Realice los cálculos

$$0 = -16t^2 + 30t + 60$$
$$a = -16, \qquad b = 30, \qquad c = 60$$
$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-30 \pm \sqrt{(30)^2 - 4(-16)(60)}}{2(-16)}$$
$$= \frac{-30 \pm \sqrt{4740}}{-32}$$
$$t = \frac{-30 + \sqrt{4740}}{-32} \approx -1.2 \qquad \text{o} \qquad t = \frac{-30 - \sqrt{4740}}{-32} \approx 3.1$$

Responda Como el tiempo no puede ser negativo, la única solución razonable es 3.1 segundos. Por lo tanto, la pelota golpea el piso alrededor de 3.1 segundos después de su lanzamiento.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 103

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.2

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Escriba la fórmula cuadrática. (Debe memorizarla).
2. Para resolver la ecuación $3x + 2x^2 - 9 = 0$ mediante la fórmula cuadrática, ¿cuáles son los valores de *a, b* y *c*?
3. Para resolver la ecuación $6x - 3x^2 + 8 = 0$ mediante la fórmula cuadrática, ¿cuáles son los valores de *a, b* y *c*?
4. Para resolver la ecuación $4x^2 - 5x = 7$ mediante la fórmula cuadrática, ¿cuáles son los valores de *a, b* y *c*?
5. Considere las dos ecuaciones $-6x^2 + \frac{1}{2}x - 5 = 0$ y $6x^2 - \frac{1}{2}x + 5 = 0$. ¿Sus soluciones deben ser iguales? Explique su respuesta.
6. Considere $12x^2 - 15x - 6 = 0$ y $3(4x^2 - 5x - 2) = 0$.
   a) ¿Serán iguales las soluciones para las dos ecuaciones? Explique.
   b) Resuelva $12x^2 - 15x - 6 = 0$.
   c) Resuelva $3(4x^2 - 5x - 2) = 0$.
7. a) Explique cómo determinar el discriminante.
   b) ¿Cuál es el discriminante de la ecuación $3x^2 - 6x + 10 = 0$?
   c) Escriba uno o dos párrafos donde explique la relación entre el valor del discriminante y el número de soluciones reales para una ecuación cuadrática. Aclare *por qué* el valor del discriminante ayuda a establecer el número de soluciones reales.
8. Escriba uno o dos párrafos para explicar la relación entre el valor del discriminante y el número de intersecciones con el eje *x* de $f(x) = ax^2 + bx + c$. Explique también cuándo la función tendrá 0, 1 y 2 intersecciones con el eje *x*.

Práctica de habilidades

Utilice el discriminante para determinar si cada una de las siguientes ecuaciones tiene dos soluciones reales distintas, una sola solución real o ninguna solución real.

9. $x^2 + 3x + 1 = 0$
10. $2x^2 + x + 3 = 0$
11. $4z^2 + 6z + 5 = 0$
12. $-a^2 + 3a - 6 = 0$
13. $5p^2 + 3p - 7 = 0$
14. $2x^2 = 16x - 32$
15. $-5x^2 + 5x - 8 = 0$
16. $4.1x^2 - 3.1x - 2.8 = 0$
17. $x^2 + 10.2x + 26.01 = 0$
18. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x + 10 = 0$
19. $b^2 = -3b - \frac{9}{4}$
20. $\frac{x^2}{3} = \frac{2x}{7}$

Resuelva cada ecuación mediante la fórmula cuadrática.

21. $x^2 - 9x + 18 = 0$
22. $x^2 + 9x + 18 = 0$
23. $a^2 - 6a + 8 = 0$
24. $a^2 + 6a + 8 = 0$
25. $x^2 = -6x + 7$
26. $-a^2 - 9a + 10 = 0$
27. $-b^2 = 4b - 20$
28. $a^2 - 16 = 0$
29. $b^2 - 64 = 0$
30. $2x^2 = 4x + 1$
31. $3w^2 - 4w + 5 = 0$
32. $x^2 - 6x = 0$

