

Resumen de reglas de operaciones con números y manipulación de fracciones

1. *Multiplicación.* El símbolo \times casi no se usa para la multiplicación (se confunde con la letra x). Se usa en su lugar un punto \cdot , o a veces nada (si no causa confusión). Por ejemplo, escribimos $2 \cdot 3 = 6$ (en lugar de $2 \times 3 = 6$), $2(3 + 5) = 2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 8 = 16$.
2. *División.* Se denota por a/b , $\frac{a}{b}$, $a \div b$ (el último se usa muy poco). Cada notación tiene su ventaja:

$$(2 - 1/2)/(1 - 1/3) = (2 - 1/2) \div (1 - 1/3) = \frac{2 - 1/2}{1 - 1/3} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}}$$

3. *Resta y negativo.* El símbolo $-$ se usa para dos cosas distintas: para la operación de la *resta* de dos números, como en $7 - 3 = 4$; y también se usa para la operación de tomar el *negativo* de un número, como en $-(2 - 3) = -(-1) = 1$. Para evitar confusión, utilizamos paréntesis para indicar el último uso, como en $2 \cdot (-3) = -6$ (y no $2 \cdot -3 = 6$). A veces, si no hay confusión, omitimos los paréntesis, $(-2) + 3 = -2 + 3$.
4. *Conmutatividad de adición y multiplicación:*

$$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a.$$

Por ejemplo, $3 + 5 = 5 + 3 = 8$, $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 = 15$.

Claramente, la resta y la división *no* conmutan: $5 - 3 = 2$, $3 - 5 = -2$, $4/2 = 2$, $2/4 = 1/2$.

5. *La ley distributiva* (“quitar paréntesis”)

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad \frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

(en la segunda fórmula $c \neq 0$).

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 2(3 + 5) &= 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 6 + 10 = 16, \\ (18 - 27)/3 &= 18/3 - 27/3 = 6 - 9 = -3. \end{aligned}$$

Ojo: también es importante saber cuál ley *no* es correcta. Por ejemplo,

$$(6 + 4)/2 \neq 6 + 4/2, \quad -(3 + 4) \neq -3 + 4, \quad 3 \cdot (4 + 5) \neq (3 \cdot 4) + 5.$$

6. *Orden de las operaciones:* multiplicación y división tienen prioridad sobre suma y resta. Potencia tiene prioridad sobre multiplicación y división.

Por ejemplo,

$$2 + 3 \cdot 2 = 2 + 6 = 8$$

(primero se multiplica, después se suma),

$$9/3 - 10/5 = 3 - 2 = 1$$

(primero se hace las divisiones, después la resta),

$$-3^2 = -9$$

(primero se toma el cuadrado, después se toma el negativo).

Entre suma y resta el orden de las operaciones no importa:

$$2 + 6 - 3 = (2 + 6) - 3 = 2 + (6 - 3) = 5.$$

Entre multiplicaciones tampoco importa el orden:

$$2 \cdot 6 \cdot 3 = (2 \cdot 6) \cdot 3 = 2 \cdot (6 \cdot 3) = 36.$$

Con multiplicación seguida por división tampoco importa el orden:

$$2 \cdot 6/3 = (2 \cdot 6)/3 = 2 \cdot (6/3) = 4.$$

Pero con división seguida por multiplicación sí importa el orden:

$$(8/4) \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4, \quad 8/(4 \cdot 2) = 8/8 = 1.$$

Ojo: en muchos casos, aun si da el mismo resultado, al hacer la cuenta en un orden es más fácil que en el otro. Por ejemplo: cuánto es $12 \cdot 34/17$? Podemos hacerlo así:

$$(12 \cdot 34)/17 = 408/17 = 24,$$

pero es mucho más fácil hacer la división primero:

$$12 \cdot (34/17) = 12 \cdot 2 = 24.$$

¿Cómo saber? Experiencia.

7. Si queremos romper estas reglas de prioridad usamos paréntesis:

$$(2 + 3) \cdot 2 = 5 \cdot 2 = 10, \quad (6/3 - 10)/5 = (2 - 10)/5 = (-8)/5 = -\frac{8}{5}, \quad (-3)^2 = 9.$$

8. Una regla *muy útil* para la manipulación de fracciones es: *al multiplicar o dividir el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número (distinto de 0), no cambia el valor de la fracción* (da una fracción "equivalente"):

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}, \quad \frac{14}{21} = \frac{14/7}{21/7} = \frac{2}{3}, \quad \frac{1.01}{0.1} = \frac{1.01 \cdot 10}{0.1 \cdot 10} = \frac{10.1}{1} = 10.1$$

Usando esta regla, se puede simplificar (o 'reducir') cualquier fracción a su forma más simple, dividiendo el numerador y denominador entre sus factores comunes (se puede hacerlo sucesivamente, varias veces, hasta que no tienen factores comunes):

$$\frac{336}{480} = \frac{336/4}{480/4} = \frac{84}{120} = \frac{84/4}{120/4} = \frac{21}{30} = \frac{21/3}{30/3} = \frac{7}{10}.$$

9. Para *sumar o restar fracciones* las llevamos primero a un denominador común, y después usamos la ley de distribución:

$$\frac{5}{6} - \frac{7}{8} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} - \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{20}{24} - \frac{21}{24} = \frac{20 - 21}{24} = \frac{-1}{24} = -\frac{1}{24}.$$

$$2 - \frac{17}{7} = \frac{14}{7} - \frac{17}{7} = \frac{14 - 17}{7} = \frac{-3}{7} = -\frac{3}{7}.$$

10. *Multiplicar fracciones* es fácil:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}.$$

11. *División de fracciones* es un poco más complicado:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}.$$

En palabras: “se multiplica el numerador por el *recíproco* del denominador” (el recíproco de un número x es $1/x$; el recíproco de a/b es b/a). En fórmula:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Ojo: esta “regla de voltear la tortilla” es típicamente más útil que la famosa “ley de sandwich”.

12. No usamos “fracciones mixtas”. Por ejemplo, escribimos $\frac{5}{2}$ en lugar de $2\frac{1}{2}$.
13. Una fracción negativa la escribimos como el negativo de una fracción positiva. Por ejemplo, escribimos $-\frac{3}{5}$ en lugar de $\frac{-3}{5}$.
14. Fracciones decimales, como 2.5, 0.034, son fracciones cuyo denominador es una potencia de 10. Por ejemplo,

$$2.5 = \frac{25}{10}, \quad 0.034 = \frac{34}{1000}, \quad 3.5 - \frac{3}{7} = \frac{35}{10} - \frac{3}{7} = \frac{7}{2} - \frac{3}{7} = \frac{7 \cdot 7 - 3 \cdot 2}{14} = \frac{49 - 6}{14} = \frac{35}{14}.$$

15. Cuando se hace cuentas con fracciones es importantes mantener los ‘ejes’; por ejemplo

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{3} + \frac{2}{3}} = 1 + \frac{1}{\frac{3+2}{3}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{5+3}{5} = \frac{8}{5}.$$