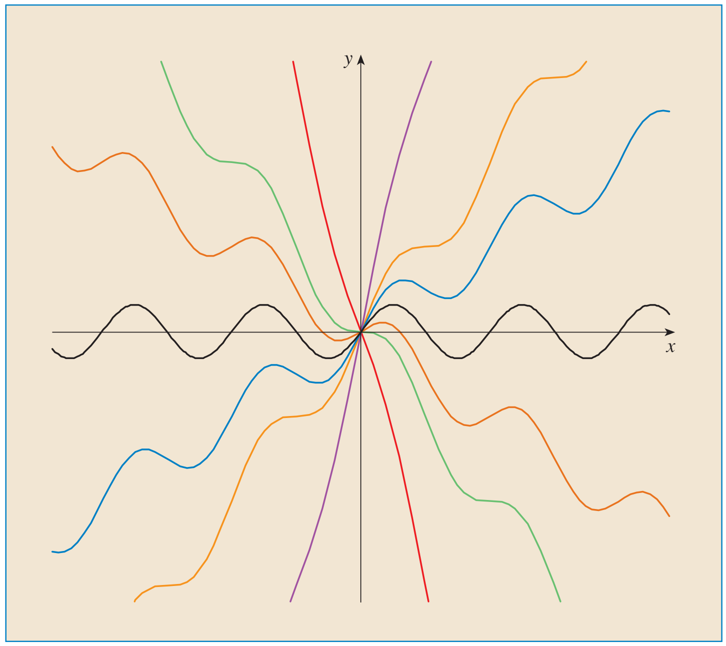
4

APLICACIONES DE LA DERIVACIÓN



El cálculo revela todos los aspectos importantes de las gráficas de las funciones. Se examinan grupos de la familia de funciones $f(x) = cx + \operatorname{sen} x$

Ya ha investigado algunas de las aplicaciones de las derivadas, pero ahora que conoce las reglas de derivación se encuentra en mejor posición para continuar con las aplicaciones de la derivación, con mayor profundidad. Aquí aprendera cómo las derivadas afectan la forma de una gráfica de una función y, particularmente, cómo ayudan a localizar valores máximos y mínimos de funciones. En la práctica muchos problemas exigen minimizar un costo o maximizar un área o bien encontrar el mejor resultado posible para una situación. En particular, será capaz de investigar la forma óptima de una lata y explicar la ubicación de los arcoíris en el cielo.

4.1 VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Algunas de las aplicaciones más importantes del cálculo diferencial son los *problemas de optimización*, en los cuales se pide la manera óptima (la mejor) de hacer algo. En seguida se listan ejemplos de esos problemas, los cuales se resuelven en este capítulo.

- ¿Cuál es la forma de una lata que minimice los costos de fabricación?
- ¿Cuál es la aceleración máxima de un trasbordador espacial? (Ésta es una cuestión importante para los astronautas que tienen que soportar los efectos de la aceleración.)
- ¿Cuál es el radio de una tráquea contraída que expele aire del modo más rápido al toser?
- ¿Qué ángulo deben formar los vasos sanguíneos al ramificarse de modo que se minimice la energía consumida por el corazón al bombear la sangre?

Estos problemas se pueden reducir a encontrar los valores máximo o mínimo de una función. En seguida se define con exactitud lo que son valores máximo y mínimo.

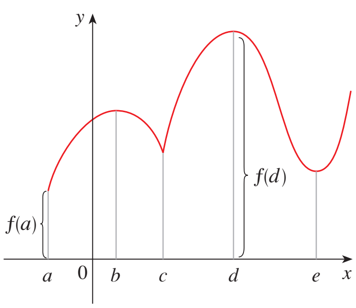


FIGURA 1
Valor mínimo $f(a)$, valor máximo $f(d)$

1 DEFINICIÓN Una función f tiene un **máximo absoluto** (o **máximo global**) en c si $f(c) \geqslant f(x)$ para todo x en D, donde D es el dominio de f. El número $f(c)$ se llama **valor máximo** de f en D. De manera análoga, f tiene un **mínimo absoluto** en c si $f(c) \leqslant f(x)$ para todo x en D; el número $f(c)$ se denomina **valor mínimo** de f en D. Los valores máximo y mínimo de f se conocen como **valores extremos** de f.

En la figura 1 se muestra la gráfica de una función f con máximo absoluto en d y mínimo absoluto en a. Observe que $(d, f(d))$ es el punto más alto de la gráfica y $(a, f(a))$ es el más bajo. Si sólo considera valores de x cercanos a b en la figura 1 [por ejemplo, si restringe su atención al intervalo (a, c)], entonces $f(b)$ es el más grande de esos valores de $f(x)$ y se conoce como *valor máximo local* de f. De modo semejante, $f(c)$ es el *valor mínimo local* de f porque $f(c) \leqslant f(x)$ para x cercano a c [por ejemplo en el intervalo (b, d)]. La función f también tiene un mínimo local en e. En general, se da la definición siguiente:

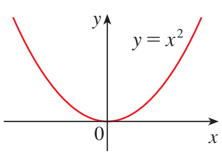


FIGURA 2
Valor mínimo 0, no hay valor máximo

2 DEFINICIÓN Una función f posee un **máximo local** (o **máximo relativo**) en c si $f(c) \geqslant f(x)$ cuando x está cercano a c. [Esto significa que $f(c) \geqslant f(x)$ para todo x en algún intervalo abierto que contiene a c.] De manera análoga, f tiene un **mínimo local** en c si $f(c) \leqslant f(x)$ cuando x está cerca de c.

EJEMPLO 1 La función $f(x) = \cos x$ toma su valor máximo (local y absoluto) de un número infinito de veces, ya que $\cos 2n\pi = 1$ para cualquier entero n y $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ para todo x. Del mismo modo, $\cos(2n + 1)\pi = -1$ es su valor mínimo, donde n es cualquier entero. □

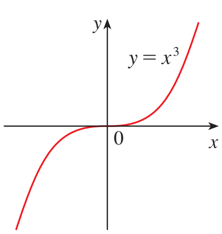


FIGURA 3
No hay mínimo ni máximo

EJEMPLO 2 Si $f(x) = x^2$, entonces $f(x) \geqslant f(0)$ porque $x^2 \geqslant 0$ para todo x. Por lo tanto, $f(0) = 0$ es el valor mínimo absoluto (y local) de f. Esto corresponde al hecho de que el origen es el punto más bajo sobre la parábola $y = x^2$. (Véase la figura 2.) Sin embargo, no existe el punto más alto sobre la parábola, por lo que esta función no tiene valor máximo. □

EJEMPLO 3 En la gráfica de la función $f(x) = x^3$, que se muestra en la figura 3, esta función no tiene valor máximo absoluto ni valor mínimo absoluto. De hecho, tampoco posee valores extremos locales. □

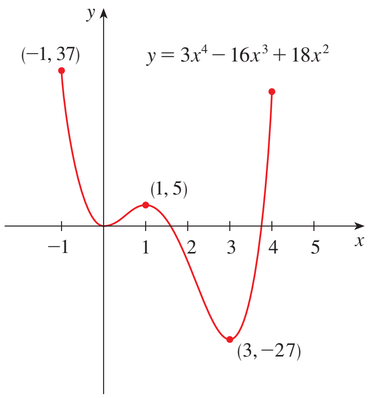


FIGURA 4

EJEMPLO 4 La gráfica de la función

$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 \qquad -1 \leqslant x \leqslant 4$$

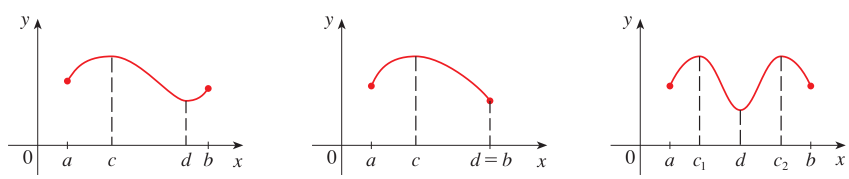
se muestra en la figura 4. Puede ver que $f(1) = 5$ es un máximo local, en tanto que el máximo absoluto es $f(-1) = 37$. (Este máximo absoluto no es un máximo local porque se presenta en un punto extremo.) Asimismo, $f(0) = 0$ es un mínimo local y $f(3) = -27$ es un mínimo tanto local como absoluto. Advierta que f no tiene valor local ni máximo absoluto en $x = 4$. □

Ha visto que algunas funciones tienen valores extremos y otras no. En el teorema siguiente se dan las condiciones con que se garantiza que una función posea valores extremos.

> **3 TEOREMA DEL VALOR EXTREMO** Si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y d en $[a, b]$.

En la figura 5 se ilustra el teorema del valor extremo. Observe que un valor extremo se puede tomar más de una vez. Aun cuando el Teorema del valor extremo es muy posible a nivel intuitivo, es difícil de probar y, por consiguiente, se omite la demostración.

FIGURA 5



En las figuras 6 y 7 se hace ver que una función no tiene que poseer valores extremos si se omite cualquiera de las dos hipótesis (continuidad e intervalo cerrado) del teorema del valor extremo.

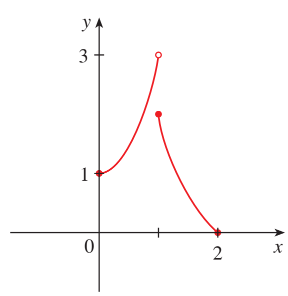


FIGURA 6
Esta función tiene valor mínimo $f(2) = 0$, pero no valor máximo

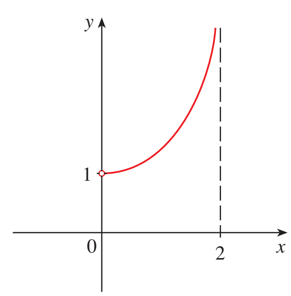


FIGURA 7
Esta función continua g no tiene máximo ni mínimo

La función f, cuya gráfica se muestra en la figura 6, está definida sobre el intervalo cerrado $[0, 2]$ pero no tiene valor máximo. (Advierta que el intervalo de f es $[0, 3)$. La función toma valores arbitrariamente cercanos a 3, pero nunca alcanza el valor 3.) Esto no contradice el teorema del valor extremo porque f no es continua. [Sin embargo, una función discontinua pudiera tener valores máximo y mínimo. Véase el ejercicio 13(b).]

La función g que se muestra en la figura 7 es continua sobre el intervalo abierto $(0, 2)$, pero no tiene valor máximo ni mínimo. [El intervalo de g es $(1, \infty)$. La función toma valores arbitrariamente grandes.] Esto no contradice el teorema del valor extremo porque el intervalo $(0, 2)$ no es cerrado.

El teorema del valor extremo dice que una función continua sobre un intervalo cerrado tiene un valor máximo y uno mínimo, pero no indica cómo hallarlos. Empiece por buscar valores extremos locales.

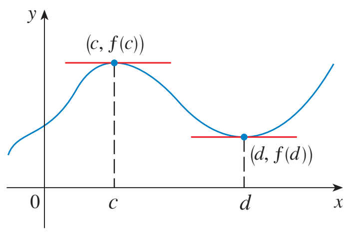


FIGURA 8

En la figura 8 se muestra la gráfica de una función f con un máximo local en c y un mínimo local en d. Parece que en los puntos máximo y mínimo la recta tangente es horizontal y, por consiguiente, tiene pendiente 0. Sabe que la derivada es la pendiente de la recta tangente, de modo que parece que $f'(c) = 0$ y $f'(d) = 0$. En el teorema siguiente se afirma que esto siempre se cumple para las funciones derivables.

■ El teorema de Fermat lleva ese nombre en honor de Pierre Fermat (1601-1665), un abogado francés que tomó las matemáticas como un pasatiempo. A pesar de su condición de aficionado, Fermat fue uno de los dos inventores de la geometría analítica (Descartes fue el otro). Sus métodos para hallar tangentes a las curvas y valores máximos y mínimos (antes de la invención de los límites y de las derivadas) lo hicieron un precursor de Newton en la creación del cálculo diferencial.

4 TEOREMA DE FERMAT Si f tiene un máximo o un mínimo local en c, y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

DEMOSTRACIÓN Por consideración de la definitividad, suponga que f tiene un máximo local en c. Entonces, según la definición 2, $f(c) \geqslant f(x)$ si x es suficientemente cercana a c. Esto ocasiona que si h está lo suficiente cerca de 0 y h es positiva o negativa, entonces

$$f(c) \geqslant f(c + h)$$

y, por lo tanto,

$$\boxed{5} \qquad f(c + h) - f(c) \leqslant 0$$

Puede dividir ambos miembros de una desigualdad entre un número positivo. Por consiguiente, si $h > 0$ y h es suficientemente pequeña, tiene

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leqslant 0$$

Si calcula el límite derecho de ambos lados de esta desigualdad (aplicando el teorema 2.3.2), obtiene

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leqslant \lim_{h \to 0^+} 0 = 0$$

Pero como $f'(c)$ existe

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

y de este modo ha demostrado que $f'(c) \leqslant 0$.

Si $h < 0$, entonces la dirección de la desigualdad (5) se invierte al dividir entre h:

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geqslant 0 \qquad h < 0$$

Así, al calcular el límite izquierdo obtiene

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geqslant 0$$

Ya se demostró que $f'(c) \geqslant 0$ y también que $f'(c) \leqslant 0$. Puesto que ambas desigualdades deben ser verdaderas, la única posibilidad es que $f'(c) = 0$.

Ya se demostró el teorema de Fermat para el caso de un máximo relativo. El caso de un mínimo local se puede demostrar de modo similar, o bien, puede usar el ejercicio 76 para deducirlo del caso que justamente ha demostrado (véase ejercicio 77). □

Los ejemplos siguientes advierten contra la interpretación excesiva del teorema de Fermat. No puede esperar localizar valores extremos simplemente haciendo $f'(x) = 0$ y resolviendo para x.

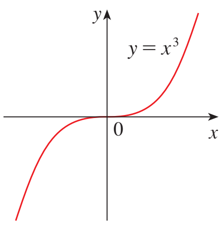


FIGURA 9
Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(0) = 0$ pero f no tiene máximo o mínimo.

EJEMPLO 5 Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$, de modo que $f'(0) = 0$. Pero f no tiene máximo ni mínimo en 0, como puede ver en la gráfica de la figura 9. (O bien, observe que $x^3 > 0$ para $x > 0$ pero $x^3 < 0$ para $x < 0$. El hecho de que $f'(0) = 0$ sólo significa que la curva $y = x^3$ tiene una tangente horizontal en (0, 0). En lugar de tener un máximo o un mínimo en (0, 0), la curva cruza allí su tangente horizontal. □

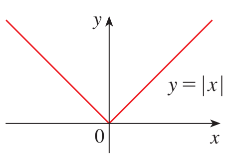


FIGURA 10
Si $f(x) = |x|$, entonces $f(0) = 0$ es un valor mínimo, pero $f'(0)$ no existe.

EJEMPLO 6 La función $f(x) = |x|$ muestra un valor mínimo (local y absoluto), en 0, pero ese valor no se puede determinar haciendo $f'(x) = 0$ porque, como se demostró en el ejemplo 5 de la sección 2.8, $f'(0)$ no existe (véase figura 10). □

PRECAUCIÓN ▫ Los ejemplos 5 y 6 demuestran que debe ser cuidadoso al aplicar el teorema de Fermat. El ejemplo 5 demuestra que aun cuando $f'(c) = 0$, no necesariamente hay un máximo o un mínimo en c. (En otras palabras, el inverso del teorema de Fermat es en general falso.) Además, podría haber un valor extremo aun cuando $f'(c)$ no exista, (como en el ejemplo 6).

El teorema de Fermat en realidad sugiere que, por lo menos, debe empezar a buscar los valores extremos de f en los números c , donde $f'(c) = 0$ o donde $f'(c)$ no existe. Estos números reciben un nombre especial.

> **6 DEFINICIÓN** Un **número crítico** de una función f es un número c en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

■ En la figura 11 se muestra una gráfica de la función f del ejemplo 7. Sirve de apoyo a la respuesta porque hay una tangente horizontal cuando $x = 1.5$ y una vertical cuando $x = 0$.

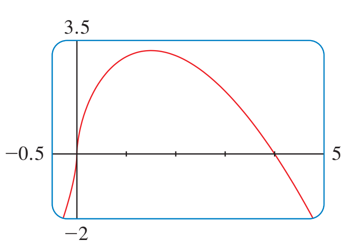


FIGURA 11

EJEMPLO 7 Encuentre los números críticos de $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$.

SOLUCIÓN La regla del producto da

$$f'(x) = x^{3/5}(-1) + (4 - x)\left(\tfrac{3}{5}x^{-2/5}\right) = -x^{3/5} + \frac{3(4 - x)}{5x^{2/5}}$$

$$= \frac{-5x + 3(4 - x)}{5x^{2/5}} = \frac{12 - 8x}{5x^{2/5}}$$

[Pudo obtenerse el mismo resultado escribiendo primero $f(x) = 4x^{3/5} - x^{8/5}$.] Por lo tanto, $f'(x) = 0$ si $12 - 8x = 0$, esto es, $x = \frac{3}{2}$, y $f'(x)$ no existe cuando $x = 0$. Por esto, los números críticos son $\frac{3}{2}$ y 0. □

En términos de los números críticos, el teorema de Fermat se puede volver a redactar como sigue (compare la definición 6 con el teorema 4):

> **7** Si f tiene un máximo o minimo local en c, entonces c es un número crítico de f.

Para hallar un máximo o un mínimo absolutos de una función continua sobre un intervalo cerrado, observe que tiene un extremo local [en cuyo caso, por (7), se presenta en un número crítico] o se presenta en uno de los puntos extremos del intervalo. De este modo, el procedimiento siguiente de tres pasos siempre funciona.

MÉTODO DEL INTERVALO CERRADO Para hallar los valores máximo y mínimo *absolutos* de una función continua f sobre un intervalo cerrado $[a, b]$:

1. Encuentre los valores de f en los números críticos de f en (a, b).
2. Halle los valores de f en los puntos extremos del intervalo.
3. El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el más pequeño, el valor mínimo absoluto.

V EJEMPLO 8 Calcule los valores máximo y mínimo absolutos de la función.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad -\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4$$

SOLUCIÓN Puesto que f es continua en $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$, puede aplicar el método del intervalo cerrado:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

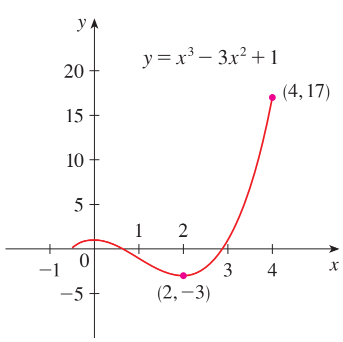


FIGURA 12

Puesto que $f'(x)$ existe para toda x, los únicos números críticos de f se presentan cuando $f'(x) = 0$, es decir, $x = 0$ o $x = 2$. Observe que cada uno de estos valores críticos queda en el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$. Los valores de f en estos números críticos son

$$f(0) = 1 \qquad f(2) = -3$$

Los valores de f en los extremos del intervalo son

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{8} \qquad f(4) = 17$$

Al comparar los cuatro números resulta que el valor máximo absoluto es $f(4) = 17$ y que el valor mínimo absoluto es $f(2) = -3$.

Observe que en este ejemplo el máximo absoluto se presenta en un extremo, y el mínimo absoluto se presenta en un número crítico. La gráfica de f se ilustra en la figura 12. □

Si tiene una calculadora que grafique o una computadora con programas que le permitan graficar, es posible estimar con mucha facilidad los valores máximo y mínimo. Pero, como se puede ver en el ejemplo siguiente, el cálculo infinitesimal es necesario para determinar los valores *exactos*.

EJEMPLO 9

(a) Use un aparato graficador para estimar los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

(b) Aplique el cálculo para hallar los valores mínimo y máximo exactos.

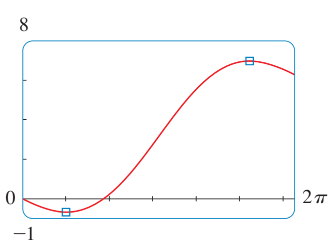


FIGURA 13

SOLUCIÓN

(a) En la figura 13 se muestra una gráfica de f en la pantalla $[0, 2\pi]$ por $[-1, 8]$. Al acercar el cursor al punto máximo, observe que las coordenadas y no cambian mucho en la vecindad del máximo. El valor máximo absoluto es alrededor de 6.97 y se presenta cuando $x \approx 5.2$. De manera análoga, al mover el cursor cerca del punto mínimo, el valor mínimo absoluto es alrededor de -0.68 y se presenta cuando $x \approx 1.0$. Es posible lograr estimaciones más exactas al hacer un acercamiento hacia los puntos máximo y mínimo pero, en lugar de ello, aplique el cálculo.

(b) La función $f(x) = x - 2 \text{ sen } x$ es continua sobre $[0, 2\pi]$. Puesto que $f'(x) = 1 - 2 \cos x$, tiene $f'(x) = 0$ cuando $\cos x = \frac{1}{2}$ esto ocurre cuando $x = \pi/3$ o $5\pi/3$. Los valores de f en estos puntos críticos son

$$f(\pi/3) = \frac{\pi}{3} - 2 \text{ sen } \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0.684853$$

y $$f(5\pi/3) = \frac{5\pi}{3} - 2 \text{ sen } \frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 6.968039$$

Los valores de f en los puntos extremos son

$$f(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad f(2\pi) = 2\pi \approx 6.28$$

Si se comparan estos cuatro números y se aplica el método del intervalo cerrado, el valor mínimo absoluto es $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3}$ y el valor máximo absoluto es $f(5\pi/3) = 5\pi/3 + \sqrt{3}$. Los valores del inciso (a) sirven de comprobación. □

NASA

EJEMPLO 10 El telescopio espacial Hubble fue puesto en operación el 24 de abril de 1990 por el trasbordador espacial *Discovery*. Un modelo para la velocidad del trasbordador durante su misión desde el lanzamiento en $t = 0$ hasta que los cohetes auxiliares de combustible sólido se desprenden en el instante $t = 126$ s, está dado por

$$v(t) = 0.001302t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.083$$

(en pies por segundo). Usando este modelo, estime los valores máximo y mínimo absolutos de la *aceleración* del trasbordador entre el lanzamiento y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido.

SOLUCIÓN Se pide hallar los valores extremos no de la función de velocidad dada sino de la función de aceleración. Por consiguiente, primero necesita derivar para encontrar la aceleración:

$$\begin{aligned} a(t) = v'(t) &= \frac{d}{dt}(0.001302t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.083) \\ &= 0.003906t^2 - 0.18058t + 23.61 \end{aligned}$$

Ahora aplique el método del intervalo cerrado a la función continua a en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant 126$. Su derivada es

$$a'(t) = 0.007812t - 0.18058$$

El único número crítico se presenta cuando $a'(t) = 0$:

$$t_1 = \frac{0.18058}{0.007812} \approx 23.12$$

Al evaluar a $a(t)$ en el número crítico y en los extremos, tiene

$$a(0) = 23.61 \qquad a(t_1) \approx 21.52 \qquad a(126) \approx 62.87$$

De modo que la aceleración máxima es alrededor de 62.87 pies/s^2 y la aceleración mínima es alrededor de 21.52 pies/s^2. □

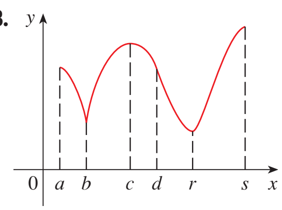
4.1 EJERCICIOS

1. Explique la diferencia entre un mínimo absoluto y un mínimo local.

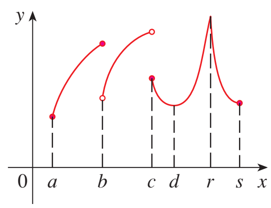
2. Suponga que f es una función continua definida sobre un intervalo $[a, b]$.
(a) ¿Qué teorema garantiza la existencia de un valor máximo absoluto y uno mínimo absoluto para f?
(b) ¿Qué pasos emprendería para hallar esos valores máximo y mínimo?

3–4 Para cada uno de los números a, b, c, d, r, y s, determine si la función cuya gráfica se ilustra tiene un máximo o un mínimo absolutos, un máximo o un mínimo locales o no tiene ni máximo ni mínimo.

3.

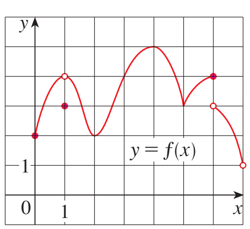


4.

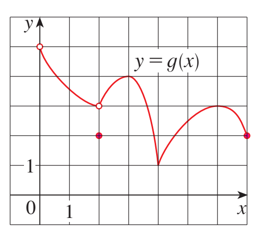


5–6 Use la gráfica para determinar los valores máximos y mínimos absolutos y locales de la función.

5.



6.



7–10 Dibuje la gráfica de una función f que sea continua sobre $[1, 5]$ y tenga las propiedades dadas.

7. Mínimo absoluto en 2, máximo absoluto en 3, mínimo local en 4.

8. Mínimo absoluto en 1, máximo absoluto en 5, mínimo local en 2, mínimo local en 4.

9. Máximo absoluto en 5, mínimo absoluto en 2, máximo local en 3, mínimo local en 2 y 4.

10. f no tiene máximo ni mínimo locales, pero 2 y 4 son números críticos.

11. (a) Trace la gráfica de una función que tenga un máximo local en 2 y sea derivable en 2.
(b) Trace la gráfica de una función que tenga un máximo local en 2 y no sea derivable en 2.
(c) Trace la gráfica de una función que tenga un máximo local en 2 y no sea continua en 2.

12. (a) Trace la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que tenga un máximo absoluto pero no máximo local.
(b) Trace la gráfica de una función en $[-1, 2]$ que tiene un máximo local pero no un máximo absoluto.

13. (a) Trace la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que tenga un máximo absoluto pero no mínimo absoluto.
(b) Trace la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que sea discontinua pero que tenga tanto un máximo absoluto como un mínimo absoluto.

14. (a) Trace la gráfica de una función que tenga dos máximos locales, un mínimo local y no mínimo absoluto.
(b) Trace la gráfica de una función que tenga tres mínimos locales, dos máximos locales y siete números críticos.

15–28 Trace a mano la gráfica de f y use su boceto para encontrar los valores máximos y mínimos, absolutos y locales de f. (Utilice las gráficas así como las transformaciones de las secciones 1.2 y 1.3.)

15. $f(x) = 8 - 3x, \quad x \geqslant 1$

16. $f(x) = 3 - 2x, \quad x \leqslant 5$

17. $f(x) = x^2, \quad 0 < x < 2$

18. $f(x) = x^2, \quad 0 < x \leqslant 2$

19. $f(x) = x^2, \quad 0 \leqslant x < 2$

20. $f(x) = x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2$

21. $f(x) = x^2, \quad -3 \leqslant x \leqslant 2$

22. $f(x) = 1 + (x + 1)^2, \quad -2 \leqslant x < 5$

23. $f(x) = \ln x, \quad 0 < x \leqslant 2$

24. $f(t) = \cos t, \quad -3\pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

25. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

26. $f(x) = e^x$

27. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } 0 \leqslant x < 2 \\ 2x - 4 & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } -2 \leqslant x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

29–44 Encuentre los números críticos de la función.

29. $f(x) = 5x^2 + 4x$

30. $f(x) = x^3 + x^2 - x$

31. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$

32. $f(x) = x^3 + x^2 + x$

33. $s(t) = 3t^4 + 4t^3 - 6t^2$

34. $g(t) = |3t - 4|$

35. $g(y) = \dfrac{y + 1}{y^2 - y + 1}$

36. $h(p) = \dfrac{p - 1}{p^2 + 4}$

37. $h(t) = t^{3/4} - 2t^{1/4}$

38. $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

39. $F(x) = x^{4/5}(x - 4)^2$

40. $g(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$

41. $f(\theta) = 2\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta$

42. $g(\theta) = 4\theta - \tan\theta$

43. $f(x) = x^2 e^{-3x}$

44. $f(x) = x^{-2x}\ln x$

45–46 Se proporciona una formula para la *derivada* de una función f. ¿Cuántos números críticos tiene f?.

45. $f'(x) = 5e^{-0.1|x|}\operatorname{sen} x - 1$

46. $f'(x) = \dfrac{100\cos^2 x}{x^2 + 1}$

47–62 Halle los valores máximo y mínimo absolutos de f sobre el intervalo dado.

