Examen Parcial I (1era vuelta) - soluciones

1. Expresar el resultado de cada operación como una fracción reducida (o número entero).

   a) $0.01 - 2 = \frac{1}{100} - \frac{200}{100} = \frac{1-200}{100} = \boxed{-\frac{199}{100}}.$

   b) $0.04/0.0002 = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot 10^{-2}}{\cancel{2} \cdot 10^{-4}} = 2 \cdot 10^{-2+4} = 2 \cdot 10^2 = \boxed{200}.$

   c) $0.02^{-2} = \left(2 \cdot 10^{-2}\right)^{-2} = 2^{-2} \cdot \left(10^{-2}\right)^{-2} = \frac{1}{2^2} \cdot 10^{(-2)\cdot(-2)} = \frac{1}{4} \cdot 10^4 = \frac{10000}{4} = \boxed{2500}.$

   d) $402 \cdot \left(\frac{17}{603} - \frac{7}{804}\right) = \frac{\overset{2}{\cancel{402}} \cdot 17}{\underset{3}{\cancel{603}}} - \frac{\cancel{402} \cdot 7}{\underset{2}{\cancel{804}}} = \frac{34}{3} - \frac{7}{2} = \frac{34 \cdot 2 - 3 \cdot 7}{3 \cdot 2} = \frac{68-21}{6} = \boxed{\frac{47}{6}}.$

   e) $5 - \frac{3}{35} = \frac{5 \cdot 35}{35} - \frac{3}{35} = \frac{5 \cdot 35 - 3}{35} = \frac{175-3}{35} = \boxed{\frac{172}{35}.}$

   f) $\cancel{321} \cdot \frac{373}{\underset{3}{\cancel{963}}} = \boxed{\frac{373}{3}.}$

   g) $\sqrt{0.0064} = \left(64 \cdot 10^{-4}\right)^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1}{2}} \left(10^{-4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} \cdot 10^{(-4)\cdot\frac{1}{2}} = 8 \cdot 10^{-2} = \frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{25}{\cancel{100}}} = \boxed{\frac{2}{25}.}$

   h) $\sqrt{2}\sqrt{18} = 2^{\frac{1}{2}} 18^{\frac{1}{2}} = (2 \cdot 18)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = \boxed{6}.$

   i) * (Opcional) $a^3 - \frac{1}{a^3}$, sabiendo que $a - \frac{1}{a} = 2$.

   Solucion. $a - \frac{1}{a} = 2 \Rightarrow \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 = a^3 - 3a + \frac{3}{a} - \frac{1}{a^3} = 8 \Rightarrow a^3 - \frac{1}{a^3} = 8 + 3\left(a - \frac{1}{a}\right) = 8 + 3 \cdot 2 = \boxed{14}.$

2. Expresar el número indicado en notación científica, redondeando a los dos dígitos significativos más cercanos.

   a) $0.000003141519 = 3.141519 \cdot 10^{-6} \approx \boxed{3.1 \cdot 10^{-6}.}$

   b) $0.01/0.000002 = \frac{10^{-2}}{2 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2+6} = 0.5 \cdot 10^4 = 5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^4 = 5 \cdot 10^{-1+4} = \boxed{5 \cdot 10^3.}$

   c) $314 \cdot 10^{-7} = 3.14 \cdot 10^2 \cdot 10^{-7} = 3.14 \cdot 10^{2-7} = 3.14 \cdot 10^{-5} \approx \boxed{3.1 \cdot 10^{-5}.}$

   d) $31415 \cdot 10^{10} \approx 3.1 \cdot 10^4 \cdot 10^{10} = 3.1 \cdot 10^{4+10} = \boxed{3.1 \cdot 10^{14}.}$

e) $\sqrt{160 \cdot 10^{-21}} = \left(160 \cdot 10^{-21}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(16 \cdot 10 \cdot 10^{-21}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(16 \cdot 10^{-21+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(16 \cdot 10^{-20}\right)^{\frac{1}{2}} =$
$= 16^{\frac{1}{2}} \cdot \left(10^{-20}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} \cdot 10^{(-20)\cdot\frac{1}{2}} = \boxed{4 \cdot 10^{-10}.}$

f) $(0.00000002)^2 = \left(2 \cdot 10^{-8}\right)^2 = 2^2 \cdot \left(10^{-8}\right)^2 = 4 \cdot 10^{(-8)\cdot 2} = \boxed{4 \cdot 10^{-16}.}$

g) La masa del sol en kg, sabiendo que es una esfera con radio $R = 7 \cdot 10^5$ km, que el volume de una esfera de radio R es $4\pi R^3/3$, y que la densidad del sol (en promedio) es 1.4 veces más que la del agua. (Nota: la densidad del agua es 1 kg/litro, 1 litro = 1000 cm^3, $\pi \approx 3.14$).

