

En economía se estudian conceptos como el ingreso, el costo y la utilidad. Si $R(x)$ es una función del ingreso y $C(x)$ es una función del costo, entonces la función de la utilidad, $P(x)$, es

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

donde x es el número de artículos fabricados y vendidos por una compañía. Usaremos esta información en el ejemplo 10.

EJEMPLO 10 ▶ Botes de vela La compañía de botes de vela Don Perrione fabrica y vende al menos seis botes cada semana.

Suponga que
$$R(x) = \frac{6x - 7}{x + 2} \quad \text{y} \quad C(x) = \frac{4x - 13}{x + 3}$$

donde x es el número de botes de vela vendidos. Determine la función de la utilidad.

Solución Entienda el problema y traduzca Para determinar la función de la utilidad, restamos la función del costo de la función del ingreso.

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ P(x) &= \frac{6x - 7}{x + 2} - \frac{4x - 13}{x + 3} \end{aligned}$$

El MCD es $(x + 2)(x + 3)$.

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} &= \frac{x + 3}{x + 3} \cdot \frac{6x - 7}{x + 2} - \frac{4x - 13}{x + 3} \cdot \frac{x + 2}{x + 2} && \text{Multiplicar para obtener el MCD.} \\ &= \frac{6x^2 + 11x - 21}{(x + 3)(x + 2)} - \frac{4x^2 - 5x - 26}{(x + 3)(x + 2)} && \text{Multiplicar los numeradores.} \\ &= \frac{(6x^2 + 11x - 21) - (4x^2 - 5x - 26)}{(x + 3)(x + 2)} && \text{Restar los numeradores.} \\ &= \frac{6x^2 + 11x - 21 - 4x^2 + 5x + 26}{(x + 3)(x + 2)} \\ &= \frac{2x^2 + 16x + 5}{(x + 3)(x + 2)} && \text{Reducir términos semejantes.} \end{aligned}$$

Responda La función de utilidad es $P(x) = \frac{2x^2 + 16x + 5}{(x + 3)(x + 2)}$.

▶ Ahora resuelva el ejercicio 81

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.2



Ejercicios de concepto/redacción

1. a) ¿Qué es el mínimo común denominador de dos o más expresiones racionales?
- b) Explique cómo determinar el MCD.
- c) Por medio del procedimiento que indicó en la parte b), determine el MCD de

$$\frac{5}{64x^2 - 121} \quad \text{y} \quad \frac{1}{8x^2 - 27x + 22}$$

2. a) Explique cómo sumar o restar dos expresiones racionales.
- b) Sume $\frac{4}{x + 2} + \frac{x}{3x^2 - 4x - 20}$ siguiendo el procedimiento que indicó en la parte a).

En los ejercicios 3 y 4, a) explique por qué la resta no es correcta, y b) realice la resta correcta.

$$3. \quad \frac{x^2 - 4x}{(x + 3)(x - 2)} - \frac{x^2 + x - 2}{(x + 3)(x - 2)} \neq \frac{x^2 - 4x - x^2 + x - 2}{(x + 3)(x - 2)}$$

$$4. \quad \frac{x - 5}{(x + 4)(x - 3)} - \frac{x^2 - 6x + 5}{(x + 4)(x - 3)} \neq \frac{x - 5 - x^2 - 6x + 5}{(x + 4)(x - 3)}$$

Práctica de habilidades

Sume o reste.

5. $\frac{3x}{x+2} + \frac{5}{x+2}$

7. $\frac{7x}{x-5} - \frac{2}{x-5}$

9. $\frac{x}{x+3} + \frac{9}{x+3} - \frac{2}{x+3}$

11. $\frac{5x-6}{x-8} + \frac{2x-5}{x-8}$

13. $\frac{x^2-2}{x^2+6x-7} - \frac{-4x+19}{x^2+6x-7}$

15. $\frac{x^3-12x^2+45x}{x(x-8)} - \frac{x^2+5x}{x(x-8)}$

17. $\frac{3x^2-x}{2x^2-x-21} + \frac{2x-8}{2x^2-x-21} - \frac{x^2-2x+27}{2x^2-x-21}$

6. $\frac{3x}{x+4} + \frac{12}{x+4}$

8. $\frac{10x}{x-6} - \frac{60}{x-6}$

10. $\frac{2x}{x+7} + \frac{17}{x+7} - \frac{3}{x+7}$

12. $\frac{-4x+6}{x^2+x-6} + \frac{5x-3}{x^2+x-6}$

14. $\frac{-x^2}{x^2+5xy-14y^2} + \frac{x^2+xy-2y^2}{x^2+5xy-14y^2}$

16. $\frac{3r^2+15r}{r^3+2r^2-8r} + \frac{2r^2+5r}{r^3+2r^2-8r}$

18. $\frac{2x^2+9x-15}{2x^2-13x+20} - \frac{3x+10}{2x^2-13x+20} - \frac{3x-5}{2x^2-13x+20}$

Determine el mínimo común denominador.