47. $f(x) = 3x^2 - 12x + 5, \quad [0, 3]$

48. $f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad [0, 3]$

49. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1, \quad [-2, 3]$

50. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2, \quad [-1, 4]$

51. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3, \quad [-2, 3]$

52. $f(x) = (x^2 - 1)^3, \quad [-1, 2]$

53. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}, \quad [0, 2]$

54. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}, \quad [-4, 4]$

55. $f(t) = t\sqrt{4 - t^2}, \quad [-1, 2]$

56. $f(t) = \sqrt[3]{t}(8 - t), \quad [0, 8]$

57. $f(x) = 2\cos t + \operatorname{sen} 2t, \quad [0, \pi/2]$

58. $f(t) = t + \cot(t/2), \quad [\pi/4, 7\pi/4]$

59. $f(x) = xe^{-x}, \quad [-1, 4]$

60. $f(x) = x - \ln x, \quad [\frac{1}{2}, 2]$

61. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1), \quad [-1, 1]$

62. $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}, \quad [0, 1]$

63. Si a y b son números positivos, encuentre el valor máximo de $f(x) = x^a(1 - x)^b$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

64. Use una gráfica para estimar los números críticos de $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 2|$ correctos hasta un lugar decimal.

65–68

(a) Utilice una gráfica para estimar los valores máximo y mínimo de la función hasta dos lugares decimales.

(b) Use el cálculo para encontrar los valores máximo y mínimo exactos.

65. $f(x) = x^5 - x^3 + 2, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$

66. $f(x) = e^{x^3 - x}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 0$

67. $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$

68. $f(x) = x - 2\cos x, \quad -2 \leqslant x \leqslant 0$

69. Entre 0°C y 30°C el volumen V (en centímetros cúbicos) de 1 kg de agua a una temperatura T se expresa aproximadamente mediante la fórmula

$$V = 999.87 - 0.06426T + 0.0085043T^2 - 0.0000679T^3$$

Encuentre la temperatura a la cual el agua tiene su densidad máxima.

70. Un objeto con peso W es arrastrado a lo largo de un plano horizontal por una fuerza que actúa a lo largo de una cuerda atada al objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con el plano, por lo tanto la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$$

donde μ es una constante positiva denominada *coeficiente de fricción* y $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Demuestre que F se minimiza cuando $\tan\theta = \mu$.

71. Se proporciona un modelo para el precio en Estados Unidos de una libra de azúcar blanca desde 1993 a 2003

$$S(t) = -0.00003237t^5 + 0.0009037t^4 - 0.008956t^3 + 0.03629t^2 - 0.04458t + 0.4074$$

donde t se mide en años desde agosto de 1993. Estime las ocasiones en que el azúcar estuvo más barata y más cara durante el periodo de 1993 a 2007.

72. El 7 de mayo de 1992, el transbordador espacial *Endeavour* fue lanzado en la misión STS-49, cuya finalidad fue instalar un nuevo motor de impulso en el perigeo en un satélite Intelsat de comunicaciones. En la tabla siguiente se dan los datos de la velocidad del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido.

Hecho	Tiempo (s)	Velocidad (pies/s)
Lanzamiento	0	0
Inicio de maniobra de giro	10	185
Fin de maniobra de giro	15	319
Válvula de estrangulación al 89%	20	447
Válvula de estrangulación al 67%	32	742
Válvula de estrangulación al 104%	59	1325
Presión dinámica máxima	62	1445
Separación de los cohetes auxiliares de combustible sólido	125	4151

(a) Utilice un dispositivo graficador o una computadora para hallar el polinomio cúbico que modele de la mejor manera la velocidad del transbordador para el lapso $t \in [0, 125]$. A continuación, dibuje este polinomio.

(b) Encuentre un modelo para su aceleración y úselo para estimar los valores máximo y mínimo de la aceleración durante los primeros 125 s.

73. Cuando un objeto extraño alojado en la tráquea fuerza a una persona a toser, el diafragma empuja hacia arriba y causa un aumento de la presión en los pulmones. Esto viene acompañado por una contracción de la tráquea, con lo cual se produce un canal más angosto por el que debe fluir el aire expelido. Para que escape una cantidad dada de aire en un tiempo fijo, éste debe moverse con mayor rapidez por el canal más angosto que por el más amplio. Entre mayor sea la velocidad de la corriente de aire, mayor es la fuerza aplicada sobre el objeto extraño. Los rayos X muestran que el radio del tubo circular de la tráquea se contrae hasta alrededor de dos tercios de su radio normal durante un acceso de tos. De acuerdo con un modelo matemático de la tos, la velocidad n de la corriente de aire se relaciona con el radio r de la tráquea mediante la ecuación

$$v(r) = k(r_0 - r)r^2 \qquad \tfrac{1}{2}r_0 \leqslant r \leqslant r_0$$

donde k es una constante y r_0 es el radio normal de la tráquea. La restricción sobre r se debe al hecho de que la pared de la tráquea se pone rígida bajo la presión y se impide una contracción mayor que $\frac{1}{2}r_0$ (de lo contrario, la persona se sofocaría).

(a) Determine el valor de r en el intervalo $\left[\frac{1}{2}r_0, r_0\right]$ al cual v tiene un máximo absoluto. ¿Cómo se equipara esto con la evidencia experimental?

(b) ¿Cuál es el valor máximo absoluto de v sobre el intervalo?

(c) Dibuje v sobre el intervalo $[0, r_0]$.

74. Demuestre que 5 es un valor crítico de la función

$$g(x) = 2 + (x - 5)^3$$

pero g no tiene un valor extremo local en 5.

75. Demuestre que la función

$$f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$$

no tiene ni máximo local ni mínimo local.

76. Si f tiene un valor mínimo en c, demuestre que la función $g(x) = -f(x)$ posee un valor máximo en c.

77. Demuestre el teorema de Fermat para el caso en el cual f posee un mínimo relativo en c.

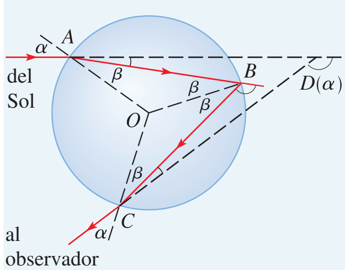
78. Una función cúbica es un polinomio de grado 3; esto es, tiene la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde $a \neq 0$.

(a) Demuestre que una función cúbica puede tener dos números críticos, uno o ninguno. Dé ejemplos y trace gráficas para ilustrar las tres posibilidades.

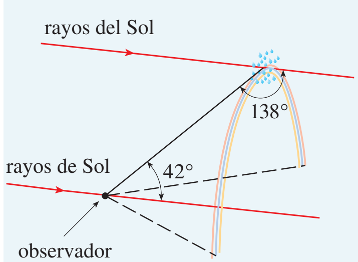
(b) ¿Cuántos valores extremos locales puede tener una función cúbica?

PROYECTO DE APLICACIÓN — EL CÁLCULO DE LOS ARCOÍRIS

Los arcoíris se forman cuando las gotas de lluvia dispersan la luz solar. Han fascinado a la humanidad desde los tiempos más remotos y han inspirado intentos de explicación científica desde la época de Aristóteles. En este proyecto se siguen las ideas de Descartes y de Newton para explicar la forma, la ubicación y los colores de los arcoíris.



Formación del arcoíris primario



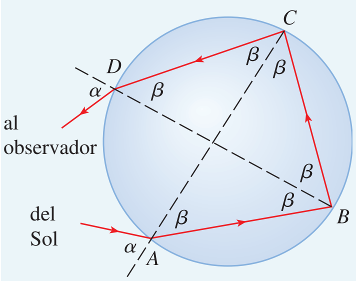
1. En la figura se muestra un rayo de luz solar que entra en una gota de lluvia esférica en A. Algo de la luz se refleja, pero la recta AB muestra la trayectoria de la parte que entra a la gota. Advierta que la luz se refracta hacia la recta normal AO y, de hecho, la ley de Snell afirma que sen $\alpha = k$ sen β, donde α es el ángulo de incidencia, β es el ángulo de refracción y $k \approx \frac{4}{3}$ es el índice de refracción para el agua. En B algo de la luz pasa por la gota y se refracta hacia el aire, pero la recta BC muestra la parte que se refleja. (El ángulo de incidencia es igual al de reflexión.) Cuando el rayo llega a C, parte de él se refleja pero, por el momento, hay más interés en la parte que sale de la gota de lluvia en C. (Advierta que se refracta alejándose de la recta normal.) El *ángulo de desviación* $D(\alpha)$ es la magnitud de la rotación en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj que ha descrito el rayo durante este proceso de tres etapas. Por lo tanto

$$D(\alpha) = (\alpha - \beta) + (\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) = \pi + 2\alpha - 4\beta$$

Demuestre que el valor mínimo de la desviación es $D(\alpha) \approx 138°$ y ocurre cuando $\alpha \approx 59.4°$.

El significado de la desviación mínima es que, cuando $\alpha \approx 59.4°$ tiene $D'(\alpha) \approx 0$, de modo que $\Delta D/\Delta\alpha \approx 0$. Esto significa que muchos rayos con $\alpha \approx 59.4°$ resultan desviados en más o menos la misma cantidad. La *concentración* de los rayos que vienen de las cercanías de la desviación mínima crea la brillantez del arcoíris primario. En la figura se muestra que el ángulo de elevación desde el observador, hacia arriba hasta el punto más alto del arcoíris es $180° - 138° = 42°$. (Este ángulo se conoce como *ángulo del arcoíris*.)

2. En el problema 1 se explica la ubicación del arcoíris primario, ¿pero cómo explica los colores? La luz solar comprende una gama de longitudes de onda, desde el rojo, hasta el naranja,



Formación del arcoíris secundario

amarillo, verde, azul, índigo y violeta. Como Newton descubrió en sus experimento del prisma de 1666, el índice de refracción es diferente para cada color. (El efecto se llama *dispersión*.) Para la luz roja, el índice de refracción es $k \approx 1.3318$ en tanto que para la luz violeta es $k \approx 1.3435$. Al repetir el cálculo del problema 1 para estos valores de k, se demuestra que el ángulo del arcoíris es alrededor de 42.3° para el arco rojo y de 40.6° para el arco violeta. Así pues, el arcoíris en realidad consta de siete arcos separados que corresponden a los siete colores.

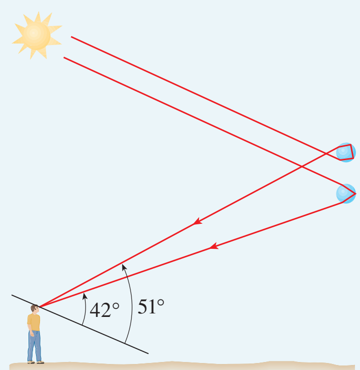
3. Quizá haya visto un arcoíris secundario más tenue, arriba del arco primario. Se produce por la parte de un rayo que entra en una gota de lluvia y se refracta en A, se refleja dos veces (en B y C) y se refracta al salir de la gota en D (véase la figura que aparece a la izquierda). En esta ocasión, el ángulo de desviación $D(\alpha)$ es la magnitud total de la rotación en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj que describe el rayo en este proceso de cuatro etapas. Demuestre que

$$D(\alpha) = 2\alpha - 6\beta + 2\pi$$

y $D(\alpha)$ tiene un valor mínimo cuando

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{k^2 - 1}{8}}$$

Si se toma $k = \frac{4}{3}$, demuestre que la desviación mínima es alrededor de 129° y, por lo tanto, el ángulo del arcoíris secundario es de más o menos 51°, como se muestra en la figura siguiente.



4. Demuestre que los colores del arcoíris secundario aparecen en orden opuesto al del primario.

4.2 TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Verá que muchos de los resultados de este capítulo dependen de un hecho principal, que es el llamado teorema del valor medio. Pero para llegar a este teorema es necesario primero el siguiente resultado.

■ El matemático francés Michel Rolle (1652-1719) publicó por primera vez el teorema de Rolle en un libro titulado *Méthode pour résoudre les égalitéz* en 1691. Sin embargo, tiempo después, se volvió un fuerte crítico de los métodos de su época y atacó al cálculo calificándolo de "una colección de ingeniosas falacias".

TEOREMA DE ROLLE Sea f una función que satisface las siguientes tres hipótesis:

1. f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. f es derivable en el intervalo abierto (a, b).
3. $f(a) = f(b)$

Entonces hay un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Antes de la demostración, dé una mirada a las gráficas de algunas funciones representativas que cumplen las tres hipótesis. En la figura 1 se muestran las gráficas de cuatro de dichas funciones. En cada caso aparece que hay por lo menos un punto $(c, f(c))$ en la gráfica donde la tangente es horizontal y, por lo tanto, $f'(c) = 0$. Por lo tanto, el teorema de Rolle es posible.

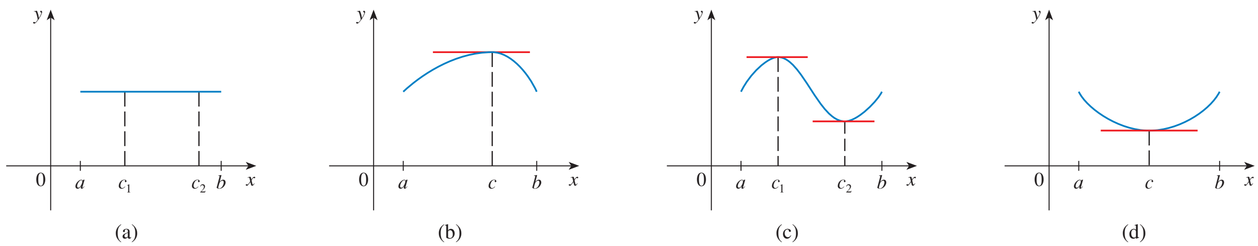


FIGURA 1

■ Presentación de casos

DEMOSTRACIÓN Hay tres casos:

CASO I ■ $f(x) = k$, **una constante**
Entonces $f'(x) = 0$, de modo que el número c se puede tomar de *cualquier* número en (a, b).

CASO II ■ $f(x) > f(a)$ **para cualquier x en (a, b)** [como en la figura 1(b) o (c)]
Según el teorema del valor extremo, (el cual aplica por la hipótesis 1), f tiene un valor máximo en cualquier lugar de $[a, b]$. Puesto que $f(a) = f(b)$, debe alcanzar su valor máximo en un número c en el intervalo abierto (a, b). Entonces f tiene un máximo *local* en c, y, según la hipótesis 2, f es derivable en c. Por lo tanto, $f'(c) = 0$, de acuerdo con el teorema de Fermat.

CASO III ■ $f(x) < f(a)$ **para alguna x en (a, b)** [como en la figura 1(c) o (d)]
De acuerdo con el teorema del valor extremo, f tiene un valor mínimo en $[a, b]$, y como $f(a) = f(b)$, alcanza su valor mínimo en un número c en (a, b). Una vez más, $f'(c) = 0$, según el teorema de Fermat. □

EJEMPLO 1 Aplique el teorema de Rolle a la función de posición $s = f(t)$ de un objeto que se desplaza. Si el objeto está en el mismo lugar en dos instantes diferentes $t = a$ y $t = b$, entonces $f(a) = f(b)$. El teorema de Rolle establece que hay algún instante del tiempo $t = c$ entre a y b cuando $f'(c) = 0$; es decir, la velocidad es 0. (En particular, usted puede ver que esto se cumple cuando una pelota es lanzada directamente hacia arriba.) □

■ En la figura 2 se ilustra una gráfica de la función $f(x) = x^3 + x - 1$ estudiada en el ejemplo 2. El teorema de Rolle dice que no importa qué tanto amplifique el rectángulo de visión, ya que nunca podrá encontrar una segunda intersección con el eje de las x.

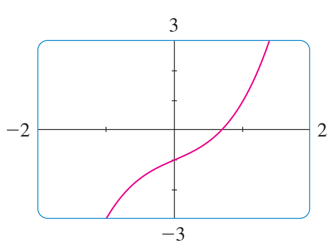


FIGURA 2

EJEMPLO 2 Demuestre que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene sólo una raíz real.

SOLUCIÓN Primero aplique el teorema del valor intermedio (2.5.10) para demostrar que existe una raíz. Sea $f(x) = x^3 + x - 1$. Después $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 1 > 0$. Puesto que f es un polinomio, es continua, de modo que el teorema del valor intermedio establece que hay un número c entre 0 y 1 tal que $f(c) = 0$. Así, la ecuación dada tiene una raíz.

Para demostrar que la ecuación no posee otra raíz real, aplique el teorema de Rolle y siga un razonamiento de contradicción. Suponga que hay dos raíces a y b. Entonces, $f(a) = 0 = f(b)$ y, como f es un polinomio, es derivable en (a, b) y continua en $[a, b]$. Por esto, de acuerdo con el teorema de Rolle, hay un número c entre a y b tal que $f'(c) = 0$. Pero

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \geqslant 1 \qquad \text{para toda } x$$

porque $x^2 \geqslant 0$ de modo que $f'(x)$ nunca puede ser 0. Esto es una contradicción. Por lo tanto, la ecuación no puede tener dos raíces reales. □

El uso principal que se le da al teorema de Rolle es en la demostración del importante teorema siguiente, el cual fue planteado por primera vez por otro matemático francés, Joseph-Louis Lagrange.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO Sea f una función que cumple con las hipótesis siguientes:

1. f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. f es derivable en el intervalo abierto (a, b).

Entonces hay un número c en (a, b) tal que

$$\boxed{1} \qquad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o, en forma equivalente,

$$\boxed{2} \qquad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

■ El teorema del valor medio es un ejemplo de lo que se llama un teorema de existencia. Al igual que el teorema del valor intermedio, el teorema del valor extremo y el teorema de Rolle, garantiza que *existe* un número con una cierta propiedad, pero no dice cómo determinar dicho número.

Antes de demostrar este teorema, conviene ver que es razonable interpretarlo desde el punto de vista geométrico. Las figuras 3 y 4 muestran los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ sobre las gráficas de dos funciones derivables. La pendiente de la secante AB es

$$\boxed{3} \qquad m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

la cual es la misma expresión que en el lado derecho de la ecuación 1. Como $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto $(c, f(c))$, el teorema del valor medio, en la forma dada por la ecuación 1, expresa que existe por lo menos un punto $P(c, f(c))$ sobre la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es la misma que la de la recta secante AB. En otras palabras, existe un punto P donde la recta tangente es paralela a la recta secante AB.

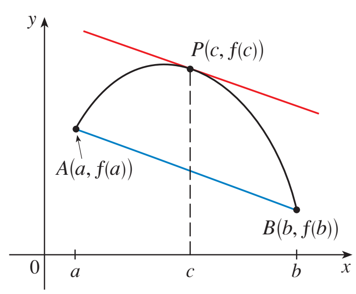


FIGURA 3

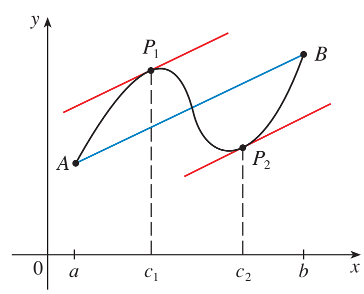


FIGURA 4

DEMOSTRACIÓN Aplique el teorema de Rolle a una nueva función h definida como la diferencia entre f y la función cuya gráfica es la secante AB. Si usa la ecuación 3 verá que la ecuación de la recta AB se puede escribir como

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

o bien, como
$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

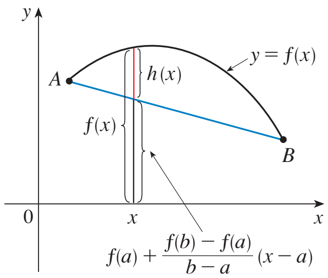


FIGURA 5

De tal manera, como se muestra en la figura 5,

$$\boxed{4} \qquad h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Primero hay que comprobar que h cumple con las tres hipótesis del teorema de Rolle.

1. La función h es continua en $[a, b]$ porque es la suma de f y de un polinomio de primer grado, y ambos son continuos.

2. La función h es derivable en (a, b) porque tanto f como el polinomio de primer grado son derivables. En efecto, es posible calcular h' directamente con la ecuación 4:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(Observe que $f(a)$ y $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ son constantes.)

3.
$$h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$

$$h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a)$$
$$= f(b) - f(a) - [f(b) - f(a)] = 0$$

Por lo tanto, $h(a) = h(b)$.

Como h cumple con las hipótesis del teorema de Rolle, ese teorema establece que hay un número c en (a, b) tal que $h'(c) = 0$. Por lo tanto,

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y de esa manera
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$ □

LAGRANGE Y EL TEOREMA DE VALOR MEDIO

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) formuló por primera vez el teorema del valor medio. Nacido en Italia, de padre francés y de madre italiana. Fue un niño prodigio y se convirtió en profesor en Turín, a la temprana edad de 19 años. Lagrange hizo grandes colaboraciones a la teoría de números, la teoría de funciones, la teoría de ecuaciones y la mecánica analítica y celeste. En particular, aplicó el cálculo al análisis de la estabilidad del sistema solar. Por invitación de Federico el Grande, se convirtió en el sucesor de Euler en la Academia de Berlín; al morir su mecenas aceptó la invitación del rey Luis XVI para trasladarse a París, donde se le dieron apartamentos en el Louvre. A pesar de todas las tentaciones del lujo y la fama, fue un hombre bondadoso y tranquilo, aunque sólo vivió para la ciencia.

V EJEMPLO 3 Para ilustrar el teorema del valor medio con una función específica, considere $f(x) = x^3 - x$, $a = 0$, $b = 2$. Puesto que f es un polinomio, es continuo y derivable para toda x, por lo que es ciertamente continuo en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$. Por lo tanto, de acuerdo con el teorema del valor medio, hay un número c en $(0, 2)$ tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

Ahora, $f(2) = 6$, $f(0) = 0$ y $f'(x) = 3x^2 - 1$, de modo que esta ecuación se vuelve

$$6 = (3c^2 - 1)2 = 6c^2 - 2$$

lo cual da $c^2 = \frac{4}{3}$, es decir, $c = \pm 2/\sqrt{3}$. Pero c debe estar en $(0, 2)$, de modo que $c = 2/\sqrt{3}$. En la figura 6 se ilustra este cálculo: la tangente en este valor de c es paralela a la secante OB. □

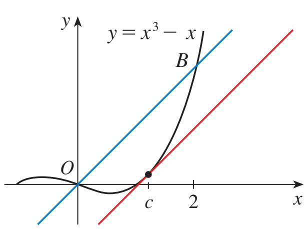


FIGURA 6

V EJEMPLO 4 Si un objeto se mueve en una línea recta con función de posición $s = f(t)$, entonces la velocidad promedio entre $t = a$ y $t = b$ es

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y la velocidad en $t = c$ es $f'(c)$. De este modo, el teorema del valor medio (en la forma de la ecuación 1) dice que en algún instante $t = c$, entre a y b, la velocidad instantánea $f'(c)$ es igual a esa velocidad promedio. Por ejemplo, si un automóvil recorrió 180 km en 2 h, en seguida el velocímetro debió indicar 90 km/h por lo menos una vez.

En general, una interpretación del teorema del valor medio es que hay un número en el cual la relación de cambio instantánea es igual a la relación de cambio promedio en el intervalo. □

El principal significado del Teorema del Valor Medio es que permite obtener información relacionada con una función a partir de información con respecto a su derivada. El ejemplo siguiente ilustra este principio.

V EJEMPLO 5 Suponga que $f(0) = -3$ y $f'(x) \leqslant 5$ para todos los valores de x. ¿Qué tan grande es posible que sea $f(2)$?

SOLUCIÓN Sabe que f es derivable (y, por lo tanto, continua) dondequiera. En particular, puede aplicar el teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$. Allí existe un número c tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

por lo que
$$f(2) = f(0) + 2f'(c) = -3 + 2f'(c)$$

Con la información de que $f'(x) \leqslant 5$ para toda x, de modo que en particular sabe que $f'(c) \leqslant 5$. Al multiplicar ambos lados de esta desigualdad por 2 obtiene $2f'(c) \leqslant 10$, y por eso

$$f(2) = -3 + 2f'(c) \leqslant -3 + 10 = 7$$

El valor más grande posible para $f(2)$ es 7. □

Mediante el teorema del valor medio se pueden establecer algunos de los hechos básicos del cálculo diferencial. Uno de estos hechos básicos es el teorema siguiente. Otros se tratan en las secciones siguientes.

> **5 TEOREMA** Si $f'(x) = 0$ para toda x en un intervalo (a, b), entonces f es constante en (a, b).

DEMOSTRACIÓN Sean x_1 y x_2 dos números cualquiera en (a, b) donde $x_1 < x_2$. Puesto que f es derivable en (a, b), debe ser derivable en (x_1, x_2) y continua en $[x_1, x_2]$. Al aplicar el teorema del valor medio a f en el intervalo $[x_1, x_2]$ obtiene un número c tal que $x_1 < c < x_2$ y

6
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Puesto que $f'(x) = 0$ para toda x, $f'(c) = 0$, y así la ecuación 6 se transforma en

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \qquad \text{o bien,} \qquad f(x_2) = f(x_1)$$

Por lo tanto, f tiene el mismo valor en dos números cualquiera x_1 y x_2 en (a, b). Esto quiere decir que f es constante en (a, b). □

> **7 COROLARIO** Si $f'(x) = g'(x)$ para toda x en el intervalo (a, b), entonces $f - g$ es constante en (a, b); es decir, $f(x) = g(x) + c$ donde c es constante.

DEMOSTRACIÓN Sea $F(x) = f(x) - g(x)$. Entonces

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

para toda x en (a, b). Por esto, según el teorema 5, F es constante; es decir, $f - g$ es constante. □

NOTA Es necesario tener cuidado al aplicar el teorema 5. Sea

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El dominio de f es $D = \{x \mid x \neq 0\}$ y $f'(x) = 0$ para toda x en D. Pero obviamente f no es una función constante. Esto no contradice el teorema 5 porque D no es un intervalo. Observe que f es constante en el intervalo $(0, \infty)$ y también en el intervalo $(-\infty, 0)$.

EJEMPLO 6 Demuestre la identidad $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \pi/2$.

SOLUCIÓN Aunque no se necesita al cálculo para demostrar esta identidad, la demostración con ayuda del cálculo es muy simple. Si $f(x) = \tan^{-1}x + \cot^{-1}x$, entonces

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + x^2} = 0$$

para todos los valores de x. Por lo tanto, $f(x) = C$, una constante. Para determinar el valor de C, $x = 1$, [porque así puede evaluar en forma exacta $f(1)$]. En consecuencia,

$$C = f(1) = \tan^{-1} 1 + \cot^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

En estos términos, $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \pi/2$. □

4.2 EJERCICIOS

1–4 Verifique que la función cumple las tres hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo dado. Luego determine todos los números c que cumplen con la conclusión del teorema de Rolle.

1. $f(x) = 5 - 12x + 3x^2, \quad [1, 3]$

2. $f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2, \quad [0, 3]$

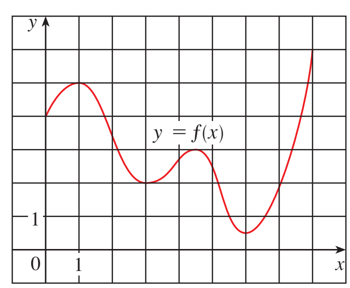
3. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x, \quad [0, 9]$

4. $f(x) = \cos 2x, \quad [\pi/8, 7\pi/8]$

5. Sea $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Demuestre que $f(-1) = f(1)$ pero no hay número c en $(-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Por qué esto no contradice al teorema de Rolle?

6. Sea $f(x) = \tan x$. Demuestre que $f(0) = f(\pi)$ pero no hay número c en $(0, \pi)$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Por qué esto no contradice al teorema de Rolle?

7. Use la gráfica f para estimar los valores de c que satisfagan la conclusión del teorema del valor medio para el intervalo $[0, 8]$.



8. Mediante la gráfica de f del ejercicio 7 estime los valores de c que cumplen con la conclusión del teorema del valor medio para el intervalo $[1, 7]$.

9. (a) Grafique la función $f(x) = x + 4/x$ en el rectángulo de visión $[0, 10]$ por $[0, 10]$.
(b) Trace la recta secante que pasa por los puntos (1, 5) y (8, 8.5) en la misma pantalla con f.
(c) Calcule el número c que satisface la conclusión del teorema del valor medio para esta función f y el intervalo $[1, 8]$. Luego grafique la tangente en el punto $(c, f(c))$ y observe que es paralela a la recta secante.

10. (a) En el rectángulo de visión $[-3, 3]$ por $[-5, 5]$, grafique la función $f(x) = x^3 - 2x$ y su recta secante que pasa por los puntos $(-2, -4)$ y $(2, 4)$. Mediante la gráfica estime las coordenadas x de los puntos donde la recta tangente es paralela a la recta secante.
(b) Calcule los valores exactos de los números c que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio para el intervalo $[-2, 2]$ y compare con las respuestas del inciso (a).

