Tarea núm. 12

(para entregar el martes 16 mayo, 2023)

Resumen de números complejos

- Un *número complejo* es una expresión de la forma
$$z = x + iy,$$
donde x, y son números reales ('normales').
- Se representa a z por el punto en el plano con coordenadas (x, y).
- La *parte real* de z es x y la *parte imaginaria* es y. Notación: $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$. Ojo: la "parte imaginaria"de z es y, no iy. Por ejemplo, $\mathrm{Im}(i) = 1$.
- Si $\mathrm{Im}(z) = 0$ entonces z es un número real. Si $\mathrm{Re}(z)$ entonces z es *imaginario* (o a veces se dice 'imaginario puro'). Por ejemplo: $2i,\ -\sqrt{2}i,\ 0$, son imaginario. $2, -3, 1/\pi, 0$ son reales. Geométricamente, los números reales aparecen en el eje de x, los imaginarios en el eje de y.
- La *suma* de números complejos se hace de manera"obvia" (se suman por separado la parte real e imaginaria): $(2 + 3i) + (-1 - i) = (2 - 1) + (3 - 1)i = 1 + 2i$.
El *producto* (o multiplicación) se hace con la regla $i^2 = -1$. Por ejemplo, $2i(1-i) = 2i - (2i \cdot i) = 2i - (-2) = 2 + 2i$.
- El *conjugado* de $z = x + iy$ es $\bar{z} = x - iy$. Por ejemplo: $\overline{1 - i} = 1 + i$, $\bar{i} = -i$, $\bar{7} = 7$. Satisface unas reglas imporantes:
  - $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ("el conjugado de una suma es la suma de los conjugados").
  - $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ ("el conjugado de un producto es el producto de los conjugados").
  - $\bar{\bar{z}} = z$ ("conjugar dos veces no hace nada").
  - $z\bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0$, o sea, un número real, no negativo.
- El *valor absoluto* de $z = x + iy$ es $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, o sea, $|z|^2 = z\bar{z}$.
- Usando conjugación se puede *dividir* números complejos, multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador. Por ejemplo,
$$\frac{2 - i}{1 + 2i} = \frac{(2 - i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{4 - 5i}{1^2 + 2^2} == \frac{4 - 5i}{5} = \frac{4}{5} - i.$$
- La *forma polar* de $z = x + iy$ es $re^{i\theta}$, donde $r = |z| \geq 0$ (la distancia de z al origen), y θ es el ángulo que forma el segmento $\overline{0z}$ con el eje de x positivo. El θ se mide en radianes (ver abajo). El número $e \approx 2.17\ldots$ es un número especial, el "número de Euler". Por el Teorema de Pitágoras, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Importane: los ángulos se mide típicamente no en grados, sino en *radianes*: 180 grados son π radianes (≈ 3.14).
Por ejemplo: $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, $i = e^{i\pi/2}$.

- Con la forma polar es fácil multiplicar y tomar potencias de números complejos:
  - $\left(r_1 e^{i\theta_1}\right)\left(r_2 e^{i\theta_2}\right) = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1+\theta_2}$.
  - $(1+i)^{10} = \left(\sqrt{2} e^{i\pi/4}\right)^{10} = 2^5 e^{i5\pi/4} = 2^5 e^{-i\pi/4} = 32(1-i)$.
- Otro uso de la forma polar es en las *funciones trigonométricas*, que se define por *la fórmula de Euler*:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

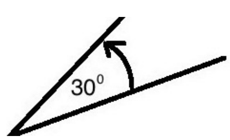
  O sea, para saber cuánto es el coseno de un ángulo θ, se busca en el círculo unitario el punto z tal que $\overline{0z}$ forma un ángulo θ con el eje de x positivo, y la coordenada x de este punto, por definición, es $\cos(\theta)$. De manera similar se define a $\mathrm{sen}(\theta)$ como la coordenada y. Para ángulos θ entre 0 y 90 grados esta definición coincide con la definición usual de la secundaria, sin =co/hip, cos =ca/hip. Ver ejemplos en el problema 3 abajo.
- Para algunos ángulos, se puede calculo su seno y coseno con poca geometría y el Teorema de Pitágoras:

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$
30^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
60^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

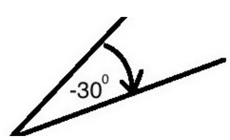
Problemas

1. Convertir de grados a radianes y dibujar el ángulo correspondiente.

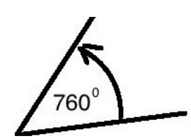
   Ejemplos:



$30^0 = \pi/6 \approx 0.52$ rad



$-30^0 = -\pi/6 \approx -0.52$ rad



$760^0 = 760\frac{\pi}{180} = \frac{38\pi}{8} \approx 13.3$ rad

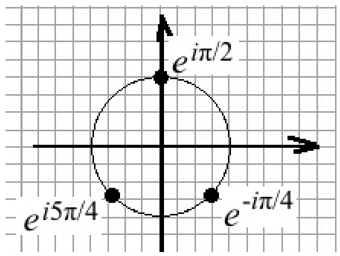
   (a) 90^0 (b) -120^0 (c) 1^0 (d) -45^0 (e) 180^0 (f) -1800^0

2. Convertir de radianes a grados y dibujar el ángulo correspondiente:

   (a) π (b) $-\pi/180$ (c) 30π (d) $\pi/12$ (e) 0.1

3. Para cada uno de los siguientes ángulos α (dados en radianes), hay que dibujar el punto $e^{i\alpha}$ en el plano complejo, y usar el dibujo para calcular (¡sin calculadora!) el $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$.

   Ejemplos:

   $$\cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1,$$

   $$\cos\frac{5\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

   $$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

   (a) $\pi/2$ (b) $3\pi/2$ (c) $-\pi/2$ (d) $2\pi/3$ (e) 99π (f) 0

4. Encontrar todas las soluciones, reales o complejas, de las siguientes ecuaciones, y marcarlas sobre el plano complejo:

   a) $z^2 + 5 = 0$ *b*) $z^3 + 5z = 0$ *c*) $z^2 + z + 1 = 0$ *d*) $z^3 = 1$

   e) $z^4 = 1$ *f*) $z^2 + 2iz + 1 = 0$ *g*) $z^3 - z^2 + z = 0$

5. *a*) Usa la fórmula de Euler $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$ y la relación $(e^{i\alpha})^2 = e^{i2\alpha}$, para obtener una fórmula que expresa $\cos(2\alpha)$ y $\operatorname{sen}(2\alpha)$ en términos de $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$.

   b) Usa el inciso anterior y la relación $(\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$, para expresar a $\cos(2\alpha)$ solamente en términos de $\cos\alpha$.
   Respuesta: $\cos(2\alpha) = 2(\cos\alpha)^2 - 1$.

   c) Expresa $\cos(3\alpha)$ y $\operatorname{sen}(3\alpha)$ en términos de $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$.

   d) Encontrar $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$ para $\alpha = \frac{\pi}{12}$ (15 grados).

   Sugerencia: usa la fórmula del inciso (b) para expresar $\cos\frac{\pi}{6}$ en términos de $\cos\frac{\pi}{12}$. El valor de $\cos\frac{\pi}{6}$ hemos calculado en la clase (es $\sqrt{3}/2$). Si denotas a $\cos\frac{\pi}{12}$ por x, debes tener ahora una ecuación cuadrática para x, la cual puedes resolver. Ya que enconraste el valor de $\cos\frac{\pi}{12}$, usas la relación $(\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$ para encontrar el valor de $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$