33. $c^2 - 5c = 0$

34. $-t^2 - t - 1 = 0$

35. $4s^2 - 8s + 6 = 0$

36. $-3r^2 = 9r + 6$

37. $a^2 + 2a + 1 = 0$

38. $y^2 + 16y + 64 = 0$

39. $16x^2 - 8x + 1 = 0$

40. $100m^2 + 20m + 1 = 0$

41. $x^2 - 2x - 1 = 0$

42. $2 - 3r^2 = -4r$

43. $-n^2 = 3n + 6$

44. $-9d - 3d^2 = 5$

45. $2x^2 + 5x - 3 = 0$

46. $(r - 3)(3r + 4) = -10$

47. $(2a + 3)(3a - 1) = 2$

48. $6x^2 = 21x + 27$

49. $\frac{1}{2}t^2 + t - 12 = 0$

50. $\frac{2}{3}x^2 = 8x - 18$

51. $9r^2 + 3r - 2 = 0$

52. $2x^2 - 4x - 2 = 0$

53. $\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{2}{3} = 0$

54. $x^2 - \frac{11}{3}x = \frac{10}{3}$

55. $a^2 - \frac{a}{5} - \frac{1}{3} = 0$

56. $b^2 = -\frac{b}{2} + \frac{2}{3}$

57. $c = \frac{c - 6}{4 - c}$

58. $3y = \frac{5y + 6}{2y + 3}$

59. $2x^2 - 4x + 5 = 0$

60. $3a^2 - 4a = -5$

61. $y^2 + \frac{y}{2} = -\frac{3}{2}$

62. $2b^2 - \frac{7}{3}b + \frac{4}{3} = 0$

63. $0.1x^2 + 0.6x - 1.2 = 0$

64. $2.3x^2 - 5.6x - 0.4 = 0$

Determine todos los valores reales de la variable para los que cada función tiene el valor indicado.

65. $f(x) = x^2 - 2x + 5, f(x) = 5$

66. $g(x) = x^2 + 3x + 8, g(x) = 8$

67. $k(x) = x^2 - x - 15, k(x) = 15$

68. $p(r) = r^2 + 17r + 81, p(r) = 9$

69. $h(t) = 2t^2 - 7t + 6, h(t) = 2$

70. $t(x) = x^2 + 5x - 4, t(x) = 3$

71. $g(a) = 2a^2 - 3a + 16, g(a) = 14$

72. $h(x) = 6x^2 + 3x + 1, h(x) = -7$

Determine una función que tenga las soluciones dadas.

73. $2, 5$

74. $-3, 4$

75. $1, -9$

76. $-2, -6$

77. $-\frac{3}{5}, \frac{2}{3}$

78. $-\frac{1}{3}, -\frac{3}{4}$

79. $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$

80. $\sqrt{5}, -\sqrt{5}$

81. $3i, -3i$

82. $8i, -8i$

83. $3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}$

84. $5 - \sqrt{3}, 5 + \sqrt{3}$

85. $2 + 3i, 2 - 3i$

86. $5 - 4i, 5 + 4i$

Resolución de problemas

En los ejercicios 87 a 90, **a)** *plantee una función de ingreso, $R(n)$, que pueda usarse para resolver el problema, y* **b)** *resuelva el problema. Vea el ejemplo 8.*

87. Venta de lámparas Un negocio vende n lámparas, $n \leq 65$, a un precio de $(10 - 0.02n)$ dólares cada una. ¿Cuántas lámparas deben venderse para obtener un ingreso de \$450?

88. Venta de pilas Un negocio vende n pilas, $n \leq 26$, a un precio de $(25 - 0.1n)$ dólares cada una. ¿Cuántas pilas deben venderse para obtener un ingreso de \$460?

89. Venta de sillas Un negocio vende n sillas, $n \leq 50$, a un precio de $(50 - 0.4n)$ dólares cada una. ¿Cuántas sillas deben venderse para obtener un ingreso de \$660?

90. Venta de relojes Un negocio vende n relojes, $n \leq 75$, a un precio de $(30 - 0.15n)$ dólares cada uno. ¿Cuántos relojes deben venderse para obtener un ingreso de \$1260 dólares?

91. Proporcione su propio ejemplo de una ecuación cuadrática que pueda resolverse mediante la fórmula cuadrática, pero no por medio de factorización sobre el conjunto de enteros.