11–14 Compruebe que la función cumple con las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo dado. Después determine todos los números c que cumplen con la conclusión del teorema del valor medio

11. $f(x) = 3x^2 + 2x + 5, \quad [-1, 1]$

12. $f(x) = x^3 + x - 1, \quad [0, 2]$

13. $f(x) = e^{-2x}, \quad [0, 3]$

14. $f(x) = \dfrac{x}{x+2}, \quad [1, 4]$

---

15. Sea $f(x) = (x - 3)^{-2}$. Demuestre que no hay valor de c en (1, 4) tal que $f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1)$. ¿Por qué esto no contradice el teorema del valor medio?

16. Sea $f(x) = 2 - |2x - 1|$. Demuestre que no hay valor de c tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. ¿Por qué esto no contradice el teorema del valor medio?

17. Demuestre que la ecuación $1 + 2x + x^3 + 4x^5 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

18. Demuestre que la ecuación $2x - 1 - \operatorname{sen} x = 0$ tiene exactamente una raíz real.

19. Demuestre que la ecuación $x^3 - 15x + c = 0$ tiene cuando mucho una raíz en el intervalo $[-2, 2]$.

20. Demuestre que la ecuación $x^4 + 4x + c = 0$ tiene cuando mucho dos raíces reales.

21. (a) Demuestre que el polinomio de grado 3 tiene a lo más tres raíces reales.
(b) Demuestre que el polinomio de grado n tiene cuando mucho n raíces reales.

22. (a) Suponga que f es derivable en $\mathbb{R}$ y que tiene dos raíces. Demuestre que f' tiene por lo menos una raíz.
(b) Suponga que f es derivable dos veces en $\mathbb{R}$ y que tiene tres raíces. Demuestre que f'' tiene por lo menos una raíz real.
(c) ¿Puede generalizar los incisos (a) y (b)?

23. Si $f(1) = 10$ y $f'(x) \geqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 4$, ¿qué tan pequeña es posible que sea $f(4)$?

24. Suponga que $3 \leqslant f'(x) \leqslant 5$ para todos los valores de x. Demuestre que $18 \leqslant f(8) - f(2) \leqslant 30$.

25. ¿Existe una función f tal que $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ y $f'(x) \leqslant 2$ para toda x?

26. Suponga que f y g son continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Suponga además que $f(a) = g(a)$ y $f'(x) < g'(x)$ para $a < x < b$. Demuestre que $f(b) < g(b)$. [*Sugerencia*: aplique el teorema del valor medio a la función $h = f - g$.]

27. Demuestre que $\sqrt{1 + x} < 1 + \frac{1}{2}x$ si $x > 0$.

28. Suponga que f es una función impar y es derivable dondequiera. Demuestre que por cada número positivo b, existe un número c en $(-b, b)$ tal que $f'(c) = f(b)/b$.

29. Aplique el teorema del valor medio para demostrar la desigualdad

$$|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| \leqslant |a - b| \qquad \text{para toda } a \text{ y } b$$

30. Si $f'(x) = c$ (c es una constante) para toda x, aplique el corolario 7 para mostrar que $f(x) = cx + d$ para alguna constante d.

31. Sean $f(x) = 1/x$ y

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\[2ex] 1 + \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Demuestre que $f'(x) = g'(x)$ para toda x en sus dominios. ¿Puede concluir de acuerdo con el corolario 7 que $f - g$ es constante?

32. Aplique el método del ejemplo 6 para demostrar la identidad

$$2 \operatorname{sen}^{-1} x = \cos^{-1}(1 - 2x^2) \qquad x \geqslant 0$$

33. Demuestre la identidad

$$\operatorname{arcsen} \frac{x - 1}{x + 1} = 2 \arctan \sqrt{x} - \frac{\pi}{2}$$

34. A las 2:00 PM el velocímetro de un automóvil señala 30 millas/h. A las 2:10 PM indica 50 millas/h. Demuestre que en algún instante entre las 2:00 y las 2:10 la aceleración es exactamente 120 millas/h^2.

35. Dos corredores inician una carrera al mismo tiempo y terminan empatados. Demuestre que en algún momento durante la carrera tuvieron la misma velocidad. [*Sugerencia*: considere $f(t) = g(t) - h(t)$, donde g y h son las funciones de posición de los dos corredores.]

36. Un número a se denomina **punto fijo** de una función f si $f(a) = a$. Demuestre que si $f'(x) \neq 1$ para todos los números reales x, después f tiene cuando mucho un punto fijo.

4.3 MANERA EN QUE LAS DERIVADAS AFECTAN LA FORMA DE UNA GRÁFICA

Muchas de las aplicaciones del cálculo dependen de la habilidad para deducir hechos relacionados con una función f a partir de información que aportan sus derivadas. Como $f'(x)$ representa la pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$, indica la dirección en la cual la curva progresa en cada punto. Por eso es razonable esperar que la información con respecto a $f'(x)$ proporcione información relacionada con $f(x)$.

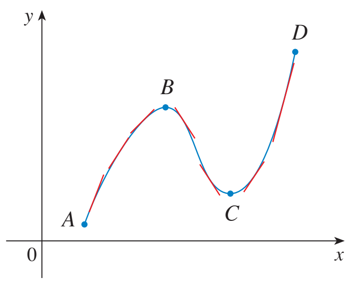


FIGURA 1

¿QUÉ DICE f' CON RESPECTO A f?

Para ver cómo la derivada de f puede decir dónde una función es creciente o decreciente observe la figura 1. (Las funciones crecientes y decrecientes se definen en la sección 1.1.) Entre A y B y entre C y D, las tangentes tienen pendiente positiva y de este modo $f'(x) > 0$. Entre B y C, las tangentes tienen pendiente negativa por lo que $f'(x) < 0$. Por esto, parece que f se incrementa cuando $f'(x)$ es positiva y decrece cuando $f'(x)$ es negativa. Para demostrar que siempre es así, se recurre al teorema del valor medio.

■ Abrevie el nombre de esta prueba llamándola prueba C/D.

PRUEBA CRECIENTE/DECRECIENTE

(a) Si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo, entonces f es creciente en ese intervalo.

(b) Si $f'(x) < 0$ sobre un intervalo, entonces f es decreciente en ese intervalo.

DEMOSTRACIÓN

(a) Sean x_1 y x_2 dos números cualesquiera en el intervalo, con $x_1 < x_2$. Según la definición de una función creciente (página 20) tiene que demostrar que $f(x_1) < f(x_2)$.

Debido a que $f'(x) > 0$, sabe que f es derivable sobre $[x_1, x_2]$. De modo que, por el teorema del valor medio existe un número c entre x_1 y x_2 tal que

$$\boxed{1} \qquad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Ahora bien, por hipótesis $f'(c) > 0$ y $x_2 - x_1 > 0$ porque $x_1 < x_2$. De este modo, el lado derecho de la ecuación 1 es positivo, con lo cual,

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad \text{o} \qquad f(x_1) < f(x_2)$$

Esto demuestra que f es creciente.

El inciso (b) se prueba de manera análoga. □

V EJEMPLO 1 Encuentre dónde crece la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ y dónde decrece.

SOLUCIÓN $$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)(x + 1)$$

Para aplicar la prueba C/D, debe saber dónde $f'(x) > 0$ y dónde $f'(x) < 0$. Esto depende de los signos de los tres factores de $f'(x)$; a saber, $12x$, $x - 2$ y $x + 1$. Divida la recta real en intervalos cuyos puntos extremos sean los números críticos -1, 0 y 2 y ordene su trabajo en una tabla. Un signo de más indica que la expresión dada es positiva y uno de menos, que es negativa. En la última columna de la tabla se da la conclusión basada en la prueba C/D. Por ejemplo, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$, de modo que f es decreciente sobre (0, 2). (También sería verdadero decir que f es decreciente sobre el intervalo cerrado [0, 2].)

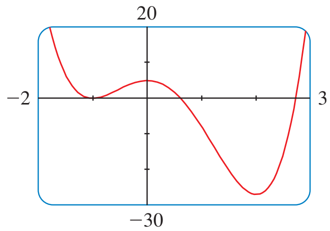


FIGURA 2

Intervalo	$12x$	$x-2$	$x+1$	$f'(x)$	f
$x<-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	decreciente sobre $(-\infty, -1)$
$-1<x<0$	$-$	$-$	$+$	$+$	creciente sobre $(-1, 0)$
$0<x<2$	$+$	$-$	$+$	$-$	decreciente sobre $(0, 2)$
$x>2$	$+$	$+$	$+$	$+$	creciente sobre $(2, \infty)$

La gráfica de f que se muestra en la figura 2, confirma la información que aparece en la tabla. □

Recuerde, por lo visto en la sección 4.1, que si f tiene un máximo o un mínimo locales en c, en tal caso c debe ser un número crítico de f (por el teorema de Fermat), pero no todos los números críticos dan lugar a un máximo o un mínimo. Debido a eso, necesita una prueba que le diga si f tiene o no un máximo o un mínimo locales en un número crítico.

En la figura 2 puede ver que $f(0) = 5$ es un valor máximo local porque f crece sobre $(-1, 0)$ y decrece sobre $(0, 2)$. O, en términos de derivadas, $f'(x) > 0$ para $-1 < x < 0$ y $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$. En otras palabras, el signo de $f'(x)$ cambia de positivo a negativo en 0. Esta observación constituye la base de la prueba siguiente.

PRUEBA DE LA PRIMERA DERIVADA Suponga que c es un número crítico de una función continua f.

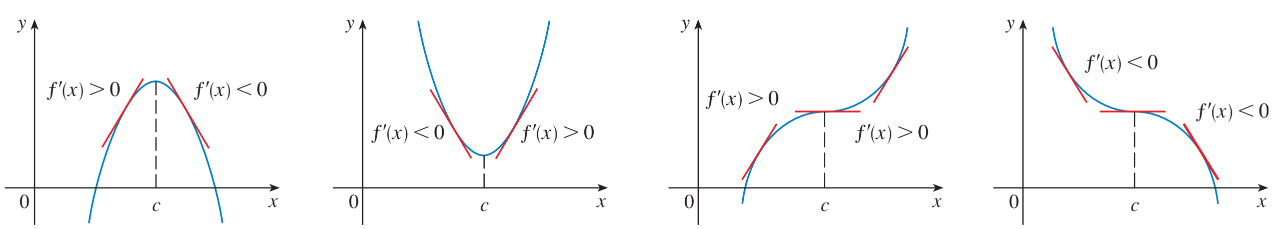
(a) Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c.

(b) Si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un mínimo local en c.

(c) Si f' no cambia de signo en c (es decir, f' es positiva en ambos lados de c, o negativa en ambos lados), entonces f no tiene máximo ni mínimo locales en c.

La prueba de la primera derivada es consecuencia de la prueba C/D. En el inciso (a), por ejemplo, como el signo de $f'(x)$ cambia de positivo a negativo en c, f es creciente a la izquierda de c y decreciente a su derecha. Se concluye que f tiene un máximo local en c.

Para recordar fácilmente la prueba de la primera derivada, observe los diagramas de la figura 3



(a) Máximo local (b) Mínimo local (c) Ni máximo ni mínimo (d) Ni máximo ni mínimo

FIGURA 3

V EJEMPLO 2 Encuentre los valores máximos y mínimos locales de la función f del ejemplo 1.

SOLUCIÓN A partir de la tabla de la solución para el ejemplo 1, $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en -1, de modo que $f(-1) = 0$ es un valor mínimo local por la Prueba de la primera derivada. De manera análoga, f' cambia de negativa a positiva en 2, de modo que $f(2) = -27$ también es un valor mínimo local. Como ya se hizo notar, $f(0) = 5$ es un valor máximo local porque $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en 0. □

EJEMPLO 3 Determine los valores máximo y mínimo de la función

$$g(x) = x + 2 \operatorname{sen} x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

SOLUCIÓN Con el fin de calcular los números críticos de g derive:

$$g'(x) = 1 + 2 \cos x$$

De tal manera $g'(x) = 0$ cuando $\cos x = -\frac{1}{2}$. Las soluciones de esta ecuación son $2\pi/3$ y $4\pi/3$. Como g es derivable dondequiera, los únicos números críticos son $2\pi/3$ y $4\pi/3$ y de esta manera se analiza g en la tabla siguiente.

■ Los signos + de la tabla provienen del hecho de que $g'(x) > 0$ cuando $\cos x > -\frac{1}{2}$. A partir de la gráfica de $y = \cos x$, esto es verdadero en los intervalos indicados.

Intervalo	$g'(x) = 1 + 2\cos x$	g
$0 < x < 2\pi/3$	+	creciente en $(0, 2\pi/3)$
$2\pi/3 < x < 4\pi/3$	−	decreciente en $(2/3, 4\pi/3)$
$4\pi/3 < x < 2\pi$	+	creciente en $(4\pi/3, 2\pi)$

Puesto que $g'(x)$ cambia de positivo a negativo en $2\pi/3$, la prueba de la primera derivada establece que hay un máximo local en $2\pi/3$ y que el máximo local es

$$g(2\pi/3) = \frac{2\pi}{3} + 2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 3.83$$

De manera similar, $g'(x)$ pasa de negativo a positivo en $4\pi/3$ por lo que

$$g(4\pi/3) = \frac{4\pi}{3} + 2 \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \approx 2.46$$

es un valor mínimo local. La gráfica de g en la figura 4 apoya esta conclusión.

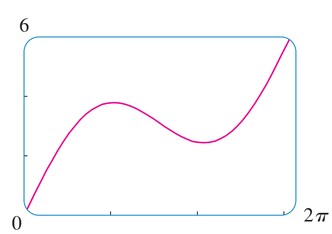


FIGURA 4
$y = x + 2 \operatorname{sen} x$ □

¿QUÉ DICE f'' CON RESPECTO A f?

En la figura 5 se ilustran las gráficas de dos funciones crecientes en (a, b). Ambas gráficas unen el punto A con el punto B, pero lucen distintas porque se flexionan en direcciones diferentes. ¿Cómo se puede distinguir entre estos dos tipos de comportamientos? En la figura 6, las tangentes a estas curvas se han dibujado en diferentes puntos. En (a) la curva queda por arriba de las tangentes y se dice que f es *cóncava hacia arriba* en (a, b). En (b), la curva se sitúa abajo de las tangentes y entonces se dice que g es *cóncava hacia abajo* en (a, b).

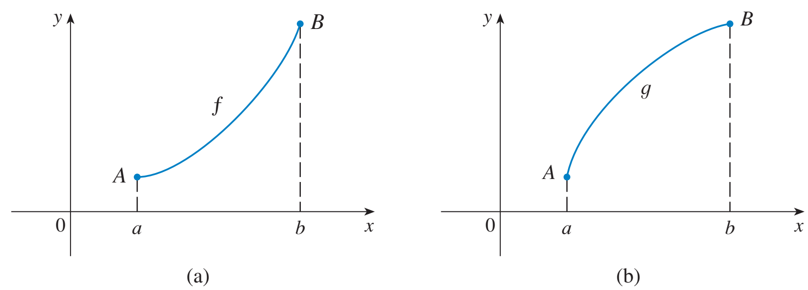


FIGURA 5

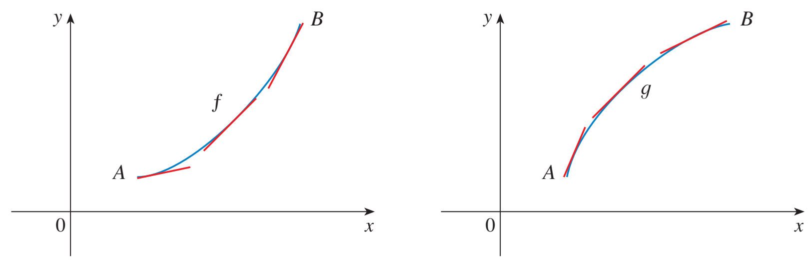


FIGURA 6 (a) Cóncava hacia arriba (b) Cóncava hacia abajo

> **DEFINICIÓN** Si la gráfica de f queda por arriba de todas sus tangentes en un intervalo I, entonces se dice que es **cóncava hacia arriba** en I. Si la gráfica de f queda por abajo de todas sus tangentes en I, se dice que es **cóncava hacia abajo** en I.

En la figura 7 se muestra la gráfica de una función que es cóncava hacia arriba (abreviado CA) en los intervalos (b, c), (d, e) y (e, p) y cóncava hacia abajo (CAB) en los intervalos (a, b), (c, d) y (p, q).

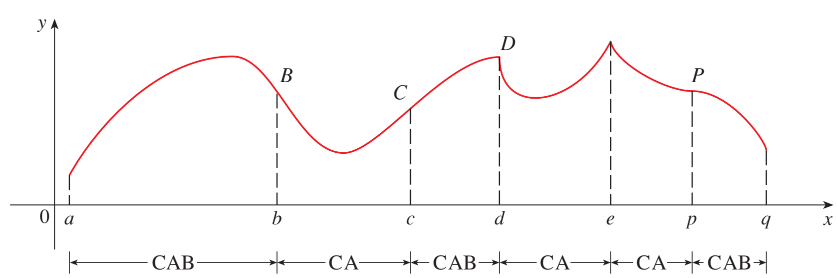


FIGURA 7

Vea cómo la segunda derivada ayuda a determinar los intervalos de concavidad. Al inspeccionar la figura 6(a) se puede ver que se incrementa, de izquierda a derecha, la pendiente de la tangente.

Esto quiere decir que la derivada f' es una función creciente y, por lo tanto, su derivada f'' es positiva. En forma similar, en la figura 6(b) la pendiente de la tangente disminuye de izquierda a derecha, por lo que f' decrece y, por consiguiente, f'' es negativa. Este razonamiento se puede invertir y lleva a pensar que el teorema siguiente es verdadero. En el apéndice F se presenta una demostración con la ayuda del teorema del valor medio.

PRUEBA DE LA CONCAVIDAD

(a) Si $f''(x) > 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre I.

(b) Si $f''(x) < 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre I.

EJEMPLO 4 En la figura 8 se ilustra una gráfica de una población de las abejas mieleras que han sido criadas en un apiario. ¿Cuál es el incremento de la proporción de población con respecto al tiempo? ¿Cuándo este incremento alcanza su punto más alto? ¿En qué intervalos P es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo?

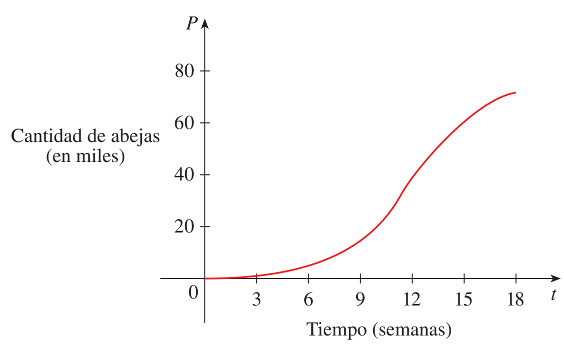


FIGURA 8

SOLUCIÓN Al examinar la pendiente de la curva cuando t se incrementa, se ve que la proporción del incremento de la población es al principio muy pequeña, luego aumenta hasta que alcanza un valor máximo alrededor de $t = 12$ semanas, y disminuye cuando la población empieza a nivelarse. A medida que la población se aproxima a su valor máximo de casi 75 000 (que se denomina *capacidad conducción*, el incremento, $P'(t)$, tiende a 0. Al parecer, la curva es cóncava hacia arriba en (0, 12) y cóncava hacia abajo en (12, 18). □

En el ejemplo 4, la curva de población pasó de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo por el punto (12, 38 000). Este punto se llama *punto de inflexión* de la curva. La importancia de este punto es que el valor máximo del incremento de la población está allí. En general, un punto de inflexión es un punto donde cambia de dirección la concavidad de una curva.

DEFINICIÓN Un punto P en una curva $y = f(x)$ recibe el nombre de **punto de inflexión** si f es continua ahí y la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba en P.

Por ejemplo, en la figura 7, B, C, D y P son los puntos de inflexión. Observe que si una curva tiene una tangente en un punto de inflexión, después la curva corta a la tangente en ese punto.

De acuerdo con la prueba de concavidad, hay un punto de inflexión en cualquier punto donde la segunda derivada cambia de signo.

EJEMPLO 5 Trace una posible gráfica de una función f que cumple con las condiciones siguientes:

(i) $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 1)$, $f'(x) < 0$ en $(1, \infty)$

(ii) $f''(x) > 0$ en $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$, $f''(x) < 0$ en $(-2, 2)$

(iii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

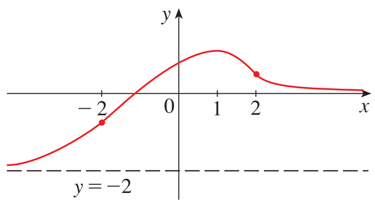


FIGURA 9

SOLUCIÓN La condición (i) establece que f es creciente en $(-\infty, 1)$ y decreciente en $(1, \infty)$. La condición (ii) dice que f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$, y cóncava hacia abajo en $(-2, 2)$. Por la condición (iii) sabe que la gráfica de f tiene dos asíntotas horizontales: $y = -2$ y $y = 0$.

Primero se dibuja la asíntota horizontal $y = -2$ como una línea discontinua (véase figura 9). Después trace la gráfica de f, que se aproxima a esta asíntota por la izquierda, llega a su punto máximo en $x = 1$ y decrece acercándose al eje x a la derecha. También se tiene la certeza de que la gráfica tiene puntos de inflexión cuando $x = -2$ y 2. Observe que se hizo que la curva se doble hacia arriba para $x < -2$ y $x > 2$, y se flexiona hacia abajo cuando x está entre -2 y 2. □

Otra aplicación de la segunda derivada es la siguiente prueba para encontrar los valores máximo y mínimo. Es una consecuencia de la prueba de concavidad.

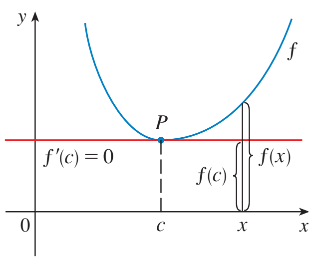


FIGURA 10
$f''(c) > 0$, f es cóncava hacia arriba

PRUEBA DE LA SEGUNDA DERIVADA Suponga que f'' es continua cerca de c.

(a) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en c.

(b) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en c.

Por ejemplo, el inciso (a) es verdadero porque $f''(x) > 0$ cerca de c y, por consiguiente, f es cóncava hacia arriba cerca de c. Esto significa que la gráfica de f se encuentra *arriba* de su tangente horizontal en c, por lo que f tiene un mínimo local en c. (Véase la figura 10.)

EJEMPLO 6 Analice la curva $y = x^4 - 4x^3$ con respecto a la concavidad, puntos de inflexión y máximos y mínimos locales. Use esta información para dibujar la curva.

SOLUCIÓN Si $f(x) = x^4 - 4x^3$, entonces

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$$

A fin de hallar los números críticos, haga $f'(x) = 0$ y obtiene $x = 0$ y $x = 3$. Para aplicar la prueba de la segunda derivada, evalúe f'' en estos números críticos:

$$f''(0) = 0 \qquad f''(3) = 36 > 0$$

Como $f'(3) = 0$ y $f''(3) > 0$, $f(3) = -27$ es un mínimo local. Dado que $f''(0) = 0$, la prueba de la segunda derivada no da información acerca del número crítico 0. Pero como $f'(x) < 0$ para $x < 0$ y también para $0 < x < 3$, la prueba de la primera derivada dice que f no tiene máximo ni mínimo locales en 0. [En efecto, la expresión de $f'(x)$ muestra que f decrece a la izquierda de 3 y se incrementa a la derecha de 3.]

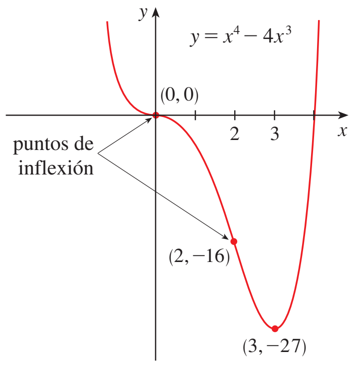


FIGURA 11

Como $f''(x) = 0$ cuando $x = 0$ o 2, divida la recta real en intervalos con estos números como puntos extremos y complete la tabla siguiente.

Intervalo	$f''(x) = 12x(x - 2)$	Concavidad
$(-\infty, 0)$	$+$	hacia arriba
$(0, 2)$	$-$	hacia abajo
$(2, \infty)$	$+$	hacia arriba

El punto (0, 0) es un punto de inflexión, ya que la curva cambia allí de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo. Asimismo, $(2, -16)$ es un punto de inflexión, puesto que la curva cambia allí de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba.

Con el uso del mínimo local, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión se dibuja la curva de la figura 11. □

NOTA La prueba de la segunda derivada no es concluyente cuando $f''(c) = 0$. En otras palabras, en ese punto podría haber un máximo, un mínimo o ninguno de los dos (como en el ejemplo 6). Esta prueba no funciona cuando $f''(c)$ no existe. En estos casos, debe aplicarse la prueba de la primera derivada. De hecho, incluso cuando ambas pruebas son aplicables, a menudo la prueba de la primera derivada es más fácil de usar.

EJEMPLO 7 Trace la gráfica de la función $f(x) = x^{2/3}(6 - x)^{1/3}$.

SOLUCIÓN Puede recurrir a las reglas de la derivación para comprobar que las dos primeras derivadas son

$$f'(x) = \frac{4 - x}{x^{1/3}(6 - x)^{2/3}} \qquad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6 - x)^{5/3}}$$

Como $f'(x) = 0$ cuando $x = 4$ y $f'(x)$ no existe cuando $x = 0$ o $x = 6$, los números críticos son 0, 4 y 6.

Intervalo	$4 - x$	$x^{1/3}$	$(6 - x)^{2/3}$	$f'(x)$	f
$x < 0$	$+$	$-$	$+$	$-$	decreciente en $(-\infty, 0)$
$0 < x < 4$	$+$	$+$	$+$	$+$	creciente en $(0, 4)$
$4 < x < 6$	$-$	$+$	$+$	$-$	decreciente en $(4, 6)$
$x > 6$	$-$	$+$	$+$	$-$	decreciente en $(6, \infty)$

■ Intente reproducir la gráfica de la figura 12 con una calculadora graficadora o una computadora. Algunas máquinas producen la gráfica completa, otras generan sólo la parte de la derecha del eje y algunas otras nada más la parte entre $x = 0$ y $x = 6$. Para obtener la explicación y el remedio, vea el ejemplo 7 de la sección 1.4. Una expresión equivalente que da la gráfica correcta es

$$y = (x^2)^{1/3} \cdot \frac{6 - x}{|6 - x|} |6 - x|^{1/3}$$

Para hallar los valores extremos locales, use la prueba de la primera derivada. Dado que f' cambia de negativa a positiva en 0, $f(0) = 0$ es un mínimo local. Como f' pasa de positiva a negativa en 4, $f(4) = 2^{5/3}$ es un máximo local. El signo de f' no varía en 6, de modo que allí no hay mínimo ni máximo. (Se podría usar la prueba de la segunda derivada en 4, pero no en 0 o 6, puesto que f'' no existe en ninguno de estos números.)

Si se estudia la expresión para $f''(x)$ y se observa que $x^{4/3} \geqslant 0$ para todo x, tiene $f''(x) < 0$ para $x < 0$ y para $0 < x < 6$ y $f''(x) > 0$ para $x > 6$. De modo que f es cóncava hacia abajo sobre $(-\infty, 0)$ y $(0, 6)$, cóncava hacia arriba sobre $(6, \infty)$, y el único punto de inflexión es $(6, 0)$. En la figura 12 se encuentra la gráfica. Observe que la curva tiene tangentes verticales en $(0, 0)$ y $(6, 0)$ porque $|f'(x)| \to \infty$ cuando $x \to 0$ y cuando $x \to 6$. □

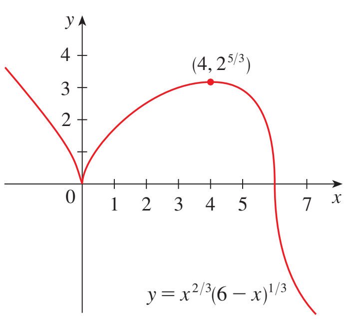


FIGURA 12

EJEMPLO 8 Use la primera y segunda derivadas de $f(x) = e^{1/x}$, más las asíntotas para dibujar su gráfica.

