Examen Parcial I - soluciones

1. Expresar el resultado de cada operación como una fracción reducida (o número entero).

   a) $0.1 - 1.09 = \frac{10}{100} - \frac{109}{100} = \frac{10-109}{100} = \frac{-99}{100} = -\frac{99}{100}.$

   b) $\frac{2}{0.3} = \frac{2\cdot 10}{0.3\cdot 10} = \frac{20}{3}$

   c) $21 \cdot \frac{\overset{9}{\cancel{99}}}{\underset{7}{\cancel{77}}} = \overset{3}{\cancel{21}} \cdot \frac{9}{\underset{1}{\cancel{7}}} = 3\cdot 9 = 27.$

   d) $27^{-4/3} = 27^{\frac{1}{3}(-4)} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{-4} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^{-4} = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}.$

   e) $\sqrt[5]{3^{15}} = \left(3^{15}\right)^{\frac{1}{5}} = 3^{15\cdot\frac{1}{5}} = 3^3 = 27.$

   f) $\sqrt{0.2}\sqrt{0.8} = \sqrt{0.2\cdot 0.8} = \sqrt{0.16} = 0.4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$

   g) $\frac{6\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{\frac{18}{2}} = 6\sqrt{9} = 5\cdot 3 = 18.$

   h) $x = 0.121212\ldots \Rightarrow 100x = 12.1212\ldots = 12 + x \Rightarrow 99x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}.$

2. Simplificar el número indicado y escribir el resultado en notación decimal.

   a) $17\cdot 10^{-5} = 0.00017$

   b) $\frac{4^{-8}}{2^{-17}} = \frac{\left(2^2\right)^{-8}}{2^{-17}} = \frac{2^{2\cdot(-8)}}{2^{-17}} = \frac{2^{-16}}{2^{-17}} = 2^{-16+17} = 2^1 = 2.$

   c) $\frac{0.00002020}{0.0002} = \frac{2.02\cdot 10^{-5}}{2\cdot 10^{-4}} = 1.01\cdot 10^{-5+4} = 1.01\cdot 10^{-1} = 0.101$

   d) $\sqrt{0.000081} = \sqrt{81\cdot 10^{-6}} = \sqrt{81}\sqrt{10^{-6}} = 9\left(10^{-6}\right)^{\frac{1}{2}} = 9\cdot 10^{(-6)\frac{1}{2}} = 9\cdot 10^{-3} = 0.009$

3. Simplificar cada expresión lo más que puedes. Dar la respuesta sin exponentes negativos o fraccionales. Nota: $x, y > 0$.

   a) $\left(\sqrt[3]{2x}\right)^6 - x^2 = \left((2x)^{\frac{1}{3}}\right)^6 - x^2 = (2x)^{\frac{1}{3}\cdot 6} - x^2 = (2x)^2 - x^2 = 2^2x^2 - x^2 = 4x^2 - x^2 = 3x^2.$

   b) $(1-3\sqrt{x})(1+3\sqrt{x}) = 1^2 - (3\sqrt{x})^2 = 1 - 3^2\left(\sqrt{x}\right)^2 = 1 - 9x.$

   c) $\frac{\sqrt{x}y^{-3/2}\sqrt{5^4}}{x^{3/2}\sqrt{y}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}}(5^4)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}y^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}5^{4\cdot\frac{1}{2}} = x^{-1}y^{-2}5^2 = \frac{25}{xy^2}$

4. Expresar el número indicado en cada inciso en notación científica. Redondear la respuesta a las dos cifras decimales significativas. Por ejemplo, $2.34 \approx 2.3,\ 1.09 \approx 1.1.$

a) 93 mil milliones de años luz (el tamaño del universo) en metros, sabiendo que la velocidad de la luz es 300 mil km por segundo.

Solución.

$93,000,000,000$ años luz en metros $=$
$= 9.3 \cdot 10^{10} \cdot$ (núm. de segundos en 1 año) $\cdot$ (núm. de metros que viaja la luz en 1 segundo)
$= \left(9.3 \cdot 10^{10}\right) \cdot (60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365) \cdot (3 \cdot 10^5 \cdot 10^3)$ m
$= (9.3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2.4 \cdot 3.65 \cdot 3) \cdot 10^{10+1+1+1+2+5+3}$ m $\approx 8800 \cdot 10^{23}$ m
$= 8.8 \cdot 10^3 \cdot 10^{23}$ m $= 8.8 \cdot 10^{23+3}$ m $= 8.8 \cdot 10^{26}$ m

b) 4500 millones de años (la edad de la tierra) en horas.

Solución.

$4,500,000,000$ años en horas $=$
$= 4.5 \cdot 10^9 \cdot$ (núm. de horas en 1 año)
$= 4.5 \cdot 10^9 \cdot (365 \cdot 24)$ hr
$= 4.5 \cdot 10^9 \cdot 3.65 \cdot 10^2 \cdot 2.4 \cdot 10$ hr
$= (4.5 \cdot 3.65 \cdot 2.4) \cdot 10^{9+2+1}$ hr $\approx 39 \cdot 10^{12}$ hr
$= 3.9 \cdot 10 \cdot 10^{12}$ hr $= 3.9 \cdot 10^{12+1}$ hr $= 3.9 \cdot 10^{13}$ hr .

5. Encuentra en cada inciso todos los valores de x que satifacen la condición dada. Si no existe un tal valor, hay que indicarlo. Si la respuesta es todo un rango de valores, hay que indicarlo sobre el eje de los números.

a) $\dfrac{x}{2} = 3(x-4) + 5x$

Solución.

$$\frac{x}{2} = 3(x-4) + 5x = 3x - 12 + 5x = 8x - 12 \qquad / \cdot 2$$

$$x = 2(8x-12) = 16x - 24 \qquad / -x + 24$$

$$24 = 16x - x = 15x$$

$$15x = 24 \qquad / \div 15$$

$$x = \frac{24}{15} = \frac{8}{5}.$$

b) $(2x-1)(3x+1) = 0$

Solución. Un producto (multiplicación) de dos expresiones se anula cuando uno de ellos se anula. Esto es, $2x - 1 = 0$ ó $3x + 1 = 0$. Luego, en el 1er caso $2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$, y en el 2ndo caso $3x + 1 = 0 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$.

Respuesta. La ecuación tiene dos soluciones: $x = 1/2$ y $x = -1/3$.

c) $x^2 > 4$

Solución. $x^2 > 4 \Rightarrow x^2 - 4 > 0 \Rightarrow (x+2)(x-2) > 0$. Luego, el producto de dos expresiones es positivo cuando los dos tienen el mismo signo (positivo o negativo). En el 1er caso, $x + 2 > 0,\ x - 2 > 0$ implica $x > -2,\ x > 2$, y esto sucede cuando $x > 2$. En el 2ndo caso, $x + 2 < 0,\ x - 2 < 0$ implica $x < -2,\ x < 2$, y esto sucede cuando $x < -2$.

Respuesta. Todos los $x > 2$ y todos los $x < -2$.