92. ¿Existen ecuaciones cuadráticas que **a)** puedan resolverse mediante la fórmula cuadrática, pero que no se puedan resolver completando el cuadrado; **b)** puedan resolverse completando el cuadrado pero no factorizando sobre el conjunto de enteros?

93. Al resolver una ecuación cuadrática mediante la fórmula cuadrática, si el discriminante es un cuadrado perfecto, ¿la ecuación debe ser factorizable sobre el conjunto de los enteros?

94. Al resolver una ecuación mediante la fórmula cuadrática, si el discriminante es un número natural, ¿la ecuación debe ser factorizable sobre el conjunto de los enteros?

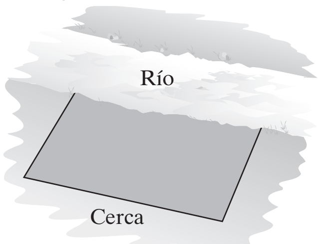
En los ejercicios 95 a 102, utilice una calculadora cuando sea necesario para dar la solución en forma decimal. Redondee los números irracionales al centésimo más cercano.

95. **Números** El doble del cuadrado de un número positivo aumentado en tres veces el número original es igual a 27. Determine el número.

96. **Números** El triple del cuadrado de un número positivo menos el doble del mismo número es igual a 21. Determine el número.

97. **Jardín rectangular** El largo de un jardín rectangular es 1 pie menor que el triple de su ancho. Si el área del jardín es de 24 pies cuadrados, determine el largo y el ancho.

98. **Área rectangular** Lora Wallman desea cercar un área rectangular ubicada en la ribera de un río, como se ilustra en el diagrama. Si sólo tiene 400 pies de cerca y desea encerrar un área de 15,000 pies cuadrados, determine las dimensiones del área rectangular.



99. **Fotografía** John Williams, un fotógrafo profesional, tiene una fotografía de 6 por 8 pulgadas, y desea reducir la misma cantidad de cada lado, de modo que la fotografía resultante tenga la mitad del área de la fotografía original. ¿En cuánto debe reducir cada lado?

100. **Jardín rectangular** Bart Simmons tiene un jardín floral de 12 por 9 metros, y quiere construir un camino de grava de ancho uniforme por la parte interior del jardín y a lo largo de cada lado, de modo que el espacio resultante tendrá la mitad del área del jardín original. ¿Qué ancho tendrá el camino de grava?

101. **Cascada** Cuando una gota de agua (u otro objeto) desde la parte superior de las cataratas Lower Falls en el parque nacional de Yellowstone cae a la fosa en la parte inferior, la altura, h, en pies, con respecto del agua en la fosa, puede determinarse mediante la ecuación $h = -16t^2 + 308$. En la ecuación, t es el tiempo, en segundos, a partir de que la gota cae en la cascada. Determine el tiempo que tarda la gota en llegar a la parte inferior de la cascada, en la fosa (cuando $h = 0$).

102. **Cascada** Cuando una gota de agua (u otro objeto) desde la parte superior de las cataratas del Niágara cae a la fosa en la parte inferior, la altura, h, en pies, con respecto del agua en la fosa, puede determinarse mediante la ecuación $h = -16t^2 + 176$. En la ecuación, t es el tiempo, en segundos, a partir de que la gota cae en la cascada. Determine el tiempo que tarda la gota en llegar a la parte inferior de la cascada, en la fosa (cuando $h = 0$).

En los ejercicios 103 y 104, utilice la ecuación $h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$ *(consulte el ejemplo 9).*

103. **Lanzamiento de una herradura** Una herradura se lanza hacia arriba desde una altura inicial de 80 pies con una velocidad inicial de 60 pies por segundo. ¿Cuánto tiempo después de que se lanza hacia arriba

a) estará a 20 pies del suelo?

b) dará contra el suelo?

104. **Gravedad en la Luna** La gravedad en la Luna equivale más o menos a un sexto de la terrestre. Suponga que Neil Armstrong se encuentra en la Luna, parado sobre una colina de 60 pies de altura. Si salta hacia arriba con una velocidad de 40 pies por segundo, ¿cuánto tardará en tocar el suelo que está al pie de la colina?

Resuelva mediante la fórmula cuadrática.