SOLUCIÓN Advierta que el dominio de f es $\{x \mid x \neq 0\}$, de modo que se hace la comprobación en relación con las asíntotas verticales calculando los límites por la izquierda y por la derecha cuando $x \to 0$. Cuando $x \to 0^+$, sabe que $t = 1/x \to \infty$, de suerte que

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = \lim_{t\to\infty} e^t = \infty$$

y esto hace ver que $x = 0$ es un asíntota vertical. Cuando $x \to 0^-$, tiene $t = 1/x \to -\infty$, de igual manera

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t\to-\infty} e^t = 0$$

TEC En Module 4.3 puede practicar usando la información gráfica sobre f' para determinar la forma de la gráfica de f.

Cuando $x \to \pm\infty$, tiene $1/x \to 0$ de este modo,

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$$

Esto demuestra que $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Calcule ahora la derivada. la regla de la cadena da

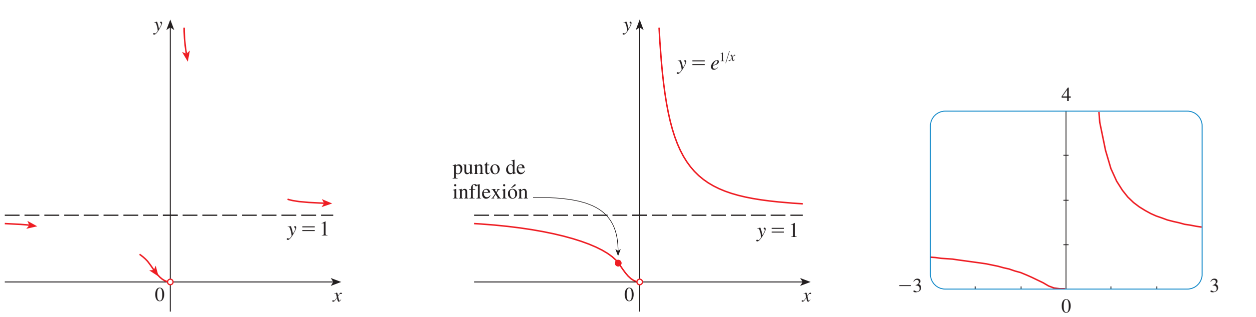
$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$$

Dado que $e^{1/x} > 0$ y $x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$, tiene $f'(x) < 0$ para todo $x \neq 0$. Por esto, f es decreciente sobre $(-\infty, 0)$ y sobre $(0, \infty)$. No hay número crítico, de forma que la función no tiene máximo ni mínimo. La segunda derivada es

$$f''(x) = -\frac{x^2 e^{1/x}(-1/x^2) - e^{1/x}(2x)}{x^4} = \frac{e^{1/x}(2x+1)}{x^4}$$

Como $e^{1/x} > 0$ y $x^4 > 0$, tiene $f''(x) > 0$ cuando $x > -\frac{1}{2}$ $(x \neq 0)$ y $f''(x) < 0$ cuando $x < -\frac{1}{2}$. Por consiguiente, la curva es cóncava hacia abajo sobre $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ y cóncava hacia arriba sobre $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ y sobre $(0, \infty)$. El punto de inflexión es $\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$.

Para dibujar f, primero trace la asíntota horizontal $y = 1$ (como una línea intermitente), junto con las partes de la curva que están cerca de ella, en un esquema preliminar [figura 13(a)]. Estas partes reflejan la información referente a los límites y al hecho de que f es decreciente tanto sobre $(-\infty, 0)$ como sobre $(0, \infty)$. Advierta que ha indicado que $f(x) \to 0$ cuando $x \to 0^-$ aun cuando $f(0)$ no exista. En la figura 13(b) se termina el dibujo incorporando la información referente a la concavidad y al punto de inflexión. En la figura 13(c) se comprueba el trabajo con un aparato graficador.



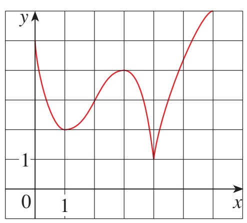
(a) Esquema preliminar (b) Dibujo terminado (c) Conformación por computadora

FIGURA 13

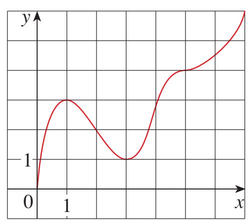
4.3 EJERCICIOS

1–2 Mediante la gráfica de f que se proporciona determine lo siguiente:
(a) Los intervalos abiertos en los cuales f es creciente.
(b) Los intervalos abiertos en los cuales f es decreciente.
(c) Los intervalos abiertos en los cuales f es cóncava hacia arriba.
(d) Los intervalos abiertos en los cuales f es cóncava hacia abajo.
(e) Las coordenadas de los puntos de inflexión.

1.



2.

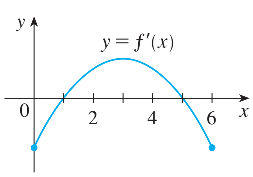


3. Suponga que se le da una fórmula para una función f.
(a) ¿Cómo determina dónde f es creciente o decreciente?
(b) ¿Cómo determina en dónde la gráfica de f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo?
(c) ¿Cómo localiza los puntos de inflexión?

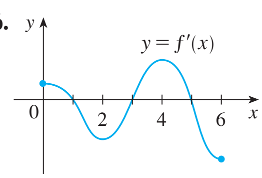
4. (a) Enuncie la prueba de la primera derivada.
(b) Enuncie la prueba de la segunda derivada. ¿En cuáles circunstancias no es concluyente? ¿Qué haría si falla?

5–6 Se ilustra la gráfica de la *derivada* f' de una función f.
(a) ¿En qué intervalos f es creciente o decreciente?
(b) ¿En qué valores de x la función f tiene un máximo local o un mínimo local?

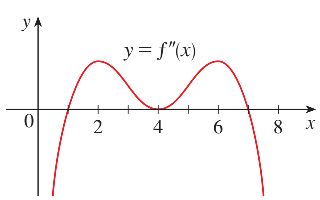
5.



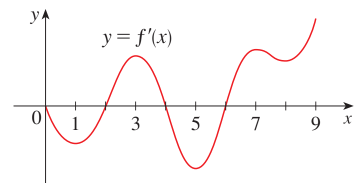
6.



7. Se muestra la gráfica de la segunda derivada f'' de una función f. Dé las coordenadas x de los puntos de inflexión de f. Exprese las razones que fundamentan sus respuestas.



8. Se ilustra la gráfica de la primera derivada f' de una función f.
(a) ¿Sobre cuáles intervalos f es creciente? Explique.
(b) ¿En cuáles valores de x tiene f un máximo o un mínimo locales? Explique.
(c) ¿Sobre cuáles intervalos f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo? Explique.
(d) ¿Cuáles son las coordenadas x de los puntos de inflexión de f? ¿Por qué?



9–18
(a) Encuentre los intervalos sobre los cuales f es creciente o decreciente.
(b) Halle los valores máximos y mínimos locales de f.
(c) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

9. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$

10. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

11. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

12. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

13. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

14. $f(x) = \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

15. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

16. $f(x) = x^2 \ln x$

17. $f(x) = (\ln x)/\sqrt{x}$

18. $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$

19–20 Encuentre los valores máximos y mínimos locales de f utilizando las pruebas de la primera y la segunda derivadas. ¿Cuál método prefiere?

19. $f(x) = x^5 - 5x + 3$

20. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

21. $f(x) = x + \sqrt{1 - x}$

22. (a) Halle los números críticos de $f(x) = x^4(x - 1)^3$.
(b) ¿Qué le dice la prueba de la segunda derivada con respecto al comportamiento de f sobre estos puntos críticos?
(c) ¿Qué le dice la prueba de la segunda derivada?

23. Suponga que f'' es continua sobre $(-\infty, \infty)$.
(a) Si $f'(2) = 0$ y $f''(2) = -5$, ¿qué puede usted decir acerca de f?
(b) Si $f'(6) = 0$ y $f''(6) = 0$, ¿qué puede usted decir acerca de f?

24–29 Trace la gráfica de una función que cumple todas las condiciones dadas.

24. $f'(x) > 0$ para toda $x \neq 1$, asíntota vertical $x = 1$,
$f''(x) > 0$ si $x < 1$ o $x > 3$, $f''(x) < 0$ si $1 < x < 3$

25. $f'(0) = f'(2) = f'(4) = 0$,
$f'(x) > 0$ si $x < 0$ o $2 < x < 4$,
$f'(x) < 0$ si $0 < x < 2$ o $x > 4$,
$f''(x) > 0$ si $1 < x < 3$, $f''(x) < 0$ si $x < 1$ o $x > 3$

26. $f'(1) = f'(-1) = 0, \quad f'(x) < 0$ si $|x| < 1,$
$f'(x) > 0$ si $1 < |x| < 2, \quad f'(x) = -1$ si $|x| > 2,$
$f''(x) < 0$ si $-2 < x < 0,$ punto de inflexión $(0, 1)$

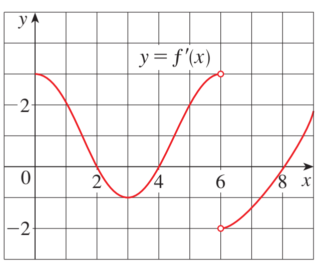
27. $f'(x) > 0$ si $|x| < 2, \quad f'(x) < 0$ si $|x| > 2,$
$f'(-2) = 0, \quad \lim_{x\to 2} |f'(x)| = \infty, \quad f''(x) > 0$ si $x \neq 2$

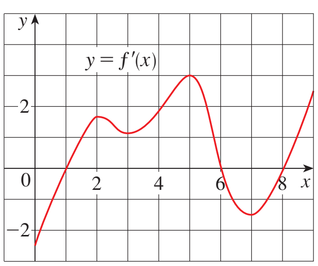
28. $f'(x) > 0$ si $|x| < 2, \quad f'(x) < 0$ si $|x| > 2,$
$f'(2) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 1, \quad f(-x) = -f(x),$
$f''(x) < 0$ si $0 < x < 3, \quad f''(x) > 0$ si $x > 3$

29. $f'(x) < 0$ y $f''(x) < 0$ para toda x

30. Considere $f(3) = 2$, $f'(3) = \frac{1}{2}$, y $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$ para toda x
(a) Dibuje una gráfica posible para f.
(b) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = 0$ ¿Por qué?
(c) ¿Es posible que $f'(2) = \frac{1}{3}$ ¿Por qué?

31–32 Se proporciona la gráfica de la derivada f' de una función continua f.
(a) ¿En qué intervalos la función f es creciente o decreciente?
(b) ¿En qué valores de x la función f tiene un máximo local o un mínimo local?
(c) ¿En qué intervalos f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo?
(d) Establezca la(s) coordenada(s) x del punto o de los puntos de inflexión.
(e) Suponga que $f(0) = 0$, y grafique f.

31.


32.


33–44
(a) Halle los intervalos de crecimiento o decremento.
(b) Encuentre los valores máximos y mínimos locales.
(c) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.
(d) Use la información de los incisos (a), (b) y (c) para dibujar f. Compruebe su respuesta con un aparato graficador si cuenta con uno.

33. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$
34. $f(x) = 2 + 3x - x^3$
35. $f(x) = 2 + 2x^2 - x^4$
36. $g(x) = 200 + 8x^3 + x^4$
37. $h(x) = (x + 1)^5 - 5x - 2$
38. $h(x) = x^5 - 2x^3 + x$
39. $A(x) = x\sqrt{x + 3}$
40. $B(x) = 3x^{2/3} - x$
41. $C(x) = x^{1/3}(x + 4)$
42. $f(x) = \ln(x^4 + 27)$
43. $f(\theta) = 2\cos\theta + \cos^2\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$
44. $f(t) = t + \cos t, \quad -2\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$

45–52
(a) Encuentre las asíntotas verticales y horizontales.
(b) Halle los intervalos donde crece o decrece.
(c) Encuentre los valores máximos y mínimos locales.
(d) Halle los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.
(e) Use la información de los incisos (a) y (d) para dibujar f.

45. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$
46. $f(x) = \dfrac{x^2}{(x - 2)^2}$
47. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$
48. $f(x) = x\tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$
49. $f(x) = \ln(1 - \ln x)$
50. $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$
51. $f(x) = e^{-1/(x+1)}$
52. $f(x) = e^{\arctan x}$

53. Considere que la derivada de una función $f'(x) = (x - 1)^2(x - 3)^5(x - 6)^4$. ¿En qué intervalo se incrementa f?

54. Aplique los métodos de esta sección para bosquejar la curva $y = x^3 - 3a^2x + 2a^3$ donde a es una constante positiva. ¿Qué tienen de común los miembros de esta familia de curvas? ¿Cómo difieren entre si?

55–56
(a) Utilice una gráfica de f para estimar los valores máximos y mínimos. Enseguida encuentre los valores exactos.
(b) Estime el valor de x con el cual f se incrementa más rápidamente. Después encuentre el valor exacto.

55. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
56. $f(x) = x^2e^{-x}$

57–58
(a) Use una gráfica de f para dar un estimado aproximado de los intervalos de concavidad y las coordenadas de los puntos de inflexión.
(b) Use una gráfica de f'' para ofrecer estimaciones mejores.

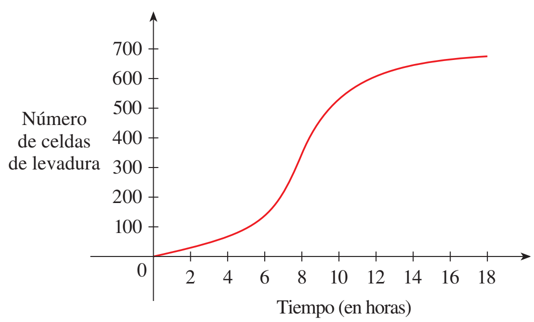
57. $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

58. $f(x) = x^3(x-2)^4$

CAS **59–60** Estime los intervalos de concavidad hasta una cifra decimal con un sistema algebraico para computadora con el fin de calcular y trazar la gráfica de f''.

59. $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ **60.** $f(x) = \dfrac{x^2 \tan^{-1} x}{1 + x^3}$

61. Se conoce una gráfica de la población de células de levadura en un cultivo de laboratorio reciente como una función del tiempo
(a) Describa cómo varía la rápidez de incremento de población.
(b) ¿Cuándo es más alta la rápidez?
(c) ¿En qué intervalos la función población es cóncava hacia arriba o hacia abajo?
(d) Estimar las coordenadas del punto de inflexión



62. Sea $f(t)$ la temperatura en el tiempo t donde habita y considera que en el tiempo $t = 3$ se siente incomodo por lo caluroso. ¿Cómo se sente con respecto a la información que se proporciona en cada caso?
(a) $f'(3) = 2,\ f''(3) = 4$ (b) $f'(3) = 2,\ f''(3) = -4$
(c) $f'(3) = -2,\ f''(3) = 4$ (d) $f'(3) = -2,\ f''(3) = -4$

63. Sea $K(t)$ una medida de los conocimientos que obtiene usted al estudiar para un examen durante t horas. ¿Cuál opina usted que es más grande, $K(8) - K(7)$ o $K(3) - K(2)$? ¿La gráfica de K es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo? ¿Por qué?

64. Se vierte café en la jarrita que se ilustra en la figura a una rapidez constante (medida en volumen por unidad de tiempo). Trace una gráfica aproximada del espacio ocupado por el café como función del tiempo. Explique la forma de la gráfica en términos de la concavidad. ¿Cuál es el significado del punto de inflexión?

65. Una *curva de respuesta a un medicamento* describe los niveles de dosificación en el torrente sanguíneo después de que se ha administrado un medicamento. Con frecuencia se aplica una función de onda de impulso $S(t) = At^p e^{-kt}$ para representar la curva de respuesta, revelando una oleada inicial en el nivel de medicamento y a continuación una declinación gradual. Si, para un medicamento particular, $A = 0.01$, $p = 4$, $k = 0.07$, y t se mide en minutos, estimar el tiempo correspondiente a los puntos de inflexión y explique su significado. Si tiene un dispositivo graficador, utilícelo para dibujar la curva de respuesta.

66. La familia de curvas acampanadas

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

se presenta en probabilidad y estadística y se le denomina *función de densidad normal*. La constante μ se conoce como media y la constante positiva σ es la *desviación estándar*. Por sencillez, cambie la escala de la función de modo que se elimine el factor $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ y analice el caso especial donde $\mu = 0$. Por lo tanto, estudie la función

$$f(x) = e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

(a) Encuentre la asíntota, el valor máximo y los puntos de inflexión de f.
(b) ¿Qué función desempeña σ en la forma de la curva?
(c) Ilustre lo anterior trazando la gráfica de cuatro miembros de esta familia en la misma pantalla.

67. Encuentre una función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que tenga un valor máximo local de 3 en -2 y un valor mínimo local de 0 en 1.

68. ¿Para cuáles valores de los números a y b la función

$$f(x) = axe^{bx^2}$$

tiene el valor máximo $f(2) = 1$?

69. Demuestre que la curva *insertar formula* tiene tres puntos de inflexión y se encuentran en una línea recta.

70. Demuestre que las curvas $y = e^{-x}$ y $y = -e^{-x}$ toca la curva $y = e^{-x}$ sen x en sus puntos de inflexión.

71. Suponga que f es derivable en un intervalo I y $f'(x) > 0$ para todos los números x en I, excepto para un número c. Demuestre que f es creciente en el intervalo completo I.

72–74 Suponga que todas las funciones son derivables dos veces y que la segunda derivada nunca es 0.

72. (a) Si f y g son cóncavas hacia arriba en I, demuestre que $f + g$ es cóncava hacia arriba en I.
(b) Si f es positiva y cóncava hacia arriba en I, demuestre que la función $g(x) = [f(x)]^2$ es cóncava hacia arriba en I.

73. (a) Si f y g son funciones positivas, crecientes, cóncavas hacia arriba en I, demuestre que la función producto fg es cóncava hacia arriba en I.
(b) Demuestre que el inciso (a) sigue siendo verdadero si f y g son decrecientes.

(c) Suponga que f es creciente y que g es decreciente. Demuestre mediante tres ejemplos que fg podría ser cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo o lineal. ¿Por qué no se aplica el razonamiento de los incisos (a) y (b) en este caso?

74. Suponga que f y g son cóncavas hacia arriba en $(-\infty, \infty)$. ¿En qué condiciones de f la función compuesta $h(x) = f(g(x))$ será cóncava hacia arriba?

---

75. Demuestre que $\tan x > x$ para $0 < x < \pi/2$. [*Sugerencia:* Demuestre que $f(x) = \tan x - x$ es creciente en $(0, \pi/2)$.]

76. (a) Demuestre que $e^x \geqslant 1 + x$ para $x \geqslant 0$.
(b) Infiera que $e^x \geqslant 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ para $x \geqslant 0$.
(c) Aplique la inducción matemática para probar que para $x \geqslant 0$ y cualquier entero positivo n,

$$e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

77. Demuestre que una función cúbica (un polinomio de tercer grado) siempre tiene con exactitud un punto de inflexión. Si su gráfica tiene tres intersecciones x_1, x_2 y x_3, demuestre que la coordenada x del punto de inflexión es $(x_1 + x_2 + x_3)/3$.

78. ¿Para cuáles valores de c el polinomio $P(x) = x^4 + cx^3 + x^2$ tiene dos puntos de inflexión diferentes? ¿Acaso ninguno? Ilustre dibujando P para diversos valores de c. ¿Cómo cambia la gráfica a medida que c decrece?

79. Demuestre que si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica f y f'' existe en un intervalo abierto que contiene c, entonces $f''(c) = 0$. [*Sugerencia*: aplique la prueba de la primera derivada y el teorema de Fermat a la función $g = f'$.]

80. Demuestre que si $f(x) = x^4$, entonces $f''(0) = 0$, pero $(0, 0)$ no es un punto de inflexión de la gráfica de f.

81. Demuestre que la función $g(x) = x|x|$ posee un punto de inflexión en $(0, 0)$ pero $g''(0)$ no existe.

82. Suponga que f''' es continua y $f'(c) = f''(c) = 0$, pero $f'''(c) > 0$. ¿La función f tiene un máximo relativo o un mínimo relativo en c? ¿Tiene f un punto de inflexión en c?

83. Los tres casos en la prueba de la primera derivada cubren las situaciones que por lo general uno se encuentra, pero sin extraer todas las posibilidades. Considere las funciones f, g y h cuyos valores en 0 todos son 0 y, para $x \neq 0$,

$$f(x) = x^4 \operatorname{sen} \frac{1}{4} \qquad g(x) = x^4 \left(2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$$

$$h(x) = x^4 \left(-2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$$

(a) Demuestre que 0 es un número crítico de las tres funciones pero sus derivadas cambian de signo con frecuencia de manera infinita en ambos lados de acero.
(b) Demuestre que f no tiene un máximo local ni un mínimo local en 0, g tiene un mínimo local, y h tiene un máximo local.

4.4 FORMAS INDETERMINADAS Y LA REGLA DE L'HOSPITAL

Suponga que intenta analizar el comportamiento de la función

$$F(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$$

Aunque F no está definida cuando $x = 1$, necesita saber cómo se comporta F *cerca* de 1. En particular, le gustaría conocer el valor del límite

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} \tag{1}$$

Pero no puede aplicar la ley 5 de los límites (el límite del cociente es el cociente de los límites, véase sección 2.3) porque el límite del denominador es 0. De hecho, aun cuando el límite en (1) existe, su valor no es obvio porque el numerador y el denominador tienden a 0 y $\frac{0}{0}$ no está definido.

En general, si tiene un límite de la forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde tanto $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$ cuando $x \to a$, en tal caso este límite puede existir o no y se conoce como **forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$**. En el capítulo 2 encontró algunos límites de este tipo. Para las funciones racionales, puede cancelar los factores comunes:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$$

Aplique un argumento geométrico para demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$$

Pero estos métodos no funcionan para límites como el (1) de modo que, en esta sección, se presenta un método sistemático, conocido como *regla de l'Hospital,* para la evaluación de formas indeterminadas.

Se tiene otra situación en que un límite no es obvio cuando busca una asíntota horizontal de F y necesita evaluar el límite

2 $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x-1}$$

No es evidente cómo evaluar este límite porque el numerador y el denominador se hacen grandes cuando $x\to\infty$. Hay una lucha entre el numerador y el denominador. Si gana el numerador, el límite será ∞; si gana el denominador, la respuesta será 0. O puede haber un término medio, en cuyo caso la respuesta puede ser algún número positivo finito.

En general, si tiene un límite de la forma

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

donde tanto $f(x)\to\infty$ (o $-\infty$) y $g(x)\to\infty$ (o $-\infty$), entonces el límite puede existir o no y se conoce como **forma indeterminada del tipo ∞/∞**. En la sección 2.6 vio que este tipo de límite se puede evaluar para ciertas funciones, incluso las racionales, al dividir el numerador y el denominador entre la mayor potencia de x que se presenta en el denominador. Por ejemplo,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1-0}{2+0}=\frac{1}{2}$$

Este método no funciona para límites como el (2), pero también puede aplicarse la regla de l'Hospital a este tipo de forma indeterminada.

L'HOSPITAL

Se le nombre la regla de l'Hôspital en honor al Marqués de l´Hôspital (1661-1704) pero fue descubierta por un matemático suizo, John Bernoulli (1667-1748). Algunas veces podría ver l'Hôspital escrito como l'Hôspital, pero él escribió su propio nombre l'Hôspital como era común en el siglo XVII. Véase Redacción de un proyecto, pág. 307, para más detalles.

REGLA DE L'HOSPITAL Suponga que f y g son funciones derivables y que $g'(x)\neq 0$ en un intervalo abierto I que contiene a (excepto quizás en a). Suponga que

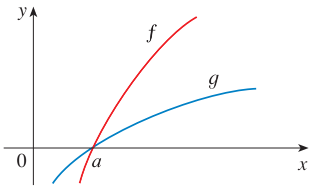
$$\lim_{x\to a} f(x)=0 \quad\text{y}\quad \lim_{x\to a} g(x)=0$$

o que $$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty \quad\text{y}\quad \lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$$

(En otras palabras, tiene una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o del ∞/∞.) Entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si el límite en el lado derecho existe (o es ∞ o es $-\infty$).



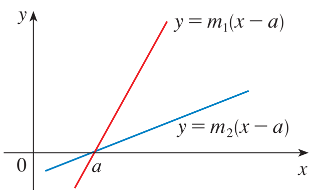


FIGURA 1

■ En la figura 1 se sugiere en forma visual por qué la regla de l'Hospital podría ser verdadera. En la primera gráfica se muestran dos funciones derivables f y g, cada una de las cuales tiende a 0 cuando $x \to a$. Con un acercamiento hacia el punto $(a, 0)$, las gráficas empezarán a verse casi lineales. Pero si las funciones *fueran* en realidad lineales, como en la segunda gráfica, después su gráfica sería

$$\frac{m_1(x-a)}{m_2(x-a)} = \frac{m_1}{m_2}$$

lo cual es la proporción entre sus derivadas. Esto sugiere que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Advierta que cuando se usa la regla de l'Hospital, deriva el numerador y el denominador por separado. No utiliza la regla del cociente.

■ En la figura 2 se muestra la gráfica de la función del ejemplo 2. Con anterioridad ha visto ver que, con mucho, las funciones exponenciales crecen con más rapidez que las potencias, de modo que el resultado del ejemplo 2 no es inesperado. Véase también el ejercicio 69.

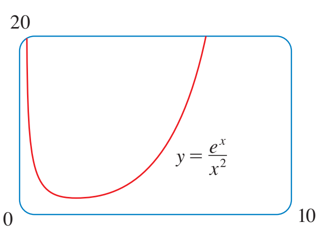


FIGURA 2

NOTA 1 La regla de l'Hospital afirma que el límite de un cociente de funciones es igual al límite del cociente de sus derivadas, siempre que se satisfagan las condiciones dadas. Antes de aplicar la regla de l'Hospital es muy importante comprobar las condiciones referentes a los límites de f y g.

NOTA 2 La regla de l'Hospital también es válida para los límites laterales y los límites en el infinito o en el infinito negativo; es decir, "$x \to a$" se puede reemplazar con cualquiera de los símbolos siguientes $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.

NOTA 3 Para el caso especial en que $f(a) = g(a) = 0$, f' y g' son continuas y $g'(a) \neq 0$, es fácil ver por qué la regla de l'Hospital es verdadera. En efecto, si se aplica la forma alternativa de la definición de derivada, tiene

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

Es más difícil demostrar la versión general de la regla de l'Hospital. Véase el apéndice F.

V EJEMPLO 1 Encuentre $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$.

SOLUCIÓN Puesto que

$$\lim_{x\to 1}\ln x = \ln 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1}(x-1) = 0$$

puede aplicar la regla de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{d}{dx}(\ln x)}{\dfrac{d}{dx}(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1$$

□

EJEMPLO 2 Calcule $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}$.

SOLUCIÓN Tiene que $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$, de modo que la regla de l'Hospital da

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{d}{dx}(e^x)}{\dfrac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}$$

Puesto que $e^x \to \infty$ y $2x \to \infty$ cuando $x \to \infty$, el límite del segundo miembro también es indeterminado, pero una segunda aplicación de la regla de l'Hospital da

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2} = \infty$$

□

■ En la figura 3 se muestra la gráfica de la función del ejemplo 3. Ya analizamos el crecimiento lento de los logaritmos, de suerte que no es sorprendente que esta proporción tienda a 0 cuando $x \to \infty$. Véase también el ejercicio 70.

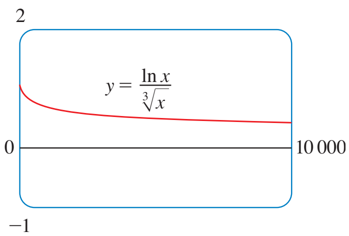


FIGURA 3

V EJEMPLO 3 Calcule $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

SOLUCIÓN Dado que $\ln x \to \infty$ y $\sqrt[3]{x} \to \infty$ cuando $x \to \infty$, puede aplicarse la regla de l'Hospital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}$$

Advierta que ahora el límite del segundo miembro es indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$. Pero, en lugar de aplicar la regla de l'Hospital por segunda vez, como en el ejemplo 2, se simplifica la expresión y se ve que una segunda aplicación es innecesaria:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0 \qquad \square$$

EJEMPLO 4 Encuentre $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$. [Véase el ejercicio 38 de la sección 2.2.]

SOLUCIÓN Al observar que tanto $\tan x - x \to 0$ como $x^3 \to 0$ cuando $x \to 0$, aplique la regla de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

■ La gráfica de la figura 4 da una confirmación visual del resultado del ejemplo 4. Sin embargo, si hiciera un acercamiento muy grande, obtendría una gráfica inexacta, porque $\tan x$ está cercana a x cuando este último es pequeño. Véase el ejercicio 38(d) de la sección 2.2.