Solucion. Primero, calculamos el volumen del sol en km^3 (kilómetros cúbicos).

$$V_{\text{sol}} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi\left(7 \cdot 10^5\right)^3}{3} = \frac{4\pi\ 7^3 \left(10^5\right)^3}{3} = \frac{4\pi\ 7^3 \cdot 10^{5\cdot 3}}{3} = \frac{4 \cdot 7^3 \pi}{3} \cdot 10^{15}\ \text{km}^3.$$

Ahora convertimos esto a litros. Para eso, calculamos 1 km^3 en cm^3. Primero, km en cm:

$$\text{km} = 10^3\ \text{m} = 10^3 \cdot 10^2\ \text{cm} = 10^{3+2}\ \text{cm} = 10^5\ \text{cm}.$$

Luego, km^3 en cm^3:

$$\text{km}^3 = \left(10^5\ \text{cm}\right)^3 = \left(10^5\right)^3\ \text{cm}^3 = 10^{5\cdot 3}\ \text{cm}^3 = 10^{15}\ \text{cm}^3.$$

Ahora recordamos que 1 litro son 10^3 cm^3, así que

$$\text{km}^3 = \frac{10^{15}}{10^3}\ \text{litros} = 10^{15-3} = 10^{12}\ \text{lit}.$$

Ahora podemos convertir el volumen del sol a litros

$$V_{\text{sol}} = \frac{4 \cdot 7^3\pi}{3} \cdot 10^{15}\ \text{km}^3 = \frac{4 \cdot 7^3\pi}{3} \cdot 10^{15} \cdot 10^{12}\ \text{lit} = \frac{4 \cdot 7^3\pi}{3} \cdot 10^{27}\ \text{lit}.$$

Ahora calculamos la masa del sol en kg:

$$M_{\text{sol}} = \text{ (densidad en kg/lit)}\cdot\text{(volumen en litros)} = 1.4 \cdot \frac{4 \cdot 7^3\pi}{3} \cdot 10^{27} \approx 2.0 \cdot 10^3 \cdot 10^{27} = \boxed{2.0 \cdot 10^{30}\ \text{kg.}}$$

3. Simplificar lo más que puedes. Dar la respuesta con exponentes naturales o raices (sin exponentes negativos o fraccionarios).

a) $10/\sqrt{10} = \dfrac{10^1}{10^{\frac{1}{2}}} = 10^{1-\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{2}} = \boxed{\sqrt{10}}.$

b) $\left(2 + \sqrt{2}\right)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 = 4 + 4\sqrt{2} + 2 = \boxed{6 + 4\sqrt{2}.}$

c) $\dfrac{x^3 y^{-5/2} 8\sqrt{3^4}}{27x^{-3}\sqrt{y}} = \dfrac{x^3}{x^{-3}} \cdot \dfrac{y^{-5/2}}{y^{1/2}} \cdot \dfrac{8\left(3^4\right)^{\frac{1}{2}}}{27} = x^{3-(-3)} \cdot y^{-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{8 \cdot 3^{4\cdot\frac{1}{2}}}{3^3} = x^6 \cdot y^{-3} \cdot \dfrac{8 \cdot 3^2}{3^3} = \boxed{\dfrac{8x^6}{3y^3}.}$

4. Encuentra en cada inciso todos los valores de x que satifacen la condición dada. Si no existe un tal valor, hay que indicarlo. Si la respuesta es todo un rango de valores, hay que indicarlo sobre el eje de los números.

a) $4x = 3(x-2) + x$
$4x = 3x - 6 + x = 4x - 6 \qquad / \ -4x$
$0 = -6.$
Esta es una constradicción, así que la ecuación original no tiene soluciones.

b) $(x-2)/3 + (x-4)/5 = 6 \qquad / \ \cdot 15$

$$\frac{\cancelto{5}{15}(x-2)}{\cancel{3}} + \frac{\cancelto{3}{15}(x-4)}{\cancel{5}} = 6 \cdot 15$$

$5(x-2) + 3(x-4) = 6 \cdot 15$

$5x - 10 + 3x - 12 = 6 \cdot 15$

$8x - 22 = 6 \cdot 15 \qquad / \ +22$

$8x = 6 \cdot 15 + 22 \qquad / \ \div 8$

$$x = \frac{\cancelto{3}{6} \cdot 15 + \cancelto{11}{22}}{\underset{4}{\cancel{8}}} = \frac{3 \cdot 15 + 11}{4} = \frac{45 + 11}{4} = \frac{56}{4} = 14.$$

$\Rightarrow \boxed{x = 14}$

c) $(2x-3)^2(3x-4)^3 = 0$

Esta ecuación se cumple si y solo si uno de los factores se anula: (a) $2x - 3 = 0$, o (b) $3x - 4 = 0$. La solución del caso (a) es $x = 3/2$, la del caso (b) es $x = 4/3$. Así que la ecuación original tiene dos soluciones: $\boxed{x = 3/2 \text{ y } x = 4/3.}$

d) $x^2 < 4 \qquad / \ -4$

$x^2 - 4 < 0$

$(x-2)(x+2) < 0.$

Esta desigualdad se cumple si se cumple uno de los dos casos: (a) $x - 2 > 0$ y $x + 2 < 0$, o (b) $x - 2 < 0$ y $x + 2 > 0$. Estos dos casos equivalen a (a) $x > 2$ y $x < -2$, o (b) $x < 2$ y $x > -2$. El caso (a) es imposible cumplir (x no puede ser > 2 y < -2 al mismo tiempo). Nos quedamos con el caso (b). Esto se cumple para todos los números en el intervalo $(-2, 2)$. Es decir, $\boxed{-2 < x < 2}$.

5. * (Opcional) Pepito corta el pasto en 2 horas. Carlitos lo corta en 3 horas. Trabajando juntos, ¿en cuánto tiempo lo cortan?

Solución. En 1 hora Pepito corta la mitad del pasto y Carlitos el tercio. Juntos, cortan $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ del pasto en 1 hora. Así que después de trabajar 1 hora les falta todavía cortar $1/6$ del pasto. Esto les tomas $1/5$ de hora (ya que en 1 hora cortan $5/6$ del pasto), que son $60/5 = 12$ minutos. En total: les toma $\boxed{\text{1 hora y 12 minutos}}$ cortar el pasto.