105. $x^2 - \sqrt{5}x - 10 = 0$

106. $x^2 + 5\sqrt{6}x + 36 = 0$

Retos

107. **Calentamiento de un cubo metálico** Un cubo de metal se expande cuando se calienta. Si cada lado aumenta 0.20 milímetros después de que se calienta y el volumen total aumenta 6 milímetros cúbicos, determine la longitud original de cada lado del cubo.

108. **Seis soluciones** La ecuación $x^n = 1$ tiene n soluciones (incluyendo las soluciones complejas). Determine las seis soluciones de $x^6 = 1$. (*Sugerencia:* Reescriba la ecuación como $x^6 - 1 = 0$; luego factorice mediante la fórmula para la diferencia de dos cuadrados.)

109 **Lanzamiento de una piedra** Travis Hawley se encuentra en el cuarto nivel de un edificio de ocho pisos, y Courtney Prenzlow está en el techo. Travis se encuentra a 60 pies de distancia respecto del suelo mientras que Courtney está a 120 pies del suelo.

a) Si Travis deja caer una piedra desde una ventana, determine el tiempo que tardará ésta en chocar contra el suelo.

b) Si Courtney deja caer una piedra desde el techo, determine el tiempo que tardará ésta en chocar contra el suelo.

c) Si Travis lanza una piedra hacia arriba con una velocidad inicial de 100 pies por segundo, y Courtney lanza al mismo tiempo una piedra hacia arriba a 60 pies por segundo, ¿cuál de las piedras dará primero contra el suelo? Explique.

d) ¿En algún instante las piedras estarán a la misma distancia respecto del suelo? Si es así, ¿cuándo?

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.6] **110.** Evalúe $\dfrac{5.55 \times 10^3}{1.11 \times 10^1}$.

[3.2] **111.** Si $f(x) = x^2 + 2x - 8$, determine $f(3)$.

[4.1] **112.** Resuelva este sistema de ecuaciones.

$$3x + 4y = 2$$
$$2x = -5y - 1$$

[6.3] **113.** Simplifique $2x^{-1} - (3y)^{-1}$.

[7.6] **114.** Resuelva $\sqrt{x^2 - 6x - 4} = x$.

8.3 Ecuaciones cuadráticas: aplicaciones y resolución de problemas

1 Resolver problemas de aplicación adicionales.

2 Despejar una variable de una fórmula.

1 Resolver problemas de aplicación adicionales

Ya hemos analizado unos cuantos problemas de aplicación que involucran el uso de ecuaciones cuadráticas. En esta sección exploraremos varios más. También estudiaremos cómo despejar una variable en una fórmula. Empezamos determinando las utilidades de una compañía nueva.

EJEMPLO 1 ▸ **Utilidades de una compañía** Laserox, una compañía que inicia sus operaciones, proyecta que sus utilidades anuales, $p(n)$, en miles de dólares, durante los primeros 6 años de operación, pueden calcularse mediante la función $p(n) = 1.2n^2 + 4n - 8$, en donde n es el número de años en operación.

a) Calcule la utilidad (o pérdida) de la compañía después del primer año.

b) Calcule la utilidad (o pérdida) de la compañía después de 6 años.

c) Calcule el tiempo necesario para que la compañía alcance el punto de equilibrio.

Solución **a)** Para aproximar la utilidad después de 1 año, evaluamos la función en 1.

$$p(n) = 1.2n^2 + 4n - 8$$
$$p(1) = 1.2(1)^2 + 4(1) - 8 = -2.8$$

Así, al final del primer año la compañía proyecta una pérdida de \$2.8 miles, es decir, de \$2800.

b) $p(6) = 1.2(6)^2 + 4(6) - 8 = 59.2$

Por lo tanto, al final del sexto año la utilidad proyectada de la compañía es de \$59.2 miles, es decir, de \$59,200.

c) Entienda el problema La compañía alcanzará el punto de equilibrio cuando la utilidad sea 0. Así, para determinar el punto de equilibrio (ni pérdidas ni ganancias) resolvemos la ecuación

$$1.2n^2 + 4n - 8 = 0$$

Podemos utilizar la fórmula cuadrática para resolver esta ecuación.

Traduzca $\quad a = 1.2, \quad b = 4, \quad c = -8$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1.2)(-8)}}{2(1.2)}$$