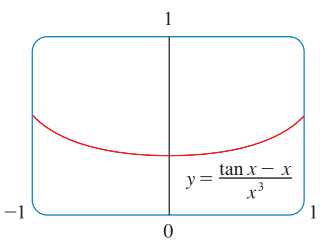


FIGURA 4

Como el límite del lado derecho todavía es indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$, aplique una vez más dicha regla:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x}$$

Puesto que $\lim_{x\to 0} \sec^2 x = 1$, simplifica el cálculo al escribir

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \sec^2 x \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$$

Puede evaluar el último límite usando ya sea la regla de l'Hospital por tercera vez o escribiendo $\tan x$ como $(\operatorname{sen} x)/(\cos x)$ y utilizando su conocimiento de los límites trigonométricos. Al reunir todos los pasos, obtiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x}{1} = \frac{1}{3}\end{aligned} \qquad \square$$

EJEMPLO 5 Encuentre $\lim\limits_{x\to\pi^-} \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$.

SOLUCIÓN Si intenta aplicar la regla de l'Hospital a ciegas, obtendría

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\infty$$

¡Esto es **erróneo!** Aun cuando el numerador $\operatorname{sen} x \to 0$ cuando $x \to \pi^-$, advierta que el denominador $(1 - \cos x)$ no tiende a 0, de modo que en este caso no se puede aplicar la regla de l'Hospital.

De hecho, el límite requerido es fácil de hallar porque la función es continua y el denominador es diferente de cero en:

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x} = \frac{\operatorname{sen} \pi}{1-\cos \pi} = \frac{0}{1-(-1)} = 0 \qquad \square$$

El ejemplo 5 hace ver hasta qué punto puede equivocarse si aplica la regla de l'Hospital sin pensar. Es *posible* hallar otros límites aplicando dicha regla, pero se encuentran con mayor facilidad con otros métodos. (Véanse los ejemplos 3 y 5 de la sección 2.3, el ejemplo 3 de la sección 2.6 y el análisis al principio de esta sección.) Por lo tanto, al evaluar cualquier límite, considere otros métodos antes de aplicar la regla de l'Hospital.

PRODUCTOS INDETERMINADOS

Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ (o bien $-\infty$), por lo tanto no resulta claro cuál es el valor de $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$, si lo hay. Se tiene una lucha entre f y g. Si f gana, la respuesta es 0; si g gana, la respuesta será ∞ (o bien $-\infty$). O puede haber un término medio donde la respuesta es un número finito diferente de cero. Esta clase de límite se llama **forma indeterminada del tipo $\mathbf{0 \cdot \infty}$**. Puede manejarla escribiendo el producto fg como un cociente:

$$fg = \frac{f}{1/g} \qquad \text{o} \qquad fg = \frac{g}{1/f}$$

Esto convierte el límite dado en una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞ de modo que aplique la regla de l'Hospital.

■ En la figura 5 se ilustra la gráfica de la función en el ejemplo 6. Note que la función es indefinida en $x = 0$; la gráfica se aproxima al origen pero nunca lo alcanza.

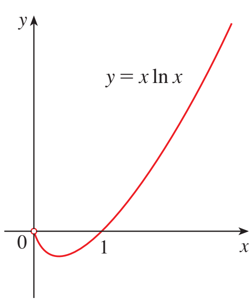


FIGURA 5

EJEMPLO 6 Evalúe $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$.

SOLUCIÓN El límite dado es indeterminado porque, cuando $x \to 0^+$, el primer factor (x) tiende a 0, en tanto que el segundo $(\ln x)$ lo hace a $-\infty$. Si se escribe $x = 1/(1/x)$, tiene $1/x \to \infty$ cuando $x \to 0^+$, de modo que la regla de l'Hospital da

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0 \qquad \square$$

NOTA En la resolución del ejemplo 6 se podría escribir lo siguiente como otra posible opción:

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1/\ln x}$$

Esto da una forma indeterminada del tipo $0/0$, pero si aplica la regla de l'Hospital, obtiene una expresión más complicada que aquella con la que empezó. En general, cuando escribe de nuevo un producto indeterminado, trate de escoger la opción que conduzca al límite más sencillo.

DIFERENCIAS INDETERMINADAS

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces el límite

$$\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)]$$

se conoce como **forma indeterminada del tipo $\mathbf{\infty - \infty}$**. Una vez más, existe una competencia entre f y g. ¿La respuesta es ∞ (f gana), o será $-\infty$ (g gana) o se tiene un término medio en un número finito? Para averiguarlo, intente convertir la diferencia en un cociente (por ejemplo, usando un denominador común o racionalización o factorizando un factor común) de modo que tenga una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.

EJEMPLO 7 Calcule $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} (\sec x - \tan x)$.

SOLUCIÓN En primer lugar, advierta que $\sec x \to \infty$ y $\tan x \to \infty$ cuando $x \to (\pi/2)^-$, de modo que el límite es indeterminado. En este caso, use un denominador común:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to (\pi/2)^-} (\sec x - \tan x) &= \lim_{x \to (\pi/2)^-} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right) \\ &= \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} = 0 \end{aligned}$$

Observe que se justifica el uso de la regla de l'Hospital porque $1 - \operatorname{sen} x \to 0$ y $\cos x \to 0$ cuando $x \to (\pi/2)^-$. □

POTENCIAS INDETERMINADAS

Varias formas indeterminadas surgen del límite

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$$

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ tipo 0^0
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ tipo ∞^0
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ tipo 1^∞

Cada uno de estos tres casos se puede tratar tomando el logaritmo natural:

$$\text{sea} \quad y = [f(x)]^{g(x)}, \quad \text{por lo tanto} \quad \ln y = g(x) \ln f(x)$$

o bien, al escribir la función como una exponencial:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

(Recuerde que se usaron estos dos métodos al derivar esas funciones.) Cualquiera de los dos conduce al producto indeterminado $g(x) \ln f(x)$, que es del tipo $0 \cdot \infty$.

EJEMPLO 8 Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}$.

SOLUCIÓN En primer lugar, advierta que cuando $x \to 0^+$, tiene $1 + \operatorname{sen} 4x \to 1$ y $\cot x \to \infty$, por lo que el límite es indeterminado. Sea

$$y = (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}$$

Entonces $\quad \ln y = \ln[(1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}] = \cot x \ln(1 + \operatorname{sen} 4x)$

de modo que la regla de l'Hospital da

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 + \operatorname{sen} 4x)}{\tan x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{4 \cos 4x}{1 + \operatorname{sen} 4x}}{\sec^2 x} = 4$$

Hasta ahora ha calculado el límite de $\ln y$, pero lo que desea es el límite de y.

Para hallarlo aplique $y = e^{\ln y}$:

$$\lim_{x\to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x} = \lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^4 \qquad \square$$

■ En la figura 6 se muestra la gráfica de la función $y = x^x$, $x > 0$. Advierta que aun cuando 0^0 no está definido, los valores de la función tienden a 1 cuando $x \to 0^+$. Esto confirma el resultado del ejemplo 9.

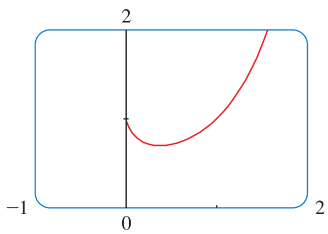


FIGURA 6

EJEMPLO 9 Encuentre $\lim_{x\to 0^+} x^x$.

SOLUCIÓN Advierta que este límite es indeterminado puesto que $0^x = 0$ para cualquier $x > 0$ pero $x^0 = 1$ para cualquier $x \neq 0$. Podría proceder como en el ejemplo 8 o escribir la función como una exponencial:

$$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$$

En el ejemplo 6 aplique la regla de l'Hospital para demostrar que

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1 \qquad \square$$

4.4 EJERCICIOS

1–4 Dado que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to a} h(x) = 1$$

$$\lim_{x\to a} p(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a} q(x) = \infty$$

¿cuáles de los límites siguientes son formas indeterminadas? Para aquellos que no son una forma indeterminada, evalúe el límite donde sea posible hacerlo.

1. (a) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (b) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{p(x)}$

(c) $\lim_{x\to a} \dfrac{h(x)}{p(x)}$ (d) $\lim_{x\to a} \dfrac{p(x)}{f(x)}$

(e) $\lim_{x\to a} \dfrac{p(x)}{q(x)}$

2. (a) $\lim_{x\to a} [f(x)p(x)]$ (b) $\lim_{x\to a} [h(x)p(x)]$

(c) $\lim_{x\to a} [p(x)q(x)]$

3. (a) $\lim_{x\to a} [f(x) - p(x)]$ (b) $\lim_{x\to a} [p(x) - q(x)]$

(c) $\lim_{x\to a} [p(x) + q(x)]$

4. (a) $\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$ (b) $\lim_{x\to a} [f(x)]^{p(x)}$ (c) $\lim_{x\to a} [h(x)]^{p(x)}$

(d) $\lim_{x\to a} [p(x)]^{f(x)}$ (e) $\lim_{x\to a} [p(x)]^{q(x)}$ (f) $\lim_{x\to a} \sqrt[q(x)]{p(x)}$

5–64 Halle el límite. Aplique la regla de l'Hospital donde resulte apropiado. Si existe un método más elemental, considere la posibilidad de utilizarlo. Si no puede aplicar la regla de l'Hospital, explique por qué.

5. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x}$

6. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

7. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^9 - 1}{x^5 - 1}$

8. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^a - 1}{x^b - 1}$

9. $\lim_{x\to (\pi/2)^+} \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$

10. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\tan 5x}$

11. $\lim_{t\to 0} \dfrac{e^t - 1}{t^3}$

12. $\lim_{t\to 0} \dfrac{e^{3t} - 1}{t}$

13. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan px}{\tan qx}$

14. $\lim_{\theta\to \pi/2} \dfrac{1 - \operatorname{sen} \theta}{\csc \theta}$

15. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

16. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x + x^2}{1 - 2x^2}$

17. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$

18. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\ln \ln x}{x}$

19. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x^3}$

20. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{\operatorname{sen} \pi x}$

21. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$

22. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3}$

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tanh x}{\tan x}$

24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x - \tan x}$

25. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{5^t - 3^t}{t}$

26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x}$

28. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

30. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$

31. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$

32. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan^{-1}(4x)}$

33. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - x + \ln x}{1 + \cos \pi x}$

34. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt{2x^2 + 1}}$

35. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^a - ax + a - 1}{(x - 1)^2}$

36. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$

37. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}$

38. $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{\cos x \ln(x - a)}{\ln(e^x - e^a)}$

39. $\lim\limits_{x\to \infty} x \operatorname{sen}(\pi/x)$

40. $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 e^x$

41. $\lim\limits_{x\to 0} \cot 2x \operatorname{sen} 6x$

42. $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$

43. $\lim\limits_{x\to \infty} x^3 e^{-x^2}$

44. $\lim\limits_{x\to \pi/4} (1 - \tan x)\sec x$

45. $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln x \tan(\pi x/2)$

46. $\lim\limits_{x\to \infty} x \tan(1/x)$

47. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$

48. $\lim\limits_{x\to 0} (\csc x - \cot x)$

49. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)$

50. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cot x - \dfrac{1}{x}\right)$

51. $\lim\limits_{x\to \infty} (x - \ln x)$

52. $\lim\limits_{x\to \infty} (xe^{1/x} - x)$

53. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^2}$

54. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\tan 2x)^x$

55. $\lim\limits_{x\to 0} (1 - 2x)^{1/x}$

56. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^{bx}$

57. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x^2}\right)^x$

58. $\lim\limits_{x\to \infty} x^{(\ln 2)/(1 + \ln x)}$

59. $\lim\limits_{x\to \infty} x^{1/x}$

60. $\lim\limits_{x\to \infty} (e^x + x)^{1/x}$

61. $\lim\limits_{x\to 0^+} (4x + 1)^{\cot x}$

62. $\lim\limits_{x\to 1} (2 - x)^{\tan(\pi x/2)}$

63. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos x)^{1/x^2}$

64. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x - 3}{2x + 5}\right)^{2x+1}$

65–66 Use una gráfica para estimar el valor del límite. Enseguida utilice la regla de l'Hospital para hallar el valor exacto.

65. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x$

66. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x - 4^x}{3^x - 2^x}$

67–68 Ilustre la regla de l'Hospital dibujando tanto $f(x)/g(x)$ y $f'(x)/g'(x)$ cerca de $x = 0$ con el fin de observar que estas relaciones tienen el mismo límite cuando $x \to 0$. Calcule, asimismo, el valor exacto del límite.

67. $f(x) = e^x - 1, \quad g(x) = x^3 + 4x$

68. $f(x) = 2x \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \sec x - 1$

69. Pruebe que

$$\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

para cualquier entero positivo n. Esto demuestra que la función exponencial se acerca a infinito con mayor rapidez que cualquier potencia de x.

70. Compruebe que

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$$

para cualquier número $p > 0$. Esto demuestra que la función logarítmica tiende a ∞ más despacio que cualquier potencia de x.

71. ¿Qué sucesde si intente aplicar la regla del l'Hospital para evaluar

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Evalúe el límite aplicando otro método.

72. Si un objeto con masa m se deja caer desde el estado de reposo, un modelo para su rapidez v una vez que transcurren t segundos, tomando en cuenta la resistencia del aire, es

$$v = \frac{mg}{c}(1 - e^{-ct/m})$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y c es una constante positiva. (En el capítulo 9 podrá deducir esta ecuación a partir de la hipótesis de que la resistencia del aire es proporcional a la rapidez del objeto; c es la constante de proporcionalidad.)

(a) Calcule $\lim_{t\to\infty} v$. ¿Cuál es el significado de este límite?

(b) Para t fijo, utilice la regla de l'Hospital para calcular $\lim_{m\to\infty^+} v$. ¿Qué puede concluir acerca de la velocidad de un objeto en caída dentro de vacío?

73. Si una cantidad inicial de dinero se invierte a una tasa de interés r compuesta n veces al año, el valor de la inversión después que transcurren t años es

$$A = A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

si hace que $n \to \infty$, lo denomina *capitalización continua* del interés. Aplique la regla de l'Hospital para demostrar que si el interés se capitaliza de manera continua, por lo tanto el monto después de n años es

$$A = A_0 e^{rt}$$

74. Si una bola de metal con masa m es arrojada dentro de agua y la fuerza de resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad, en tal caso la distancia que recorre la bola en el tiempo t es

$$s(t) = \frac{m}{c}\ln cosh\sqrt{\frac{gc}{mt}}$$

donde c es una constante positiva. Hallar el $\lim_{m\to\infty+} s(t)$

75. Si un campo electroestático E actúa en un dieléctrico líquido o un gas polar, el momento bipolar neto P por unidad de volumen es

$$P(E) = \frac{e^E + e^{-E}}{e^E - e^{-E}} - \frac{1}{E}$$

Demuestre que el $\lim_{E\to 0^+} P(E) = 0$.

76. Un cable metálico de radio r y cubierto por un aislante, de tal manera, que la distancia desde el centro del cable al exterior del aislante es R. La velocidad v de un impulso eléctrico en el cable es

$$v = -c\left(\frac{r}{R}\right)^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

donde c es una constante positiva. Hallar los limites siguientes e interprete sus respuestas.

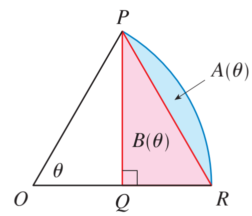
(a) $\lim_{R\to r^+} v$ (b) $\lim_{r\to 0^+} v$

77. La primera aparición impresa de la regla de l'Hospital fue en el libro *Analyse des Infiniment Petits*, publicado por el marqués de l'Hospital en 1696. Fue el primer libro de texto de cálculo alguna vez publicado y el ejemplo que allí utilizó el marqués para ilustrar su regla fue hallar el límite de la fución

$$y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

cuando x tiende a a, donde $a > 0$. (En aquel tiempo era común escribir aa, en lugar de a^2.) Resuelva este problema.

78. En la figura se muestra un sector de un círculo, con ángulo central θ. Sea $A(\theta)$ el área del segmento entre la cuerda PR y el arco PR. Sea $B(\theta)$ el área del triángulo PQR. Encuentre $\lim_{\theta\to 0^+} A(\theta)/B(\theta)$.



79. Si f' es continua, $f(2) = 0$ y $f'(2) = 7$, evalúe

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2 + 3x) + f(2 + 5x)}{x}$$

80. ¿Para qué valores de a y b es verdadera la ecuación siguiente?

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x^3} + a + \frac{b}{x^2}\right) = 0$$

81. Si f' es continua, use la regla de l'Hospital para demostrar que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} = f'(x)$$

Con ayuda de un diagrama explique el significado de esta ecuación.

82. Si f'' es continua, demuestre que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2} = f''(x)$$

83. Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Mediante la definición de derivada calcule $f'(0)$.
(b) Demuestre que f posee derivadas de todos los órdenes que están definidas en $\mathbb{R}$. [*Sugerencia*: primero demuestre por inducción que hay un polinomio $p_n(x)$ y un entero no negativo k_n tal que $f^{(n)}(x) = p_n(x)f(x)/x^{k_n}$ para $x \neq 0$.]

84. Sea

$$f(x) = \begin{cases} |x|^x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Demuestre que f es continua en 0.
(b) Investigue en forma gráfica si f es derivable en 0 mediante varios acercamientos al punto (0, 1) de la gráfica de f.
(c) Demuestre que f no es derivable en 0. ¿Cómo puede conciliar este hecho con el aspecto de las gráficas del inciso (b)?

REDACCIÓN DE PROYECTO

LOS ORÍGENES DE LA REGLA DE L'HOSPITAL

Thomas Fisher Rare Book Library

www.stewartcalculus.com

La Internet es otra fuente de información para este proyecto. Visite el sitio y haga clic en History of Mathematics.

La regla de l'Hospital se publicó por primera vez en 1696, en el libro de texto del marqués de l'Hospital, *Analyse des Infiniment Petits*, pero la regla fue descubierta en 1694 por el matemático suizo Johann Bernoulli. La explicación es que ambos habían entrado en un curioso arreglo de negocios por medio del cual el marqués de l'Hospital compró los derechos de los descubrimientos matemáticos de Bernoulli. Los detalles, incluso una traducción de la carta de l'Hospital a Bernoulli en la que propone el arreglo, se pueden hallar en el libro escrito por Eves [1].

Escriba un informe sobre los orígenes históricos y matemáticos de la regla de l'Hospital. Empiece por dar breves detalles biográficos de los dos hombres (el diccionario editado por Gillispie [2] es una buena fuente) y describa el trato de negocios entre ellos. A continuación, mencione el enunciado de l'Hospital de su regla, el cual se encuentra en el libro fuente de Struik [4] y, más sintético, en el libro de Katz [3]. Advierta que l'Hospital y Bernoulli formularon la regla geométricamente y dieron la respuesta en términos de diferenciales. Compare el enunciado de ellos con la versión de la regla de l'Hospital que se dio en la sección 4.4 y demuestre que, en esencia, los dos enunciados son los mismos.

1. Howard Eves, *In Mathematic al Circles* (*Volumen* 2: *Cuadrantes III y IV*) (Boston: Prindle, Weber and Schmidt, 1969), pp. 20-22.
2. C. C. Gillispie, ed., *Dictionary of Scientific Biography* (Nueva York: Scribner's, 1974). Véase el artículo sobre Johann Bernoulli, por E. A. Fellman y J. O. Fleckenstein, en el volumen II y el artículo sobre el marqués de l'Hospital, por Abraham Robinson, en el volumen VIII.
3. Victor Katz, *A History of Mathematics: An Introduction* (Nueva York: Harper Collins, 1993), pp. 484.
4. D. J. Struik, ed., *A Sourcebook in Mathematics*, 1200-1800 (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1969), pp. 315-316.

4.5 RESUMEN DE TRAZO DE CURVAS

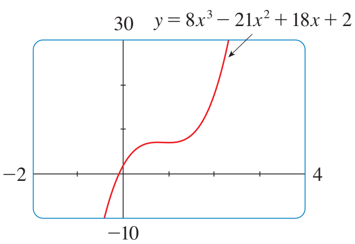


FIGURA 1

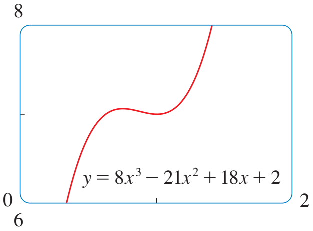


FIGURA 2

Hasta este momento sólo ha interesado en algunos aspectos particulares del trazo de curvas: dominio, intervalo y simetría en el capítulo 1; límites, continuidad y asíntotas en el capítulo 2; derivadas y tangentes en los capítulos 2 y 3, y valores extremos, intervalos de incremento y decremento, concavidad, puntos de inflexión y regla de l'Hospital en este capítulo. Pero ya es tiempo de reunir toda esta información relacionada con la elaboración de gráficas, que revela las características importantes de las funciones.

Usted podría preguntar: ¿por qué no usar sólo una calculadora o computadora para dibujar una curva ¿Por qué necesitamos aplicar el cálculo?.

Es cierto que los instrumentos modernos son capaces de generar gráficas muy exactas. Pero incluso el mejor instrumento para graficar tiene que ser utilizado en forma inteligente. Como se establece en la sección 1.4: es muy importante elegir un rectángulo de visión adecuado para evitar obtener una gráfica engañosa. Vea en particular los ejemplos 1, 3, 4 y 5 de dicha sección. La aplicación del cálculo permite descubrir los aspectos más interesantes de las gráficas y, en muchos casos, calcular *exactamente* los puntos máximos y mínimos y los puntos de inflexión, y no sólo en forma aproximada.

Por ejemplo, en la figura 4 se presenta la gráfica de $f(x) = 8x^3 - 21x^2 + 18x + 2$. A primera vista parece razonable: tiene la misma forma que las curvas cúbicas como $y = x^3$, y parece no tener máximo ni mínimo. Pero si calcula la derivada, se dará cuenta de que hay un máximo cuando $x = 0.75$ y un mínimo cuando $x = 1$. En efecto, si efectúa un acercamiento a esta parte de la gráfica verá el comportamiento que se ilustra en la figura 2. Sin la herramienta del cálculo, sin dificultad podría pasarlas por alto.

En la sección siguiente se elabora la gráfica de funciones recurriendo a la interacción del cálculo y los instrumentos para graficar. En esta sección dibujará gráficas aplicando la información siguiente. No se supone que tenga instrumentos para graficar, pero si usted cuenta con uno, sólo utilícelo para comprobar su trabajo.

NORMAS PARA TRAZAR UNA CURVA

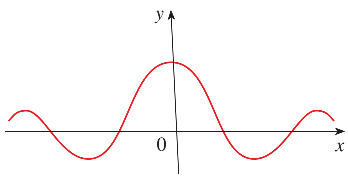
La lista siguiente es una guía para graficar una curva $y = f(x)$ a mano. Habrá algunas funciones en las que no se apliquen todos los puntos. (Por ejemplo, una curva dada podría no tener una asíntota o no ser simétrica.) Pero las normas proporcionan toda la información que se necesita para elaborar un diagrama que muestre los aspectos más importantes de la función.

A. Dominio Con frecuencia es muy útil para determinar el domino D de f, es decir, el conjunto de valores de x para el cual $f(x)$ está definida.

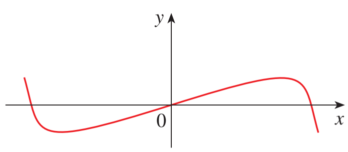
B. Intersecciones La intersección con el eje y es $f(0)$ lo cual señala dónde la curva corta al eje de las y. Para determinar las intersecciones con el eje de las x, hagá $y = 0$ y (determine x. Puede omitir este paso si la ecuación es difícil de resolver.)

C. Simetría

(i) Si $f(-x) = f(x)$ para toda x en D, es decir, la ecuación de la curva no cambia cuando x se reemplaza por $-x$, entonces f es una **función par** y la curva es simétrica con respecto al eje y. Esto significa que la tarea se reduce a la mitad. Si conoce lo que de la curva se parece a $x \geqslant 0$, entonces sólo necesita reflejar con respecto al eje y para obtener la curva completa [véase figura 3(a)]. He aquí algunos ejemplos: $y = x^2$, $y = x^4$ $y = |x|$ y $y = \cos x$.



(a) Función par: simetría por reflexión



(b) Función impar: simetría por rotación

FIGURA 3

(ii) Si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en D, entonces f es una **función impar** y la curva es simétrica con respecto al origen. Una vez más, obtega la curva completa si conoce lo que de la curva se parece $x \geqslant 0$. Gire 180° con respecto al origen. Observe la figura 3(b). Algunos ejemplos sencillos de funciones impares son $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$ y $y = \operatorname{sen} x$.

(iii) Si $f(x + p) = f(x)$ para toda x en D, donde p es una constante positiva, entonces f se llama **función periódica** y el número p más pequeño se llama **periodo**. Por ejemplo, $y = \operatorname{sen} x$ tiene un periodo 2π y $y = \tan x$ tiene un periodo π. Si sabe que la gráfica luce como en un intervalo de longitud p, entonces en seguida aplica una traslación para dibujar la gráfica completa (véase figura 7).

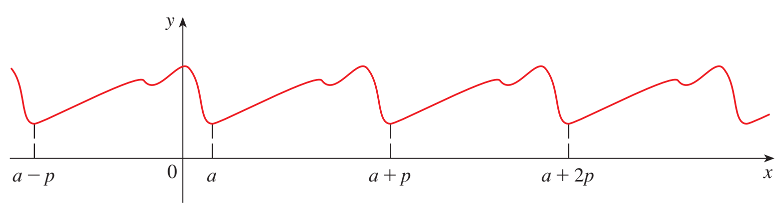


FIGURA 4
Función periódica: simetría por traslación

D. Asíntotas

(i) *Asíntotas horizontales*. Según la sección 2.6, si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, entonces la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$. Si resulta que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (o $-\infty$), entonces no hay una asíntota a la derecha, sino que todavía es información útil para graficar la curva.

(ii) *Asíntotas verticales*. Recuerde que, según la sección 2.2, que la recta $x = a$ es una asíntota vertical si por lo menos una de las siguientes proposiciones se cumple:

$$\boxed{1} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

(En el caso de las funciones racionales, puede localizar las asíntotas verticales igualando el denominador a 0 después de anular los factores comunes. Este método no se aplica a otras funciones.) Además, al trazar la curva es muy útil conocer exactamente cuál de las proposiciones de (1) se cumple. Si $f(a)$ no está definida, pero a es un extremo del dominio de f, entonces es después calcular $\lim_{x\to a^-} f(x)$ o $\lim_{x\to a^+} f(x)$, sea este límite infinito o no.

(iii) *Asíntotas inclinadas*. Se tratan al final de la sección.

E. Intervalos de incremento o decremento Aplique la prueba I/D. Calcule $f'(x)$ y determine los intervalos en los cuales $f'(x)$ es positiva, es decir, donde (f sea creciente) y los intervalos en donde $f'(x)$ sea negativa, (f sea decreciente).

F. Valores de los máximos locales y de los mínimos locales Determine los números críticos de f [los números c donde $f'(c) = 0$ o bien, $f'(c)$ no existe]. Luego aplique la prueba de la primera derivada. Si f' pasa de positivo a negativo en un número crítico c, entonces $f(c)$ es un máximo local. Si f' cambia de negativo a positivo en c, entonces $f(c)$ es un mínimo local. Por lo regular se prefiere usar la prueba de la primera derivada, pero también se aplica la prueba de la segunda derivada si $f'(c) = 0$ y $f''(c) \neq 0$. Entonces, $f''(c) > 0$ significa que $f(c)$ es un mínimo local, en tanto que $f''(c) < 0$ quiere decir que $f(c)$ es un máximo local.

G. Concavidad y puntos de inflexión Calcule $f''(x)$ y aplique la prueba de concavidad. La curva es cóncava hacia arriba donde $f''(x) > 0$ y cóncava hacia abajo donde $f''(x) < 0$. Los puntos de inflexión se encuentran donde cambia la dirección de la concavidad.

H. Trace la curva A partir de la información anterior dibuje la gráfica. Trace las asíntotas como líneas discontinuas. Localice las intersecciones, los puntos máximos y mínimos y los puntos de inflexión. Luego haga que la curva pase por estos puntos, subiendo y bajando de acuerdo con E, la concavidad según G y aproxímela a las asíntotas. Si se necesita mayor precisión cerca de algún punto, calcule el valor de la derivada en dicho punto. La tangente indica la dirección en la cual progresa la curva.

