9. (f) $(x^2 + 8)^9$ entre $x^2 + 8$.

   (g) x^9 entre $x^9 + 4$ (h) $3x^4 + 4x^3 - 32x^2 - 5x - 20$ entre $3x^3 - 8x^2 - 5$

4. * (Opcional) Al dividir el polinomio $p(x)$ entre $x^2 - 9$ el residuo es $-2x + 1$. Calcula el residuo cuando $p(x)$ se divide entre $x + 3$.