19. $\frac{5}{2a^2} + \frac{9}{3a^3}$

22. $\frac{x+12}{16x^2y} - \frac{x^2}{3x^3}$

25. $\frac{4x}{x+3} + \frac{6}{x+9}$

28. $\frac{b^2+3}{18b} - \frac{b-7}{12(b+8)}$

31. $\frac{a-2}{a^2-5a-24} + \frac{3}{a^2+11a+24}$

33. $\frac{x}{2x^2-7x+3} + \frac{x-3}{4x^2+4x-3} - \frac{x^2+1}{2x^2-3x-9}$

20. $\frac{1}{9x^2} - \frac{8}{6x^5}$

23. $\frac{2}{3a^4b^2} + \frac{7}{2a^3b^5}$

26. $\frac{4}{(r-7)(r+2)} - \frac{r+8}{r-7}$

29. $\frac{x}{x^4(x-2)} - \frac{x+9}{x^2(x-2)^3}$

21. $\frac{-4}{8x^2y^2} + \frac{7}{5x^4y^6}$

24. $\frac{1}{x-1} - \frac{x}{x-3}$

27. $5z^2 + \frac{9z}{z-6}$

30. $\frac{x+2}{(x-3)^3(x+4)^2} + \frac{x-7}{(x+4)^4(x-9)}$

32. $\frac{3x-5}{6x^2+13xy+6y^2} + \frac{3}{3x^2+5xy+2y^2}$

34. $\frac{3}{x^2+3x-4} - \frac{4}{4x^2+5x-9} + \frac{x+2}{4x^2+25x+36}$

Sume o reste.