V EJEMPLO 1 Aplique las normas para graficar la curva $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$.

A. El dominio es

$$\{x \mid x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \mid x \neq \pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$$

B. Tanto la intersección con el eje x como la intersección con el eje y es 0.

C. Puesto que $f(-x) = f(x)$, la función f es par. La curva es simétrica con respecto al eje de las y

D.
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1 - 1/x^2} = 2$$

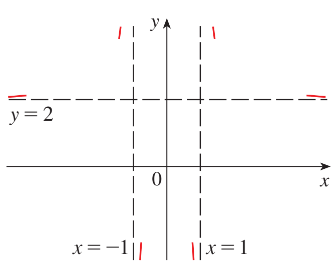


FIGURA 5
Trazos preliminares

■ Se muestra la curva que se acerca a su asíntota horizontal desde arriba en la figura 5. Esto se confirma mediante los intervalos de incremento y decremento.

Por lo tanto, la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.

Puesto que el denominador es 0 cuando $x = \pm 1$, calcule los límites siguientes:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty \qquad \lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty$$

Por lo tanto, las rectas $x = 1$ y $x = -1$ son asíntotas verticales. Esta información relacionada con los límites y las asíntotas posibilita el dibujo de la gráfica preliminar en la figura 5, en la que se ilustran las partes de la curva cercanas a las asíntotas.

E. $$f'(x) = \frac{4x(x^2 - 1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

Puesto que $f'(x) > 0$ cuando $x < 0$ $(x \neq -1)$ y $f'(x) < 0$ cuando $x > 0$ $(x \neq 1)$, f es creciente en $(-\infty, -1)$ y $(-1, 0)$ y decreciente en $(0, 1)$ y $(1, \infty)$.

F. El único número crítico es $x = 0$. Como f' pasa de positiva a negativa en 0, $f(0) = 0$ es un máximo local según la prueba de la primera derivada.

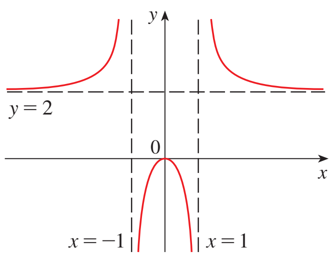


FIGURA 6
Gráfica terminada de $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$

G. $$f''(x) = \frac{-4(x^2 - 1)^2 + 4x \cdot 2(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$$

Como $12x^2 + 4 > 0$ para toda x

$$f''(x) > 0 \iff x^2 - 1 > 0 \iff |x| > 1$$

y $f''(x) < 0 \iff |x| < 1$. Por lo tanto, la curva es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-1, 1)$. Carece de punto de inflexión ya que 1 y -1 no están en el dominio de f.

H. A partir de la información reunida en E a G termine de trazar la gráfica en la figura 6. □

EJEMPLO 2 Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x + 1}}$.

A. Dominio $= \{x \mid x + 1 > 0\} = \{x \mid x > -1\} = (-1, \infty)$

B. Las intersecciones con los ejes x y y son 0.

C. Simetría: ninguna

D. Puesto que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

no hay asíntota horizontal. Como $\sqrt{x + 1} \to 0$ cuando $x \to -1^+$ y $f(x)$ siempre es positiva y entonces

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

y de este modo la recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

E. $$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x + 1} - x^2 \cdot 1/\left(2\sqrt{x + 1}\right)}{x + 1} = \frac{x(3x + 4)}{2(x + 1)^{3/2}}$$

Se ve que $f'(x) = 0$ cuando $x = 0$. (Observe que $-\frac{4}{3}$ no está en el dominio de f), así, el único número crítico es 0. Puesto que $f'(x) < 0$ cuando $-1 < x < 0$ y $f'(x) > 0$ cuando $x > 0$, f es decreciente en $(-1, 0)$ y creciente en $(0, \infty)$.

F. Como $f'(0) = 0$ y f' cambia de negativa a positiva en 0, $f(0) = 0$ es un mínimo local, (y absoluto), según la prueba de la primera derivada.

G. $$f''(x) = \frac{2(x + 1)^{3/2}(6x + 4) - (3x^2 + 4x)3(x + 1)^{1/2}}{4(x + 1)^3} = \frac{3x^2 + 8x + 8}{4(x + 1)^{5/2}}$$

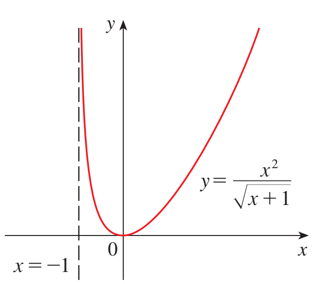


FIGURA 7

Observe que el denominador es siempre positivo. El numerador es el polinomio cuadrático $3x^2 + 8x + 8$, que siempre es positivo por que su discriminante es $b^2 - 4ac = -32$, el cual es negativo, y el coeficiente de x^2 es positivo. Por esto, $f''(x) > 0$ para toda x en el dominio de f, lo cual significa que f es cóncava hacia arriba en $(-1, \infty)$ y no hay punto de inflexión.

H. La curva se ilustra en la figura 7. □

V EJEMPLO 3 Grafique $f(x) = xe^x$.

A. El dominio es $\mathbb{R}$.
B. Las intersecciones con los ejes x y y son 0.
C. Simetría: ninguna
D. Puesto que x y e^x se vuelven grandes cuando $x \to \infty$, $\lim_{x\to\infty} xe^x = \infty$. Como $x \to -\infty$, sin embargo, cuando $e^x \to 0$ y de igual manera tiene un producto indeterminado que requiere la aplicación de la regla de l'Hospital:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} (-e^x) = 0$$

Por lo tanto, el eje x es una asíntota horizontal.

E. $$f'(x) = xe^x + e^x = (x + 1)e^x$$

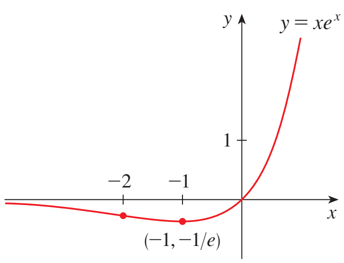


FIGURA 8

Como e^x es siempre positiva, $f'(x) > 0$ cuando $x + 1 > 0$, y $f'(x) < 0$ cuando $x + 1 < 0$. De tal manera, f es creciente en $(-1, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, -1)$.
F. Debido a que $f'(-1) = 0$ y f pasa de negativo a positivo en $x = -1$, $f(-1) = -e^{-1}$ es un mínimo local (y absoluto).

G. $$f''(x) = (x + 1)e^x + e^x = (x + 2)e^x$$

Como $f''(x) > 0$ si $x > -2$ y $f''(x) < 0$ si $x < -2$, f es cóncava hacia arriba en $(-2, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2)$. El punto de inflexión es $(-2, -2e^{-2})$.
H. Aproveche toda la información para graficar la curva en la figura 8. □

EJEMPLO 4 Dibuje la gráfica de $f(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$.

A. El dominio es $\mathbb{R}$.
B. El cruce con y es $f(0) = \frac{1}{2}$. El cruce con x sucede cuando $\cos x = 0$, esto es, $x = (2n + 1)\pi/2$, donde n es un entero.
C. F no es par ni impar, pero $f(x + 2) = f(x)$ para toda x y de este modo f es periódica y tiene periodo 2π. En estos términos, y lo que sigue, necesita considerar únicamente $0 \leq x \leq 2\pi$ y por lo tanto extender la curva por translación en la parte H.
D. Asíntota: ninguna

E. $$f'(x) = \frac{(2 + \operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x) - \cos x\,(\cos x)}{(2 + \operatorname{sen} x)} = \frac{2 \operatorname{sen} x + 1}{(2 + \operatorname{sen} x)^2}$$

Por esto $f'(x) > 0$ cuando $2 \operatorname{sen} x + 1 < 0 \iff \operatorname{sen} x < -\frac{1}{2} \iff 7\pi/6 < x < 11\pi/6$. De esa manera f es creciente en $(7\pi/6, 11\pi/6)$ y decreciente en $(0, 7\pi/6)$ y $(11\pi/6, 2\pi)$.
F. De la parte E y la prueba de la primera derivada, resulta que el valor del mínimo local es $f(7\pi/6) = -1/\sqrt{3}$ y el valor del máximo local es $f(7\pi/6) = 1/\sqrt{3}$.
G. Si aplica la regla del cociente una vez más y simplifica, obtiene

$$f''(x) = -\frac{2 \cos x\,(1 - \operatorname{sen} x)}{(2 + \operatorname{sen} x)^3}$$

Ya que $(2 + \operatorname{sen} x)^3 > 0$ y $1 - \operatorname{sen} x \geq 0$ para toda x, sabe que $f'(x) > 0$ cuando $\cos x < 0$, es decir, $\pi/2 < x < 3\pi/2$. De esa manera f es cóncava hacia arriba en $(\pi/2, 3\pi/2)$ y cóncava hacia abajo $(0, \pi/2)$ y $(3\pi/2, 2\pi)$. Los puntos de reflexión son $(\pi/2, 0)$ y $(3\pi/2, 0)$.

H. La gráfica de la función restringida a $0 \leq x \leq 2\pi$ se muestra en la figura 9. Después la extenderá, aplicando periodicidad para completar la gráfica en la figura 10.

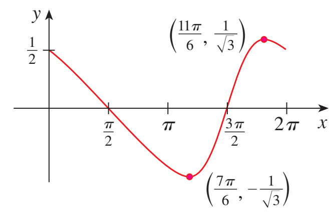


FIGURA 9

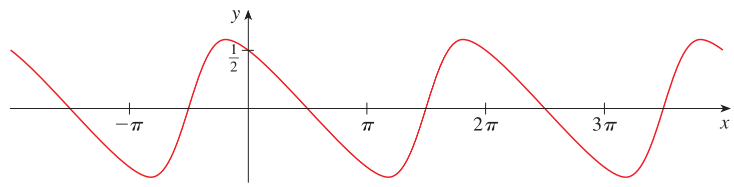


FIGURA 10

□

EJEMPLO 5 Grafique $y = \ln(4 - x^2)$.

A. El dominio es

$$\{x \mid 4 - x^2 > 0\} = \{x \mid x^2 < 4\} = \{x \mid |x| < 2\} = (-2, 2)$$

B. La intersección con el eje y es $f(0) = \ln 4$. Para determinar la intersección con el eje x hagá

$$y = \ln(4 - x^2) = 0$$

Sabe que $\ln 1 = 0$ y así $4 - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 3$ y, por lo tanto, se corta al eje x en $\pm\sqrt{3}$.

C. Como $f(-x) = f(x)$, f es par y la curva es simétrica con respecto al eje de las y.

D. Busque asíntotas verticales en los extremos del dominio. Como $4 - x^2 \to 0^+$ cuando $x \to 2^-$ y también cuando $x \to -2^+$, tiene

$$\lim_{x \to 2^-} \ln(4 - x^2) = -\infty \qquad \lim_{x \to -2^+} \ln(4 - x^2) = -\infty$$

Por esto, las rectas $x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas verticales.

E.
$$f'(x) = \frac{-2x}{4 - x^2}$$

Puesto que $f'(x) > 0$ cuando $-2 < x < 0$ y $f'(x) < 0$ cuando $0 < x < 2$, f es creciente en $(-2, 0)$ y decreciente en $(0, 2)$.

F. El único número crítico es $x = 0$. Como f' cambia de positiva a negativa en 0, $f(0) = \ln 4$ es un máximo local de acuerdo con la prueba de la primera derivada.

G.
$$f''(x) = \frac{(4 - x^2)(-2) + 2x(-2x)}{(4 - x^2)^2} = \frac{-8 - 2x^2}{(4 - x^2)^2}$$

Como $f''(x) < 0$ para toda x, la curva es cóncava hacia abajo en $(-2, 2)$ y carece de punto de inflexión.

H. Por medio de esta información se traza la gráfica de la figura 11. □

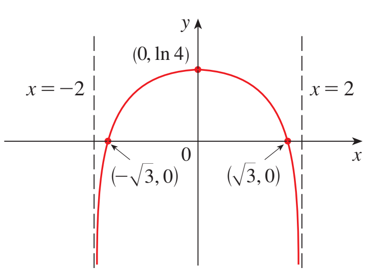


FIGURA 11
$y = \ln(4 - x^2)$

ASÍNTOTAS INCLINADAS

Algunas curvas poseen asíntotas que son *oblicuas*, es decir, ni horizontales ni verticales. Si

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

entonces la recta $y = mx + b$ se llama **asíntota inclinada** porque la distancia vertical entre la curva $y = f(x)$ y la recta $y = mx + b$ tiende a 0, como en la figura 12. Una situación

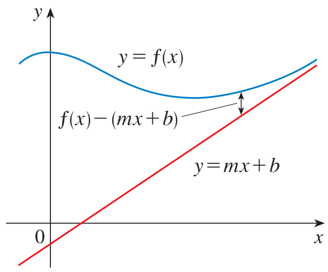


FIGURA 12

similar existe si $x \to -\infty$. Por lo que se refiere a las funciones racionales, las asíntotas inclinadas se presentan cuando el grado del numerador es uno más que el grado del denominador. En tal caso, la ecuación de la asíntota inclinada se determina mediante la división larga como en el ejemplo siguiente.

V EJEMPLO 6 Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.

A. El dominio es $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

B. Las intersecciones con los ejes x y y son 0.

C. Puesto que $f(-x) = -f(x)$, f es impar y su gráfica es simétrica con respecto al origen.

D. Puesto que $x^2 + 1$ nunca es 0, no hay asíntota vertical. Como $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$, no hay asíntota horizontal. Pero junto con la división da

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$f(x) - x = -\frac{x}{x^2 + 1} = -\frac{\dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{1}{x^2}} \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \pm\infty$$

Por lo que la recta $y = x$ es una asíntota inclinada.

E. $$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$$

Puesto que $f'(x) > 0$ para toda x, excepto para 0, f es creciente en $(-\infty, \infty)$.

F. Aunque $f'(0) = 0$, f' no cambia de signo en 0, de modo que no hay máximo local ni mínimo local

G. $$f''(x) = \frac{(4x^3 + 6x)(x^2 + 1)^2 - (x^4 + 3x^2) \cdot 2(x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{2x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3}$$

Puesto que $f''(x) = 0$ cuando $x = 0$ o $x = \pm\sqrt{3}$, resulta la tabla siguiente:

Intervalo	x	$3 - x^2$	$(x^2 + 1)^3$	$f''(x)$	f
$x < -\sqrt{3}$	$-$	$-$	$+$	$+$	CA en $(-\infty, -\sqrt{3})$
$-\sqrt{3} < x < 0$	$-$	$+$	$+$	$-$	CAB en $(-\sqrt{3}, 0)$
$0 < x < \sqrt{3}$	$+$	$+$	$+$	$+$	CA en $(0, \sqrt{3})$
$x > \sqrt{3}$	$+$	$-$	$+$	$-$	CAB en $(\sqrt{3}, \infty)$

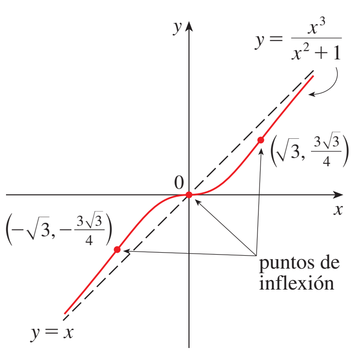


FIGURA 13

Los puntos de inflexión son $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3}{4}\sqrt{3}/4\right)$, $(0, 0)$ y $\left(\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$.

H. La gráfica de f se ilustra en la figura 13. □

4.5 EJERCICIOS

1–52 Aplique las normas de esta sección para graficar la curva.

1. $y = x^3 + x$

2. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$

3. $y = 2 - 15x + 9x^2 - x^3$

4. $y = 8x^2 - x^4$

5. $y = x^4 + 4x^3$

6. $y = x(x + 2)^3$

7. $y = 2x^5 - 5x^2 + 1$

8. $y = (4 - x^2)^5$

9. $y = \dfrac{x}{x - 1}$

10. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$

11. $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

12. $y = \dfrac{x}{x^2 - 9}$

13. $y = \dfrac{x}{x^2 + 9}$

14. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 9}$

15. $y = \dfrac{x - 1}{x^2}$

16. $y = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

17. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

18. $y = \dfrac{x}{x^3 - 1}$

19. $y = x\sqrt{5 - x}$

20. $y = 2\sqrt{x} - x$

21. $y = \sqrt{x^2 + x - 2}$

22. $y = \sqrt{x^2 + x} - x$

23. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

24. $y = x\sqrt{2 - x^2}$

25. $y = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$

26. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

27. $y = x - 3x^{1/3}$

28. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$

29. $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

30. $y = \sqrt[3]{x^3 + 1}$

31. $y = 3 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x$

32. $y = x + \cos x$

33. $y = x \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

34. $y = 2x - \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

35. $y = \frac{1}{2}x - \operatorname{sen} x, \quad 0 < x < 3\pi$

36. $y = \sec x + \tan x, \quad 0 < x < \pi/2$

37. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$

38. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$

39. $y = e^{\operatorname{sen} x}$

40. $y = e^{-x} \operatorname{sen} x \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

41. $y = 1/(1 + e^{-x})$

42. $y = e^{2x} - e^x$

43. $y = x - \ln x$

44. $y = e^x/x$

45. $y = (1 + e^x)^{-2}$

46. $y = \ln(x^2 - 3x + 2)$

47. $y = \ln(\operatorname{sen} x)$

48. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

49. $y = xe^{-x^2}$

50. $y = (x^2 - 3)e^{-x}$

51. $y = e^{3x} + e^{-2x}$

52. $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)$

53. En la teoría de la relatividad, la masa de la partícula es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula, m es la masa cuando la partícula se mueve con rapidez v con respecto al observador, y c es la rapidez de la luz. Dibuje la gráfica de m como una función v.

54. En la teoria de la relatividad, la energía de una partícula es

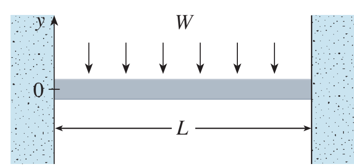
$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + h^2 c^2/\lambda^2}$$

Donde m_0 es la masa en reposo de la particula, λ es la longitud de onda, y h es la constante de Planck. Dibuje la gráfica de E como una función de λ. ¿Qué le dice la gráfica con respecto a la energia?

55. La figura ilustra una viga de longitud L empotrada en paredes de concreto. Si una carga constante W se distribuye proporcionalmente a lo largo de su longitud, la viga adopta la forma de la curva de deflexión

$$y = -\frac{W}{24EI}x^4 + \frac{WL}{12EI}x^3 - \frac{WL^2}{24EI}x^2$$

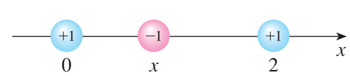
donde E e I son constantes positivas. (E es el módulo de elasticidad de Young e I es el momento de inercia de una sección transversal de la viga.) Trace la gráfica de la curva de deflexión.



56. La ley de Coulomb establece que la fuerza de atracción entre dos partículas cargadas es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. La figura muestra partículas con carga 1 ubicadas en las posiciones 0 y 2 sobre una recta de coordenadas y una partícula con carga -1 en una posición x entre ellas. De la ley de Coulomb se infiere que la fuerza neta que actúa sobre la partícula ubicada en el centro es

$$F(x) = -\frac{k}{x^2} + \frac{k}{(x - 2)^2} \qquad 0 < x < 2$$

donde k es una constante positiva. Trace la gráfica de la función de la fuerza neta. ¿Qué indica la gráfica acerca de la fuerza?



57–60 Determine una ecuación de la asíntota inclinada. No grafique la curva.

57. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

58. $y = \dfrac{2x^3 + x^2 + x + 3}{x^2 + 2x}$

59. $y = \dfrac{4x^3 - 2x^2 + 5}{2x^2 + x - 3}$

60. $y = \dfrac{5x^4 + x^2 + x}{x^3 - x^2 + 2}$

61–66 Por medio de las normas de esta sección grafique la curva. En la norma D encuentre una ecuación de la asíntota inclinada.

61. $y = \dfrac{-2x^2 + 5x - 1}{2x - 1}$

62. $y = \dfrac{x^2 + 12}{x - 2}$

63. $xy = x^2 + 4$

64. $y = e^x - x$

65. $y = \dfrac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1}$

66. $y = \dfrac{(x + 1)^3}{(x - 1)^2}$

67. Demuestre que la curva $y = x - \tan^{-1}x$ tiene dos asíntotas inclinadas: $y = x + \pi/2$ y $y = x - \pi/2$. Aproveche este hecho para graficar la curva.

68. Demuestre que la curva $y = \sqrt{x^2 + 4x}$ tiene dos asíntotas inclinadas: $y = x + 2$ y $y = -x - 2$. Aproveche este hecho para graficar la curva.

69. Demuestre que las rectas $y = (b/a)x$ y $y = -(b/a)x$ son asíntotas inclinadas de la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$.

70. Sea $f(x) = (x^3 + 1)/x$. Demuestre que

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - x^2] = 0$$

Esto muestra que la gráfica de f tiende a la gráfica de $y = x^2$, y decimos que la curva $y = f(x)$ es *asintótica* a la parábola $y = x^2$. A partir de este hecho trace la gráfica de f.

71. Analice el comportamiento asintótico de $f(x) = (x^4 + 1)/x$ de la misma manera que en el ejercicio 70. Utilice después sus resultados para trazar la gráfica de f.

72. A partir del comportamiento asintótico de $f(x) = \cos x + 1/x^2$ trace la gráfica sin recurrir al procedimiento de graficación de curvas que se estudia en esta sección.

4.6 TRAZADO DE GRÁFICAS CON CÁLCULO Y CALCULADORAS

■ Si no ha leído la sección 1.4, debe hacerlo ahora. En particular, en esa sección se explica cómo evitar algunas de las trampas que se encuentran al usar los aparatos graficadores, si se eligen rectángulos de visualización apropiadas.

El método empleado en la sección anterior para trazar curvas fue la culminación de gran parte del estudio del cálculo diferencial que llevó a cabo. La gráfica fue el objeto final que se genera. En esta sección el punto de vista es totalmente distinto. En este caso *empieza* con una gráfica generada por una calculadora graficadora o una computadora y después la afina. Usará el cálculo con objeto de asegurarse que revela todos los aspecto importantes de la curva. Y con el uso de aparatos graficadores abordará curvas que serían demasiado complicadas de considerar sin la tecnología. El tema es la *interacción* entre el cálculo y las calculadoras.

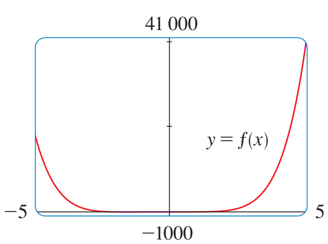


FIGURA 1

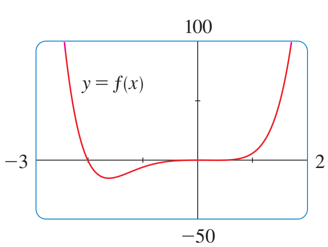


FIGURA 2

EJEMPLO 1 Dibuje el polinomio $f(x) = 2x^6 + 3x^5 + 3x^3 - 2x^2$. Use las gráficas de f' y f'' para estimar todos los puntos máximos y mínimos así como los intervalos de concavidad.

SOLUCIÓN Si especifica un dominio pero no un intervalo, muchos dispositivos graficadores deducirán un intervalo apropiado a partir de los valores que se calculan. La figura 1 muestra el trazo de uno de esos aparatos si especifica que $-5 \leqslant x \leqslant 5$. Si bien este rectángulo de visualización resulta útil para demostrar que el comportamiento asintótico (o comportamiento en los extremos) es el mismo para $y = 2x^6$, es evidente que oculta algunos detalles más finos. De manera que cambie el rectángulo de visualización $[-3, 2]$ por $[-50, 100]$ que se ilustra en la figura 2.

A partir de esta gráfica, parece que hay un valor mínimo absoluto de más o menos -15.33 cuando $x \approx -1.62$ (mediante el uso del cursor) y que f es decreciente sobre $(-\infty, -1.62)$ y creciente sobre $(-1.62, \infty)$. Parece, asimismo, que hay una tangente horizontal en el origen y puntos de inflexión cuando $x = 0$ y cuando x está en alguna parte entre -2 y -1.

Ahora intente confirmar estas impresiones mediante el cálculo. Derive y obtenga

$$f'(x) = 12x^5 + 15x^4 + 9x^2 - 4x$$
$$f''(x) = 60x^4 + 60x^3 + 18x - 4$$

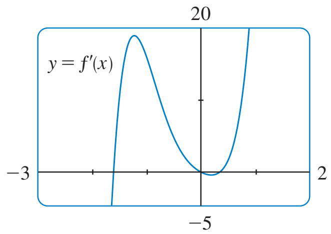


FIGURA 3

Cuando trace la gráfica de f' de la figura 3, verá que $f'(x)$ cambia de negativa a positiva cuando $x \approx -1.62$; esto confirma (por la prueba de la primera derivada) el valor mínimo encontrado al principio. Pero, quizá para sorpresa, advierta también que $f'(x)$ cambia de positiva a negativa cuando $x = 0$, y de negativa a positiva cuando $x \approx 0.35$. Esto significa que f tiene un máximo local en 0 y un mínimo local cuando $x \approx 0.35$, pero éstos se encontraban escondidos en la figura 2. En efecto, si ahora se acerca al origen en la figura 4, verá lo que no había percibido antes: un valor máximo relativo de 0 cuando $x = 0$ y un valor mínimo local de casi -0.1 cuando $x \approx 0.35$.

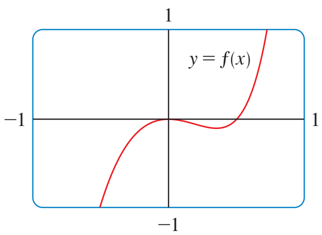


FIGURA 4

¿Qué decir acerca de la concavidad y los puntos de inflexión? Por las figuras 2 y 4 parece haber puntos de inflexión cuando x está un poco a la izquierda de -1 y cuando x está un poco a la derecha de 0. Pero es difícil determinar los puntos de inflexión a partir de la gráfica de f, de modo que dibuje la segunda derivada de f'' en la figura 5. f'' cambia de positiva a negativa cuando $x \approx -1.23$ y de negativa a positiva cuando $x \approx 0.19$. Así, correcto hasta dos cifras decimales, f es cóncava hacia arriba sobre $(-\infty, -1.23)$ y $(0.19, \infty)$ y cóncava hacia abajo sobre $(-1.23, 0.19)$. Los puntos de inflexión son $(-1.23, -10.18)$ y $(0.19, -0.05)$.

Ha descubierto que ninguna gráfica por sí sola revela todas las características importantes de este polinomio. Pero las figuras 2 y 4, tomadas en conjunto, proporcionan una imagen exacta. □

V EJEMPLO 2 Dibuje la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2}$$

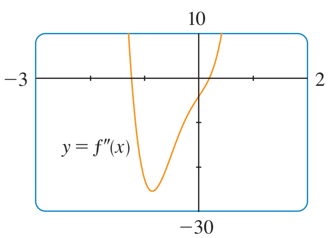


FIGURA 5

en un rectángulo de visualización que contenga todas las características importantes de la función. Estime los valores máximos y mínimos y los intervalos de concavidad. A continuación, aplique el cálculo para determinar estas cantidades exactas.

SOLUCIÓN La figura 6, producida por una computadora con establecimiento automático de escala, es un desastre. Algunas calculadoras graficadoras usan $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$ como rectángulos de visualización predeterminada, de modo que inténtelo. Obtendra la gráfica que se muestra en la figura 7, una mejora importante.

El eje y parece ser una asíntota vertical y lo es porque

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2} = \infty$$

La figura 7 también permite estimar las intersecciones con el eje x: alrededor de -0.5 y -6.5. Los valores exactos se obtienen con la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $x^2 + 7x + 3 = 0$; obtiene $x = \left(-7 \pm \sqrt{37}\right)/2$.

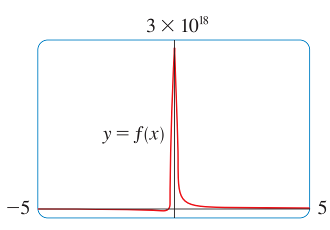


FIGURA 6

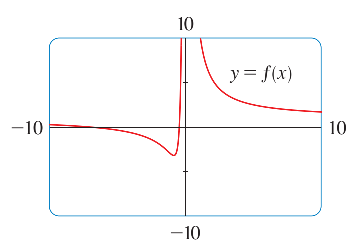


FIGURA 7

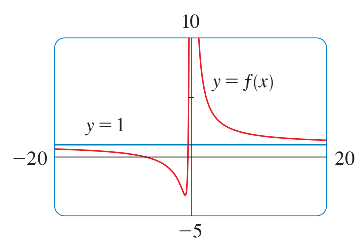


FIGURA 8

Para mirar mejor las asíntotas horizontales, cambie el rectángulo de visualización $[-20, 20]$ por $[-5, 10]$ de la figura 8. Parece que $y = 1$ es la asíntota horizontal y esto se confirma con facilidad:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{7}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = 1$$

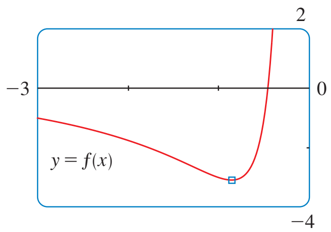


FIGURA 9

Para estimar el valor mínimo, acerque el rectángulo de visualización $[-3, 0]$ por $[-4, 2]$ de la figura 9. El cursor indica que el valor mínimo absoluto es alrededor de -3.1, cuando $x \approx -0.9$, y que la función decrece en $(-\infty, -0.9)$ y $(0, \infty)$, mientras que crece sobre $(-0.9, 0)$. Los valores exactos se obtienen al derivar:

$$f'(x) = -\frac{7}{x^2} - \frac{6}{x^3} = -\frac{7x + 6}{x^3}$$

Esto hace ver que $f'(x) > 0$ cuando $-\frac{6}{7} < x < 0$ y $f'(x) < 0$ cuando $x < -\frac{6}{7}$ cuando $x > 0$. El valor mínimo exacto es $f\left(-\frac{6}{7}\right) = -\frac{37}{12} \approx -3.08$.

La figura 9 también muestra que se presenta un punto de inflexión en alguna parte entre $x = -1$ y $x = -2$. Podrá estimarlos con mucho más exactitud si usa la gráfica de la segunda derivada, pero en este caso es igual de fácil hallar los valores exactos. Puesto que

$$f''(x) = \frac{14}{x^3} + \frac{18}{x^4} = \frac{2(7x + 9)}{x^4}$$

resulta que $f''(x) > 0$ cuando $x > -\frac{9}{7}$ $(x \neq 0)$. De modo que f es cóncava hacia arriba sobre $\left(-\frac{9}{7}, 0\right)$ y $(0, \infty)$ y cóncava hacia abajo sobre $\left(-\infty, -\frac{9}{7}\right)$. El punto de inflexión es $\left(-\frac{9}{7}, -\frac{71}{27}\right)$.

El análisis que usa las dos primeras derivadas hace ver que las figuras 7 y 8 exhiben todos los aspectos importantes de la curva. □

V EJEMPLO 3 Dibuje la función $f(x) = \dfrac{x^2(x + 1)^3}{(x - 2)^2(x - 4)^4}$.

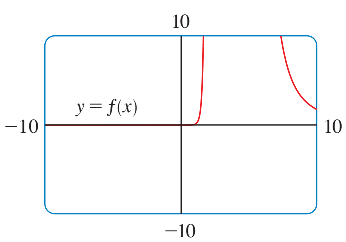


FIGURA 10

SOLUCIÓN Si recurre a su experiencia con una función racional del ejemplo 2, empiece por dibujar f en el rectángulo de visualización $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$. Con base en la figura 10, parece que necesita acercar para ver un detalle más fino y alejarse para ver la imagen más grande. Pero, como guía para realizar acercamientos o alejamientos inteligentes, primero observe con más cuidado la expresión de $f(x)$. Debido a la existencia de los factores $(x - 2)^2$ y $(x - 4)^4$ en el denominador, espere que $x = 2$ y $x = 4$ sean las asíntotas verticales. En efecto

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2(x + 1)^3}{(x - 2)^2(x - 4)^4} = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 4} \frac{x^2(x + 1)^3}{(x - 2)^2(x - 4)^4} = \infty$$

Para hallar las asíntotas horizontales, divida numerador y denominador entre x^6:

$$\frac{x^2(x + 1)^3}{(x - 2)^2(x - 4)^4} = \frac{\dfrac{x^2}{x^3} \cdot \dfrac{(x + 1)^3}{x^3}}{\dfrac{(x - 2)^2}{x^2} \cdot \dfrac{(x - 4)^4}{x^4}} = \frac{\dfrac{1}{x}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^3}{\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^2\left(1 - \dfrac{4}{x}\right)^4}$$

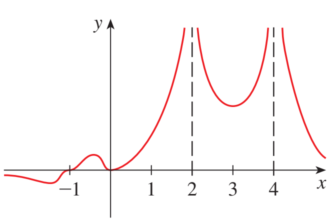


FIGURA 11

Muestra que $f(x) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$ de modo que el eje de las x es la asíntota horizontal.

Asimismo, es muy útil considerar el comportamiento de la gráfica cerca de la intersección con el eje de las x recurriendo a un análisis como el del ejemplo 11 en la sección 2.6. Como x^2 es positivo, $f(x)$ no cambia de signo en 0 y, de este modo, su gráfica no cruza el eje x en 0. Pero en virtud del factor $(x + 1)^3$, la gráfica cruza el eje x en -1 y tiene una tangente horizontal allí. Si reúne toda esta información sin usar las derivadas, la curva tiene que parecerse a la figura 11.

Ahora que sabe qué buscar, acérquese varias veces para producir las gráficas de las figuras 12 y 13; también aléjese varias veces para lograr la figura 14.

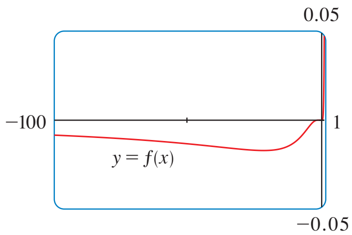


FIGURA 12

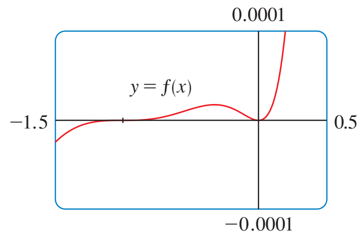


FIGURA 13

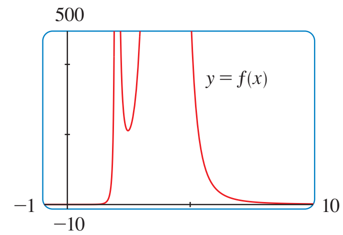


FIGURA 14

A partir de estas gráficas lea que el mínimo absoluto es alrededor de -0.02 y se tiene cuando $x \approx -20$. También hay un máximo local ≈ 0.00002 cuando $x \approx -0.3$ y un mínimo local ≈ 211 cuando $x \approx 2.5$. Asimismo, estas gráficas muestran puntos de inflexión cerca de -35, -5 y -1, y dos entre -1 y 0. Para estimar mejor los puntos de inflexión, necesita dibujar f'', pero calcular esta segunda derivada a mano es una tarea irrazonable. Si cuenta con un sistema de cómputo algebraico es fácil (véase el ejercicio 15).

Queda claro que para esta función en particular, se necesitan *tres* gráficas (figuras 12, 13 y 14) a fin de reunir toda la información útil. La única manera de exhibir todas estas características de la función en una gráfica es dibujarla a mano. A pesar de las exageraciones y las distorsiones, la figura 11 es útil para resumir la naturaleza esencial de la función. □

■ La familia de funciones

$$f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} cx)$$

donde c es una constante, se encuentra en aplicaciones a la síntesis de modulación de frecuencia (FM). Una onda senoidal se modula por medio de una onda con frecuencia diferente $(\operatorname{sen} cx)$. En el ejemplo 4 se estudia el caso en que $c = 2$. En el ejercicio 25 se examina otro caso especial.

EJEMPLO 4 Dibuje la función $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} 2x)$. Para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, estime todos los valores máximos y mínimos, los intervalos de incremento y decremento, y los puntos de inflexión, correctos a una cifra decimal.

SOLUCIÓN En primer lugar, observe que f es periódica con periodo 2π. Además, f es impar y $|f(x)| \leqslant 1$ para todo x. De modo que la selección de un rectángulo de visualización no es un problema para esta función: empiece con $[0, \pi]$ por $[-1.1, 1.1]$. (Véase la figura 15.)

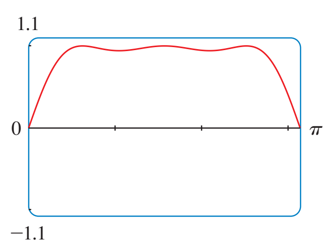


FIGURA 15

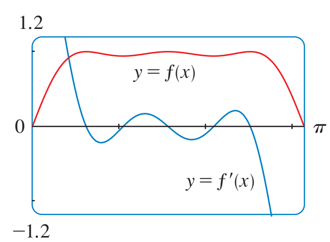


FIGURA 16

Parece que existen tres valores máximos locales y dos valores mínimos locales en esa ventana. Para confirmar esto y localizarlos con más exactitud, calcule que

$$f'(x) = \cos(x + \operatorname{sen} 2x) \cdot (1 + 2 \cos 2x)$$

y dibuje f y f' en la figura 16.

Con el acercamiento y la prueba de la primera derivada, resultan los valores aproximados siguientes hasta una cifra decimal.

Intervalos de crecimiento:	$(0, 0.6)$, $(1.0, 1.6)$, $(2.1, 2.5)$
Intervalos de decrecimiento:	$(0.6, 1.0)$, $(1.6, 2.1)$, $(2.5, \pi)$
Valores máximos locales:	$f(0.6) \approx 1$, $f(1.6) \approx 1$, $f(2.5) \approx 1$
Valores mínimos locales:	$f(1.0) \approx 0.94$, $f(2.1) \approx 0.94$

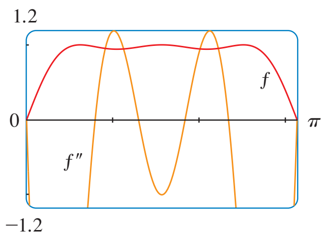


FIGURA 17

La segunda derivada es

$$f''(x) = -(1 + 2\cos 2x)^2 \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} 2x) - 4 \operatorname{sen} 2x \cos(x + \operatorname{sen} 2x)$$

Si dibuja f y f' en la figura 17, obtiene los valores aproximados siguientes:

Cóncava hacia arriba sobre:	$(0.8, 1.3)$, $(1.8, 2.3)$
Cóncava hacia abajo sobre:	$(0, 0.8)$, $(1.3, 1.8)$, $(2.3, \pi)$
Puntos de inflexión:	$(0, 0)$, $(0.8, 0.97)$, $(1.3, 0.97)$, $(1.8, 0.97)$, $(2.3, 0.97)$

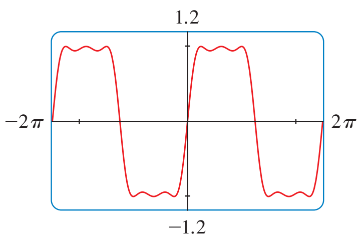


FIGURA 18

Luego de comprobar que la figura 15 representa f con exactitud en $0 \leqslant x \leqslant \pi$, puede decir que la gráfica extendida de la figura 18 representa f con exactitud en $-2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$. □

El ejemplo final se relaciona con las *familias* de funciones. De acuerdo con la sección 1.4, esto quiere decir que las funciones de la familia se relacionan entre sí mediante una fórmula que contiene una o más constantes arbitrarias. Cada valor de la constante impulsa a un miembro de la familia, y la idea es ver cómo la gráfica de la función cambia cuando la constante se modifica.

V EJEMPLO 5 ¿Cómo varía la gráfica de $f(x) = 1/(x^2 + 2x + c)$ al cambiar c?

SOLUCIÓN Las gráficas de las figuras 19 y 20 (los casos especiales $c = 2$ y $c = -2$) muestran dos curvas muy distintas. Antes de dibujar más gráficas, vea qué tienen en común los miembros de esta familia. Puesto que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + c} = 0$$

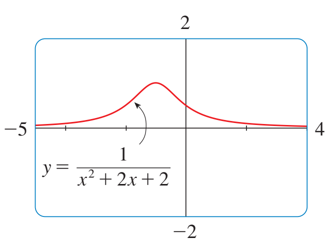


FIGURA 19
$c = 2$

para cualquier valor c, todos tienen el eje x como asíntota horizontal. Se tendrá una asíntota vertical cuando $x^2 + 2x + c = 0$. Si se resuelve esta ecuación cuadrática, se obtiene $x = -1 \pm \sqrt{1 - c}$. Cuando $c > 1$, no hay asíntota vertical (como en la figura 19). Cuando $c = 1$, la gráfica tiene una sola asíntota vertical $x = -1$ porque

$$\lim_{x\to -1} \frac{1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{(x + 1)^2} = \infty$$

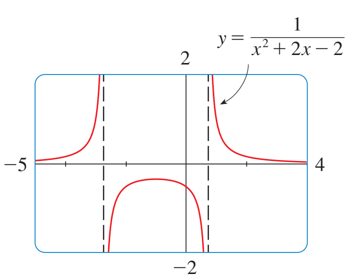


FIGURA 20
$c = -2$

Cuando $c < 1$, se tienen dos asíntotas verticales: $x = -1 \pm \sqrt{1 - c}$ (como en la figura 20).

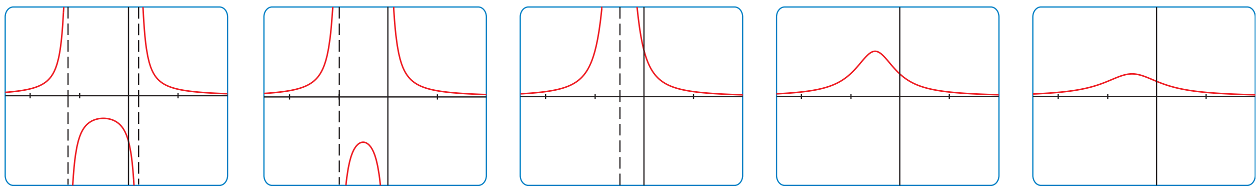
Ahora, calcule la derivada:

$$f'(x) = -\frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + c)^2}$$

Esto hace ver que $f'(x) = 0$ cuando $x = -1$ (si $c \neq 1$), $f'(x) > 0$ cuando $x < -1$, y $f'(x) < 0$ cuando $x > -1$. Para $c \geqslant 1$, esto significa que f crece sobre $(-\infty, -1)$ y decrece sobre $(-1, \infty)$. Para $c > 1$ hay un valor máximo absoluto $f(-1) = 1/(c-1)$. Para $c < 1$, $f(-1) = 1/(c-1)$ es un valor máximo local y los intervalos de incremento y de decremento se interrumpen en las asíntotas verticales.

La figura 21 es una "presentación de transparencias" en que se exhiben cinco miembros de la familia, todos con sus gráficas en el rectángulo de visualización $[-5, 4]$ por $[-2, 2]$. Como se predijo, $c = 1$ es el valor en que ocurre la transición de dos asíntotas verticales a una y, a continuación, a ninguna. A medida que c crece a partir de 1, el punto máximo se vuelve más bajo; esto se explica por el hecho que $1/(c-1) \to 0$ cuando $c \to \infty$. Cuando c decrece a partir de 1, las asíntotas verticales se separan cada vez más porque la distancia entre ellas es $2\sqrt{1-c}$, la cual aumenta a medida que $c \to -\infty$. Una vez más, el punto máximo se aproxima al eje x porque $1/(c-1) \to 0$ cuando $c \to -\infty$.

TEC Vea la animación de la figura 21 en Visual 4.6.



$c = -1$ $c = 0$ $c = 1$ $c = 2$ $c = 3$

FIGURA 21 La familia de funciones $f(x) = 1/(x^2 + 2x + c)$

Es evidente que no hay punto de inflexión cuando $c \leqslant 1$. Para $c > 1$ calcula que

$$f''(x) = \frac{2(3x^2 + 6x + 4 - c)}{(x^2 + 2x + c)^3}$$

y deduce que se tiene punto de inflexión cuando $x = -1 \pm \sqrt{3(c-1)}/3$. De modo que los puntos de inflexión se extienden al crecer c y esto parece plausible por lo que se ve en las dos últimas partes de la figura 21. □

4.6 EJERCICIOS

1–8 Trace gráficas de f que revelen todos los aspectos importantes de la curva. En particular, use gráficas de f' y f'' para estimar los intervalos de incremento y de decremento, los valores extremos, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

1. $f(x) = 4x^4 - 32x^3 + 89x^2 - 95x + 29$

2. $f(x) = x^6 - 15x^5 + 75x^4 - 125x^3 - x$

3. $f(x) = x^6 - 10x^5 - 400x^4 + 2500x^3$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{40x^3 + x + 1}$

5. $f(x) = \dfrac{x}{x^3 - x^2 - 4x + 1}$

6. $f(x) = \tan x + 5 \cos x$

7. $f(x) = x^2 - 4x + 7 \cos x, \quad -4 \leqslant x \leqslant 4$

8. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 - 9}$

9–10 Elabore gráficas de f que revelen todos los aspectos importantes de la curva. Estime los intervalos de incremento y de decremento, los intervalos de concavidad y aplique el cálculo para hallar con exactitud estos intervalos.

9. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{8}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

10. $f(x) = \dfrac{1}{x^8} - \dfrac{2 \times 10^8}{x^4}$

11–12

(a) Grafique la función.

(b) Aplique la regla de l'Hospital para explicar el comportamiento cuando $x \to 0$.

(c) Estime el valor mínimo y los intervalos de concavidad. Luego, mediante cálculo determine los valores exactos.

11. $f(x) = x^2 \ln x$

12. $f(x) = xe^{1/x}$

13–14 Dibuje a mano la gráfica utilizando las asíntotas y las intersecciones, pero no las derivadas. Enseguida use su dibujo como guía para producir gráficas (con un aparato graficador) que exhiba las características importantes de la curva. Utilice estas gráficas para estimar los valores máximos y mínimos.

13. $f(x) = \dfrac{(x+4)(x-3)^2}{x^4(x-1)}$

14. $f(x) = \dfrac{(2x+3)^2(x-2)^5}{x^3(x-5)^2}$

CAS **15.** Si f es la función considerada en el ejemplo 3, use un sistema algebraico para computadora para calcular f' y dibújela para confirmar que todos los valores máximos y mínimos son como los que se dan en el ejemplo. Calcule f'' y úsela para estimar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

CAS **16.** Si f es la función del ejercicio 14 encuentre f' y f'' y use sus gráficas para estimar los intervalos de incremento y decremento y la concavidad de f.

CAS **17–22** Use un sistema algebraico para computadora para dibujar f y hallar f' y f''. Utilice las gráficas de estas derivadas para estimar los intervalos de incremento y decremento, los valores máximos, los valores extremos, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de f.

17. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+x+1}$

18. $f(x) = \dfrac{x^{2/3}}{1+x+x^4}$

19. $f(x) = \sqrt{x + 5\,\mathrm{sen}\,x}, \quad x \leqslant 20$

20. $f(x) = (x^2-1)e^{\arctan x}$

21. $f(x) = \dfrac{1-e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$

22. $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\tan x}}$

CAS **23–24**

(a) Grafique la función.

(b) Explique la forma de la gráfica mediante el cálculo del límite cuando $x \to 0^+$ o cuando $x \to \infty$.

(c) Estime los valores máximo y mínimo, y luego, mediante cálculo, determine los valores exactos.

(d) Utilice una gráfica de f'' para estimar las coordenadas x de los puntos de inflexión.

23. $f(x) = x^{1/x}$

24. $f(x) = (\mathrm{sen}\,x)^{\mathrm{sen}\,x}$

25. En el ejemplo 4 se consideró un miembro de la familia de funciones $f(x) = \mathrm{sen}(x + \mathrm{sen}\,cx)$ que se presentan en la síntesis de frecuencia modulada (FM). En este ejercicio investigue la función para $c = 3$. Empiece por dibujar f en el rectángulo de visualización $[0, \pi]$ por $[-1.2, 1.2]$ ¿Cuántos puntos máximos locales observa? La gráfica tiene más que son visibles a simple vista. Para descubrir los puntos máximos y mínimos ocultos necesitará analizar con mucho cuidado la gráfica de f'. De hecho, ayuda mirar al mismo tiempo la gráfica de f''. Encuentre todos los valores máximos y mínimos así como los puntos de inflexión. A continuación trace la gráfica de f en el rectángulo de visualización $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1.2, 1.2]$ y haga comentarios en cuanto a la simetría.

26–33 Describa cómo cambia la gráfica de f conforme varía c. Trace la gráfica de varios miembros de la familia para ilustrar las tendencias que descubra. En particular, deberá investigar cómo se mueven los puntos máximos y mínimos y los puntos de inflexión cuando cambia c. Debe, asimismo, identificar cualesquiera valores de transición de c en los cuales cambie la forma básica de la curva.

26. $f(x) = x^3 + cx$

27. $f(x) = x^4 + cx^2$

28. $f(x) = x^2\sqrt{c^2 - x^2}$

29. $f(x) = e^{-c/x^2}$

30. $f(x) = \ln(x^2 + c)$

31. $f(x) = \dfrac{cx}{1+c^2x^2}$

32. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)^2 + cx^2}$

33. $f(x) = cx + \mathrm{sen}\,x$

34. La familia de funciones $f(t) = C(e^{-at} - e^{-bt})$, donde a, b y C son números positivos y $b > a$, se ha utilizado para modelar la concentración de un medicamento administrado por vía intravenosa en el instante $t = 0$. Trace la gráfica de varios miembros de esta familia. ¿Qué tienen en común? Para valores fijos de C y a, descubra en forma gráfica qué sucede a medida que b crece. Enseguida aplique el cálculo para probar lo que ha descubierto.

35. Investigue la familia de curvas dada por $f(x) = xe^{-cx}$, donde c es un número real. Empiece por calcular los límites de $x \to \pm\infty$. Identifique los valores de la transición de c donde cambia la forma básica. ¿Qué sucede con los puntos máximo y mínimo y los puntos de inflexión cuando se modifica c? Ilustre mediante gráficas de varios miembros de la familia.

36. Investigue la familia de curvas dadas por la ecuación $f(x) = x^4 + cx^2 + x$. Empiece por determinar el valor de transición de c en los cuales cambia el número de los puntos de inflexión. Luego trace la gráfica de varios miembros de la familia con el fin de observar cuáles formas son posibles. Existe otro valor de transición de c en el cual cambia la cantidad de números críticos. Trate de descubrirlo en forma gráfica. En seguida, demuestre lo que descubrió.

37. (a) Investigue la familia de polinomios dada por la ecuación $f(x) = cx^4 - 2x^2 + 1$. ¿Para qué valores de c tiene puntos mínimos la curva?

(b) Demuestre que los puntos mínimo y máximo de cada curva de la familia se encuentran sobre la parábola $y = 1 - x^2$. Ilustre trazando la gráfica de esta parábola y de varios miembros de la familia.

38. (a) Investigue la familia de polinomios dada por la ecuación $f(x) = 2x^3 + cx^2 + 2x$. ¿Para qué valores de c la curva tiene puntos máximos y mínimos?

(b) Demuestre que los puntos mínimo y máximo de cada curva de la familia se encuentran sobre la curva $y = x - x^3$. Ilustre dibujando esta curva y varios miembros de la familia.

4.7 PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Los métodos para hallar valores extremos aprendidos en este capítulo tienen aplicaciones prácticas en muchas áreas de la vida. Una persona de negocios quiere minimizar los costos y maximizar las utilidades. El principio de Fermat, en óptica, afirma que la luz sigue la trayectoria que le toma menos tiempo. En esta sección y en la siguiente resolverá problemas como los de maximizar áreas, volúmenes y utilidades, y minimizar distancias, tiempos y costos.

En la solución de esos problemas prácticos, el desafío más grande suele ser convertir el problema en palabras en un problema matemático de optimización, establecer la función que debe maximizarse o minimizarse. Recuerde los principios de solución de problemas que se analizaron en la página 76 y adaptelos a esta situación:

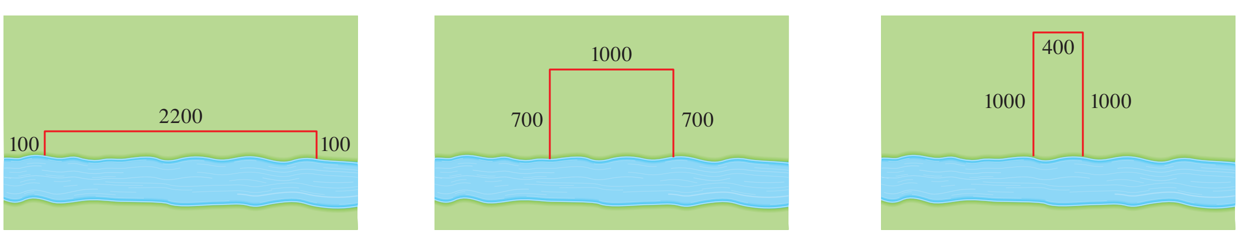
PASOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

1. **Comprenda el problema** El primer paso es leer el problema con cuidado, hasta que se entienda con claridad. Hágase las preguntas: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son las cantidades dadas? ¿Cuáles son las condiciones dadas?
2. **Dibuje un diagrama** En la mayor parte de los problemas, resulta útil dibujar un diagrama e identificar en él las cantidades dadas y requeridas.
3. **Introduzca notación** Asigne un símbolo a la cantidad que se va a maximizar o minimizar (llámela Q por ahora). Asimismo, seleccione símbolos $(a, b, c, \ldots, x, y)$ para las otras cantidades desconocidas y marque el diagrama con estos símbolos sugerentes; por ejemplo, A para el área, h para altura y t para el tiempo.
4. Exprese Q en términos de algunos de los otros símbolos del paso 3.
5. Si en el paso 4 Q se ha expresado como función de más de una variable, utilice la información dada para hallar correspondencias (en la forma de ecuaciones) entre estas variables. Enseguida, use estas ecuaciones para eliminar todas las variables, excepto una, en la expresión para Q. De esta suerte, Q se expresará como función de *una* variable x, por ejemplo, $Q = f(x)$. Escriba el dominio de esta función.
6. Aplique los métodos de las secciones 4.1 y 4.3 para hallar el valor máximo o el mínimo absolutos de f. En particular, si el dominio de f es un intervalo cerrado, después se puede utilizar el método del intervalo cerrado de la sección 4.1.

EJEMPLO 1 Un granjero tiene 2 400 pies de cerca y desea cercar un campo rectangular que limita con un río recto. No necesita cercar a lo largo del río. ¿Cuáles son las dimensiones del campo que tiene el área más grande?

- Comprenda el problema
- Analogía. Intente casos especiales
- Dibuje diagramas

SOLUCIÓN Para tener idea de lo que ocurre en este problema, experimente con algunos casos especiales. En la figura 1 se muestran (no a escala) tres maneras posibles de emplear los 2 400 pies de cerca.



Área = 100 · 2200 = 220 000 pies^2 Área = 700 · 1000 = 700 000 pies^2 Área = 1000 · 400 = 400 000 pies^2

FIGURA 1

Cuando intenta cercar campos poco profundos y anchos, o profundos y anchos, obtiene áreas más o menos pequeñas. Parece que existe alguna configuración intermedia que produce al área más grande.

■ Introduzca notación

En la figura 2 se ilustra el caso general. Desea maximizar el área A del rectángulo. Sean x y y la profundidad y el ancho del campo (en pies). Enseguida exprese A en términos de x y y:

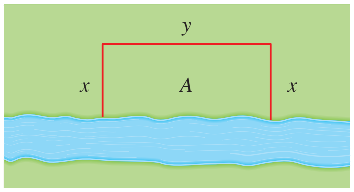


FIGURA 2

$$A = xy$$

Quiere expresar A como expresión sólo de una variable, de modo que elimina y al expresarla en términos de x. Para llevar a cabo esto, usa la información dada de que la longitud total de la cerca es 2 400 pies. Por esto.

$$2x + y = 2400$$

A partir de esta ecuación $y = 2400 - 2x$, lo cual da

$$A = x(2400 - 2x) = 2400x - 2x^2$$

Observe que $x \geqslant 0$ y $x \leqslant 1\,200$ (de lo contrario $A < 0$). De manera que la función que desea maximizar es

$$A(x) = 2400x - 2x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1200$$

La derivada es $A'(x) = 2\,400 - 4x$, de suerte que para encontrar los números críticos resuelve la ecuación

$$2400 - 4x = 0$$

lo cual da $x = 600$. El valor máximo de A debe ocurrir en este número o en uno de los puntos extremos del intervalo. Como $A(0) = 0$, $A(600) = 720\,000$ y $A(1\,200) = 0$, el método del intervalo cerrado da el valor máximo como $A(600) = 720\,000$.