35. $\frac{2}{3r} + \frac{8}{r}$

38. $\frac{5x}{4y} + \frac{7}{6xy}$

41. $\frac{b}{a-b} - \frac{a+b}{b}$

44. $\frac{9}{b-2} + \frac{3b}{2-b}$

47. $\frac{3}{a+2} + \frac{3a+1}{a^2+4a+4}$

49. $\frac{x}{x^2+2x-8} + \frac{x+1}{x^2-3x+2}$

51. $\frac{5x}{x^2-9x+8} - \frac{3(x+2)}{x^2-6x-16}$

53. $4 - \frac{x-1}{x^2+3x-10}$

55. $\frac{3a+2}{4a+1} - \frac{3a+6}{4a^2+9a+2}$

57. $\frac{x-y}{x^2-4xy+4y^2} + \frac{x-3y}{x^2-4y^2}$

59. $\frac{2r}{r-4} - \frac{2r}{r+4} + \frac{64}{r^2-16}$

36. $\frac{9}{x^2} + \frac{3}{2x}$

39. $\frac{3}{8x^4y} + \frac{1}{5x^2y^3}$

42. $\frac{4x}{3xy} + 11$

45. $\frac{4x}{x-4} + \frac{x+3}{x+1}$

37. $\frac{5}{12x} - \frac{1}{4x^2}$

40. $\frac{7}{4xy^3} + \frac{1}{6x^2y}$

43. $\frac{a}{a-b} - \frac{a}{b-a}$

46. $\frac{x}{x^2-9} - \frac{4(x-3)}{x+3}$

48. $\frac{2m+9}{m-5} - \frac{4}{m^2-3m-10}$

50. $\frac{-x^2+5x}{(x-5)^2} + \frac{x+8}{x-5}$

52. $\frac{2}{(2p-3)(p+4)} - \frac{3}{(p+4)(p-4)}$

54. $\frac{3x}{2x-3} + \frac{3x+6}{2x^2+x-6}$

56. $\frac{7}{3q^2+q-4} + \frac{9q+2}{3q^2-2q-8}$

58. $\frac{x+2y}{x^2-xy-2y^2} - \frac{y}{x^2-3xy+2y^2}$

60. $\frac{4}{p+1} + \frac{3}{p-1} + \frac{p+4}{p^2-1}$

61. $\frac{-4}{x^2 + 2x - 3} - \frac{1}{x + 3} + \frac{1}{x - 1}$

63. $\frac{3}{3x - 2} - \frac{1}{x - 4} + 5$

65. $2 - \frac{1}{8r^2 + 2r - 15} + \frac{r + 2}{4r - 5}$

67. $\frac{3}{5x + 6} + \frac{x^2 - x}{5x^2 - 4x - 12} - \frac{4}{x - 2}$

69. $\frac{3m}{6m^2 + 13mn + 6n^2} + \frac{2m}{4m^2 + 8mn + 3n^2}$

71. $\frac{5r - 2s}{25r^2 - 4s^2} - \frac{2r - s}{10r^2 - rs - 2s^2}$

73. $\frac{2}{2x + 3y} - \frac{4x^2 - 6xy + 9y^2}{8x^3 + 27y^3}$

62. $\frac{2}{x^2 - 16} + \frac{x + 1}{x^2 + 8x + 16} + \frac{3}{x - 4}$

64. $\frac{x}{3x + 4} + \frac{3x + 2}{x - 5} - \frac{7x^2 + 24x + 28}{3x^2 - 11x - 20}$

66. $\frac{x}{x^2 - 10x + 24} - \frac{3}{x - 6} + 1$

68. $\frac{3}{x^2 - 13x + 36} + \frac{4}{2x^2 - 7x - 4} + \frac{1}{2x^2 - 17x - 9}$

70. $\frac{(x - y)^2}{x^3 - y^3} + \frac{2}{x^2 + xy + y^2}$

72. $\frac{6}{(2r - 1)^2} + \frac{2}{2r - 1} - 3$

74. $\frac{4}{4x - 5y} - \frac{3x^2 + 2y^2}{64x^3 - 125y^3}$

Resolución de problemas

75. Cuando dos expresiones racionales se suman o restan, ¿sus numeradores deben factorizarse? Explique.

76. ¿Las expresiones $\frac{x - 3}{4 - x}y - \frac{x - 3}{x - 4}$ son equivalentes? Explique.

77. ¿Las expresiones $\frac{8 - x}{3 - x}y \frac{x - 8}{x - 3}$ son equivalentes? Explique.

78. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones racionales, ¿ $(f + g)(x)$ siempre será una función racional?

79. Si $f(x) = \frac{x + 2}{x - 3}$ y $g(x) = \frac{x}{x + 4}$, determine

- a) el dominio de $f(x)$.
- b) el dominio de $g(x)$.
- c) $(f + g)(x)$.
- d) el dominio de $(f + g)(x)$.

80. Si $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 9}$ y $g(x) = \frac{x}{x - 3}$, determine

- a) el dominio de $f(x)$.
- b) el dominio de $g(x)$.
- c) $(f + g)(x)$.
- d) el dominio de $(f + g)(x)$.

Utilidad En los ejercicios 81 a 84, determine la función de la utilidad, $P(x)$. (Vea el ejemplo 10.)

81. $R(x) = \frac{4x - 5}{x + 1}$ y $C(x) = \frac{2x - 7}{x + 2}$

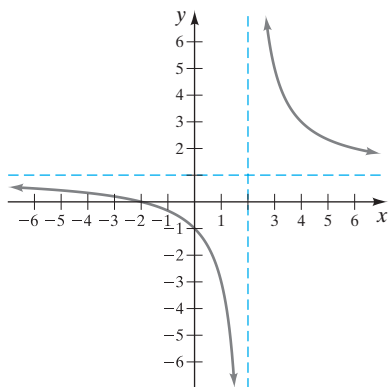
82. $R(x) = \frac{5x - 2}{x + 2}$ y $C(x) = \frac{3x - 4}{x + 1}$

83. $R(x) = \frac{8x - 3}{x + 2}$ y $C(x) = \frac{5x - 8}{x + 3}$

84. $R(x) = \frac{7x - 10}{x + 3}$ y $C(x) = \frac{5x - 8}{x + 4}$

En las figuras siguientes, las líneas punteadas de color rojo se denominan **asíntotas**. Las asíntotas no son parte de la gráfica pero se utilizan para mostrar valores a los que ésta se aproxima, pero no toca. En los ejercicios 85 y 86, determine el dominio y el rango de la función racional que se muestra.

85.



86.