[De modo alternativo, podría ver que $A''(x) = -4 < 0$ para todo x, de modo que A siempre es cóncava hacia abajo y el máximo local en $x = 600$ debe ser un máximo absoluto.]

En estos términos, el campo rectangular debe tener 600 pies de profundidad y 1 200 pies de ancho. □

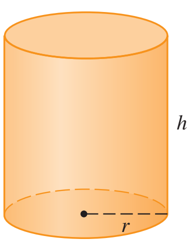


FIGURA 3

EJEMPLO 2 Se va a fabricar una lata para que contenga 1 L de aceite. Halle las dimensiones que minimizarán el costo del metal para fabricar la lata.

SOLUCIÓN Dibuje el diagrama como el de la figura 3, donde r es el radio y h la altura (ambos en cm). Para minimizar el costo del metal, minimice el área superficial total del cilindro (tapa, fondo y lados). A partir de la figura 4, observe que los lados se fabrican de una lámina rectangular con dimensiones $2\pi r$, y h de manera que el área superficial es

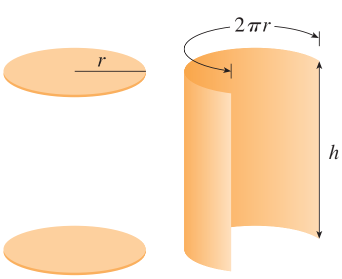
$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Para eliminar h, aplique el hecho de que se da el volumen como de 1 L, lo cual tomamos como 1 000 cm^3. Por lo tanto

$$\pi r^2 h = 1000$$

lo cual da $h = 1\,000/(\pi r^2)$. Si se sustituye esto en la ecuación para A, se tiene

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$



Área $2(\pi r^2)$ Área $(2\pi r)h$

FIGURA 4

Por lo tanto, la función que desea minimizar es

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \qquad r > 0$$

Para hallar los números críticos derive

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$

■ En el proyecto de aplicación que se presenta en la página 333 se investiga la forma más económica para una lata tomando en cuenta otros costos de fabricación.

Entonces, $A'(r) = 0$ cuando $\pi r^3 = 500$, de modo que el único número crítico es $r = \sqrt[3]{500/\pi}$.

Como el dominio de A es $(0, \infty)$, no puede aplicar el argumento del ejemplo 1 relativo a los puntos extremos; pero observe que $A'(r) < 0$ para $r < \sqrt[3]{500/\pi}$ y $A'(r) > 0$ para $r > \sqrt[3]{500/\pi}$, por lo que A es decreciente para todo r a la izquierda del número crítico y creciente para todo r a la derecha. De este modo, $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ debe dar lugar a un mínimo *absoluto*.

[Como otra posibilidad podría argumentar que $A(r) \to \infty$ cuando $r \to 0^+$ y $A(r) \to \infty$ cuando $r \to \infty$, de manera que debe haber un valor mínimo de $A(r)$, el cual tiene que ocurrir en el número crítico. Véase la figura 5.]

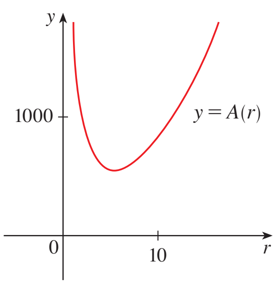


FIGURA 5

El valor de h correspondiente a $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ es

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi(500/\pi)^{2/3}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

En estos términos, a fin de minimizar el costo de la lata, el radio debe ser $\sqrt[3]{500/\pi}$ cm, y la altura debe ser igual al doble del radio; a saber, el diámetro. □

NOTA 1 El argumento que se usó en el ejemplo 2 para justificar el mínimo absoluto es una variante de la prueba de la primera derivada (la cual sólo se aplica a los valores máximos o mínimos *locales*) y se enuncia a continuación para referencia futura:

TEC En Module 4.7 podrá ver seis problemas de optimización adicionales, incluyendo animaciones de las situaciones físicas.

PRUEBA DE LA PRIMERA DERIVADA PARA VALORES EXTREMOS ABSOLUTOS Suponga que c es un número crítico de una función continua f definida sobre un intervalo.

(a) Si $f'(x) > 0$ para toda $x < c$ y $f'(x) < 0$ para toda $x > c$, entonces $f(c)$ es el valor máximo absoluto de f.

(b) Si $f'(x) < 0$ para toda $x < c$ y $f'(x) > 0$ para toda $x > c$, $f(c)$ es el valor mínimo absoluto de f.

NOTA 2 Otro método para resolver problemas de optimización consiste en usar la derivación implícita. Vea el ejemplo 2 una vez más para ilustrar el método. Trabaje con las mismas ecuaciones

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad \pi r^2 h = 100$$

Pero en vez de eliminar h, derive las dos ecuaciones implícitamente con respecto a r

$$A' = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi rh' \qquad 2\pi rh + \pi r^2 h' = 0$$

El mínimo se presenta en un número crítico, de tal suerte que $A' = 0$, simplifique y llegue a las ecuaciones

$$2r + h + rh' = 0 \qquad 2h + rh' = 0$$

y al restar, da $2r - h = 0$, o bien $h = 2r$.

EJEMPLO 3 Encuentre el punto sobre la parábola $y^2 = 2x$ más cercano al punto $(1, 4)$.

SOLUCIÓN La distancia entre el punto $(1, 4)$ y el punto (x, y) es

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$$

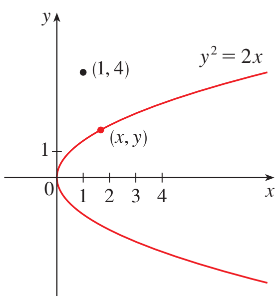


FIGURA 6

(Véase la figura 6.) Pero si (x, y) se encuentra sobre la parábola, entonces $x = \frac{1}{2}y^2$, de modo que la expresión para d se convierte en

$$d = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)^2 + (y-4)^2}$$

(Como otra opción pudo sustituir $y = \sqrt{2x}$ para obtener d en términos de sólo x.) En lugar de minimizar d, minimice su cuadrado:

$$d^2 = f(y) = \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)^2 + (y-4)^2$$

(Convénzase por usted mismo que el mínimo de d se tiene en el mismo punto que el mínimo de d^2, pero es más fácil trabajar con este último.) Al derivar, obtiene

$$f'(y) = 2\left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)y + 2(y-4) = y^3 - 8$$

de modo que $f'(y) = 0$ cuando $y = 2$. Observe que $f'(y) < 0$ cuando $y < 2$ y $f'(y) > 0$ cuando $y > 2$, de suerte que por la prueba de la primera derivada para valores extremos absolutos, se presenta el mínimo absoluto cuando $y = 2$. (O podría decir que, debido a la naturaleza geométrica del problema, es obvio que existe un punto lo más próximo, pero no un punto que esté lo más alejado.) El valor correspondiente de $x = \frac{1}{2}y^2 = 2$. Por esto, el punto de $y^2 = 2x$ más cercano a $(1, 4)$ es $(2, 2)$. □

EJEMPLO 4 Un hombre está en un punto A sobre una de las riberas de un río recto que tiene 3 km de ancho y desea llegar hasta el punto B, 8 km corriente abajo en la ribera opuesta, tan rápido como le sea posible (véase la figura 7). Podría remar en su bote, cruzar directamente el río hasta el punto C y correr hasta B, o podría remar hasta B o, en última instancia, remar hasta algún punto D, entre C y B, y luego correr hasta B. Si puede remar a 6 km/h y correr a 8 km/h, ¿dónde debe desembarcar para llegar a B tan pronto como sea posible? (Suponga que la rapidez del agua es insignificante comparada con la rapidez a la que rema el hombre.)

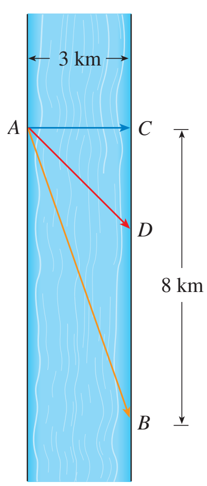


FIGURA 7

SOLUCIÓN Sea x la distancia de C hasta D, entonces la distancia por correr es $|DB| = 8 - x$; el teorema de Pitágoras da la distancia por remar como $|AD| = \sqrt{x^2 + 9}$. Utilice la ecuación

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$$

Por lo tanto el tiempo que tiene que remar es $\sqrt{x^2+9}/6$ y el que debe correr es $(8-x)/8$, de modo que el tiempo total T, como función de x, es

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8}$$

El dominio de esta función t es $[0, 8]$. Advierta que si $x = 0$, el hombre rema hacia C y si $x = 8$ rema directamente hacia B. La derivada de T es

$$T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8}$$

De este modo, si se aplica el hecho de que $x \geqslant 0$

$$T'(x) = 0 \iff \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{8} \iff 4x = 3\sqrt{x^2+9}$$

$$\iff 16x^2 = 9(x^2+9) \iff 7x^2 = 81$$

$$\iff x = \frac{9}{\sqrt{7}}$$

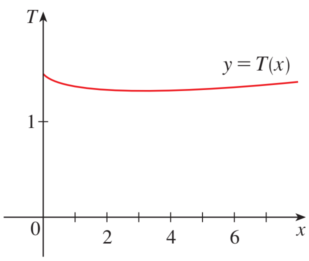


FIGURA 8

El único número crítico es $x = 9/\sqrt{7}$. Para ver si el mínimo se presenta en este número crítico o en uno de los puntos extremos del dominio $[0, 8]$, evalúe T en los tres puntos:

$$T(0) = 1.5 \qquad T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1.33 \qquad T(8) = \frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1.42$$

Dado que el valor menor de estos valores de T se tiene cuando $x = 9/\sqrt{7}$, el valor mínimo absoluto de T debe tenerse allí. En la figura 8 se ilustra este cálculo con la gráfica de T.

Por esto el hombre debe atracar en un punto $9/\sqrt{7}$ km ($\approx$3.4 km) corriente abajo del punto de partida. □

V EJEMPLO 5 Encuentre el área del rectángulo más grande que puede inscribirse en una semicircunferencia de radio r.

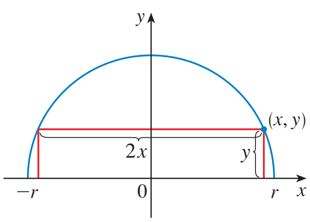


FIGURA 9

SOLUCIÓN 1 Tome la semicircunferencia como la mitad superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ con centro en el origen. Entonces la palabra *inscrito* significa que el rectángulo tiene dos de sus vértices sobre la semicircunferencia y los otros dos sobre el eje x, como se muestra en la figura 9.

Sea (x, y) el vértice que se encuentra en el primer cuadrante. En tal caso el rectángulo tiene lados de longitudes $2x$ y y, de manera que su área es

$$A = 2xy$$

Para eliminar y, aproveche que (x, y) se encuentra sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ por consiguiente $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. De esta forma

$$A = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

El dominio de esta función es $0 \leqslant x \leqslant r$. Su derivada es

$$A' = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

la cual es 0 cuando $2x^2 = r^2$; es decir $x = r/\sqrt{2}$ (ya que $x \geqslant 0$). Este valor de x da un valor máximo de A, porque $A(0) = 0$ y $A(r) = 0$. Por lo tanto, el área del rectángulo inscrito más grande es

$$A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = r^2$$

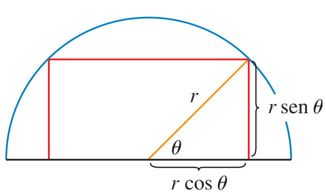


FIGURA 10

SOLUCIÓN 2 Es posible una solución más sencilla si usa un ángulo como variable. Sea θ el ángulo que se ilustra en la figura 10. Despues el área del rectángulo es

$$A(\theta) = (2r\cos\theta)(r\,\mathrm{sen}\,\theta) = r^2(2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\cos\theta) = r^2\,\mathrm{sen}\,2\theta$$

Sabe que sen 2θ tiene un valor máximo de 1 y se alcanza cuando $2\theta = \pi/2$. De modo que $A(\theta)$ tiene un valor máximo de r^2 y se presenta cuando $\theta = \pi/4$.

Advierta que esta solución trigonométrica no comprende la derivación. De hecho, no necesita aplicar el cálculo en absoluto. □

APLICACIONES A LOS NEGOCIOS Y LA ECONOMÍA

En la sección 3.7 se introdujo la idea de costo marginal. Recuerde que si $C(x)$, la **función de costo**, es el costo de producir x unidades de cierto producto, por lo tanto el **costo marginal** es la relación de cambio de C respecto de x. En otras palabras, la función de costo marginal es la derivada $C'(x)$ de la función de costo.

Considere ahora el mercadeo. Sea $p(x)$ el precio por unidad que la compañía carga si vende x unidades. Entonces p se llama **función de demanda** (o **función de precio**) y cabe esperar que sea una función decreciente de x. Si se venden x unidades y el precio por unidad es $p(x)$, en consecuencia el ingreso total es

$$R(x) = xp(x)$$

y R se llama **función de ingreso** (o **función de ventas**). La derivada R' de la función de ingreso se denomina **función de ingreso marginal** y es la relación de cambio del ingreso con respecto al número de unidades vendidas.

Si se venden x unidades, entonces la utilidad total es

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

y P es la **función de utilidad**. La **función de utilidad marginal** es P’, la derivada de la función de utilidad. En los ejercicios 53-58 se le pide aplicar las funciones del costo marginal, el ingreso, y la de utilidad para minimizar costos y maximizar el ingreso y la utilidad.

V EJEMPLO 6 Una tienda ha vendido 200 quemadores de DVD a la semana, a \$350 cada uno. Una investigación de mercado indica que por cada \$10 de descuento que se ofrezca a los compradores, el número de aparatos vendidos se incrementará en 20 a la semana. Encuentre las funciones de demanda y de ingreso ¿Qué tan grande debe ser la rebaja para maximizar el ingreso?

SOLUCIÓN Si x denota los reproductores vendidos a la semana, entonces, el incremento semanal en las ventas es $x - 200$. Por cada incremento de 20 reproductores vendidos, el precio disminuye \$10. De manera que por cada reproductor adicional vendido, la disminución en el precio es $\frac{1}{20} \times 10$ y la función de demanda es

$$p(x) = 350 - \tfrac{10}{20}(x - 200) = 450 - \tfrac{1}{2}x$$

La función de ingreso es

$$R(x) = xp(x) = 450x - \tfrac{1}{2}x^2$$

Como $R'(x) = 450 - x$, $R'(x) = 0$ cuando $x = 450$. Por la prueba de la primera derivada (o sencillamente al observar que la gráfica de R es una parábola que se abre hacia abajo), este valor de x da un máximo absoluto. El precio correspondiente es

$$p(450) = 450 - \tfrac{1}{2}(450) = 225$$

y el descuento es de $350 - 225 = 125$. Por consiguiente, para maximizar el ingreso la tienda debe ofrecer un descuento de \$125. □

4.7 EJERCICIOS

1. Considere el problema siguiente. Encuentre dos números cuya suma es 23 y cuyo producto es un máximo.

(a) Formule una tabla de valores, como la que aparece a continuación, de tal suerte que la suma de los números en las primeras dos columnas sea siempre 23. Con base en la evidencia de su tabla, estime la respuesta al problema

Primer número	Segundo número	Producto
1	22	22
2	21	42
3	20	60
⋮	⋮	⋮

(b) Aplique el cálculo para resolver el problema y compárelo con su respuesta al inciso (a).

2. Encuentre dos números cuya diferencia sea 100 y cuyo producto sea un mínimo.

3. Encuentre dos números positivos cuyo producto sea 100 y cuya suma sea un mínimo.

4. Halle un número positivo tal que la suma del número y su recíproco sean lo más pequeños posible.

5. Encuentre las dimensiones de un rectángulo con un perímetro de 100 m cuya área sea lo más grande posible.

6. Encuentre las dimensiones de un rectángulo con un área de 1000 m^2 cuyo perímetro sea lo más pequeño posible.

7. Un modelo aplicado para el rendimiento Y de un cultivo agrícola como una función del nivel de nitrógeno N en el suelo (que se mide en unidades apropiadas) es

$$Y = \frac{kN}{1 + N^2}$$

donde k es una constante positiva. ¿Qué nivel de nitrógeneo proporciona el mejor rendimiento?

8. La cantidad (en mg de carbón/m^3/h) en que se lleva a cabo la fotosíntesis de un especie de fitoplancton se diseña mediante la función

$$P = \frac{100I}{I^2 + I + 4}$$

donde I es la intensidad de luz (que se mide en millares de bujía-pie). ¿Para qué intensidad de luz P es máxima?

9. Considere el problema siguiente: un granjero que dispone de 750 pies de cerca desea cercar un área rectangular y luego dividirla en cuatro corrales con un cercado paralelo a un lado del rectángulo. ¿Cuál es el área total más grande posible de los cuatro corrales?

(a) Dibuje varios diagramas que ilustren la situación, algunos con corrales poco profundos y anchos y algunos con corrales profundos y estrechos. Halle el área total de estas configuraciones. ¿Parece existir un área máxima? De ser así, estímela.
(b) Dibuje un diagrama que ilustre la situación en general. Introduzca notaciones e identifique el diagrama con sus símbolos.
(c) Escriba una expresión para el área total.
(d) Use la información dada para escribir una ecuación que relacione las variables.
(e) Utilice el inciso (d) para escribir el área total como función de una variable.
(f) Termine de resolver el problema y compare la respuesta con la estimación que hizo en el inciso (a).

10. Considere el problema que se enuncia enseguida: se va a construir una caja con la parte superior abierta a partir de un trozo cuadrado de cartón que tiene 3 pies de ancho, al recortar un cuadrado de cada una de las cuatro esquinas y doblar los lados hacia arriba. Encuentre el volumen más grande que puede tener una caja semejante.

(a) Dibuje varios diagramas para ilustrar la situación; algunas cajas cortas con bases grandes y otras con bases pequeñas. Encuentre el volumen de varias de esas cajas. ¿Parece que existe un volumen máximo? Si es así, estímelo.
(b) Dibuje un diagrama en que ilustre la situación general. Introduzca la notación y marque el diagrama con sus símbolos.
(c) Escriba una expresión para el volumen.
(d) Use la información dada para escribir una ecuación que relacione las variables.
(e) Utilice el inciso (d) para escribir el volumen como función de una variable.
(f) Termine de resolver el problema y compare la respuesta con la estimación que hizo en el inciso (a).

11. Un granjero quiere cercar un área de 1.5 millones de pies cuadrados de un campo rectangular, y luego dividirla a la mitad mediante una cerca paralela a uno de los lados del rectángulo. ¿De qué manera debe hacerlo para que los costos de la cerca sean mínimos?

12. Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de 32 000 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.

13. Si se cuenta con 1 200 cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada y la parte superior abierta, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

14. Un recipiente rectangular de almacenaje con la parte superior abierta debe tener un volumen de 10 m^3. El largo de su base es el doble del ancho. El material para la base cuesta \$10 por metro cuadrado. El material para los costados, \$6 por metro cuadrado. Encuentre el costo de los materiales para tener el más barato de esos recipientes.

15. Resuelva el ejercicio 14 suponiendo que el recipiente tiene una tapa que se fabrica del mismo material que los lados.

16. (a) Demuestre que de todos los rectángulos con un área dada, el que tiene el perímetro menor es un cuadrado.
(b) Demuestre que de todos los rectángulos con un perímetro dado, el que tiene el área máxima es un cuadrado.

17. Encuentre el punto en la recta $y = 4x + 7$ que está más cerca al origen.

18. Determine el punto en la recta $6x + y = 9$ que está más cerca al punto $(-3, 1)$.

19. Halle los puntos sobre la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ que se encuentran más lejos del punto $(1, 0)$.

20. Encuentre las coordenadas del punto sobre la curva $y = \tan x$ que esté más cerca al punto (1, 1) con una aproximación de 2 dígitos decimales.

21. Determine las dimensiones del rectángulo con el área más grande que se puede inscribir en un círculo de radio r.

22. Encuentre el área del rectángulo más grande que puede inscribirse en la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

23. Halle las dimensiones del rectángulo de área más grande que se pueda inscribir en un triángulo equilátero de lado L si un lado del rectángulo se encuentra en la base del triángulo.

24. Encuentre las dimensiones del rectángulo de área más grande que tenga su base sobre el eje x y sus otros dos vértices por arriba del eje x sobre la parábola $y = 8 - x^2$.

25. Calcule las dimensiones del triángulo isósceles de mayor área que se puede inscribir en el círculo de radio r.

26. Calcule el área del rectángulo más grande que se puede inscribir en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 4 cm, si dos lados del rectángulo coinciden con los catetos.

27. Se inscribe un cilindro circular recto en una esfera de radio r. Encuentre el volumen más grande posible de ese cilindro.

28. Se inscribe un cilindro circular recto en un cono con una altura h y radio de la base r. Halle el volumen más grande posible de semejante cilindro.

29. Un cilindro circular recto está inscrito en una esfera de radio r. Determine el área superficial más grande posible de dicho cilindro.

30. Una ventana normanda tiene forma de rectángulo rematado por un semicírculo. (Por esto, el diámetro del semicírculo es igual al ancho del rectángulo. Véase el ejercicio 56 de la página 23.) Si el perímetro de la ventana es de 30 pies, encuentre las dimensiones de la ventana de modo que entre la cantidad más grande de luz.

31. Los márgenes superior e inferior de un *poster* miden 6 cm, y los márgenes laterales miden 4 cm. Si el área impresa del *poster* se fija en 384 cm^2, determine las dimensiones del *poster* cuya área sea la mínima.

32. El área de un *poster* tiene que ser de 180 pulg^2, y los márgenes laterales e inferior deben medir 1 pulg y el margen superior debe ser de 2 pulg. ¿Qué dimensiones darán el área impresa máxima?

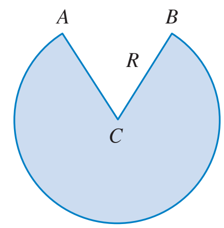
33. Un trozo de alambre de 10 m de largo se corta en dos partes. Una se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. ¿Cómo debe cortarse el alambre de modo que el área total encerrada sea (a) máxima, y (b) mínima.

34. Resuelva el ejercicio 33 si un trozo se dobla para formar un cuadrado y el otro forma un círculo.

35. Se fabrica una lata cilíndrica sin tapa de tal modo que contenga V cm^3 de líquido. Calcule las dimensiones que minimizarán el costo del metal para hacer la lata.

36. Una cerca de 8 pies de altura corre paralela a un edificio alto, a una distancia de 4 pies de este último. ¿Cuál es la longitud de la escalera más corta que llegará desde el suelo pasando por encima de la cerca, hasta la pared del edificio?

37. Se elabora un cono para beber a partir de un trozo circular de papel de radio R, al recortar un sector y unir los bordes CA y CB. Encuentre la capacidad máxima del cono.



38. Se va a fabricar un cono de papel para beber que debe contener 27 cm^3 de agua. Encuentre la altura y el radio del cono que usará la menor cantidad de papel.

39. Se inscribe un cono con altura h dentro de un cono más grande con altura H de modo que su vértice se encuentra en el centro de la base del cono más grande. Demuestre que el cono interno tiene un volumen máximo cuando $h = \frac{1}{3}H$.

40. Un objeto con peso W es arrastrado a lo largo de una superficie horizontal mediante una fuerza que actúa a lo largo de una cuerda unida al objeto. Si la cuerda hace un ángulo θ con un plano, en tal caso la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

donde μ es una constante llamada el coeficiente de fricción. ¿Para que valor de θ, F es la más pequeña?

41. Si un resistor de R ohms se conecta a los bornes de una batería de E volts con resistencia interna r, en tal caso la potencia (en watts) en el resistor externo es

$$P = \frac{E^2 R}{(R + r)^2}$$

Si E y r son constantes pero R varía, ¿cuál es el valor máximo de la potencia?

42. Para un pez que nada con una rapidez v con relación al agua, el consumo de energía por unidad de tiempo es proporcional a v^3. Se cree que el pez migratorio trata de minimizar la energía total requerida para nadar una distancia fija. Si nada contra una corriente $u(u < v)$, el tiempo requerido para nadar una distancia L es $L/(v - u)$ y la energía total E necesaria para nadar la distancia se expresa por medio de

$$E(v) = av^3 \cdot \frac{L}{v - u}$$

donde a es la constante de proporcionalidad.

(a) Determine el valor de v que minimice E.

(b) Dibuje la gráfica de E.

Nota: Este resultado se ha comprobado de manera experimental; el pez migratorio nada contra corriente con una rapidez 50% mayor que la rapidez de esa corriente.

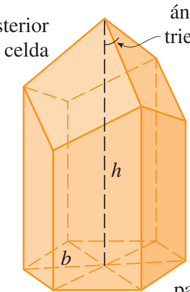
43. En una colmena cada celda es un prisma hexagonal regular, abierto en uno de sus extremos y con un ángulo triedro en el otro como en la figura. Se cree que las abejas forman sus celdas de manera que se minimice el área superficial para un volumen dado, usando de esta forma la menor cantidad de cera en la construcción de las mismas. El examen de estas celdas ha hecho ver que la medida del ángulo θ es sorprendentemente coherente. Con base en la geometría de la celda, se puede demostrar que el área superficial S se expresa con

$$S = 6sh - \tfrac{3}{2}s^2 \cot\theta + \left(3s^2\sqrt{3}/2\right)\csc\theta$$

donde s, la longitud de los lados del hexágono, y h la altura, son constantes.

(a) Calcule $dS/d\theta$.
(b) ¿Cuál ángulo deben preferir las abejas?
(c) Determine el área superficial mínima de la celda (en términos de s y h).

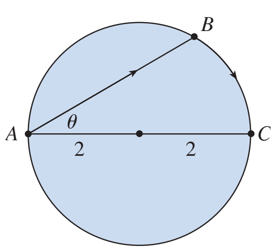
Nota: Se han hecho medidas reales del ángulo θ en las colmenas y las medidas de estos ángulos rara vez difieren del valor calculado más de 2°.



44. Un barco sale de un muelle a las 2:00 P.M. y viaja con rumbo al sur con una rapidez de 20 km/h. Otro buque ha estado navegando con rumbo al este a 15 km/h y llega al mismo muelle a las 3:00 P.M. ¿A qué hora estuvieron más cerca entre sí los dos navíos?

45. Resuelva el problema del ejemplo 4 si el río mide 5 km de anchura y el punto B está a sólo 5 km corriente abajo de A.

46. Una mujer que se encuentra en un punto A sobre la playa de un lago circular con radio de 2 mi desea llegar al punto C, opuesto al A sobre el otro lado del lago, en el tiempo más corto posible. Puede caminar a razón de 4 mi/h y remar en un bote a 2 mi/h. ¿En qué ángulo en relación con el diámetro debe remar?



47. Una refinería se localiza al norte de la orilla de un río recto que es de 2 km de ancho. Se debe construir una tubería desde la refinería hasta un tanque de almacenamiento que se localiza al sur de la orilla del río 6 km al este de la refinería. El costo de instalación de la tubería es 400 000 dólares/km en tierra hasta el punto P al norte de la orilla y 800 000 dólares/km bajo el río hasta el tanque. Con la finalidad de minimizar el costo de la tubería, ¿dónde se localiza P?

48. Considere que la refinería en el ejercicio 47 se localiza a 1 km al norte del río. ¿Dónde se localiza P?

49. La iluminación de un objeto por una fuente luminosa es directamente proporcional a la intensidad de la fuente e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a esa fuente. Si se colocan dos fuentes luminosas, una tres veces más fuerte que la otra, separadas una distancia de 10 pies, ¿dónde debe colocarse un objeto sobre la recta entre las dos fuentes de modo que reciba la iluminación mínima?

50. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por el punto (3, 5) que elimine el área mínima del primer cuadrante.

51. Sean a y b números positivos. Encuentre la longitud más corta del segmento rectilíneo que sea cortado por el primer cuadrante y pase por el punto (a, b).

52. ¿En qué puntos de la curva $y = 1 + 40x^3 - 3x^5$ la recta tangente tiene la pendiente más grande?

53. (a) Si $C(x)$ es el costo de producir x unidades de una mercancía, en tal caso el **costo promedio** por cada unidad es $c(x) = C(x)/x$. Demueste que si el costo promedio es un mínimo, en tal caso el costo marginal es igual al costo promedio.
(b) Si $C(x) = 16\,000 + 200x + 4x^{3/2}$, en dólares, hallar (i) el costo, costo promedio, y costo marginal en un nivel de producción de 1 000 unidades; (ii) el nivel de producción que minimizará el costo promedio; y (iii) el costo promedio mínimo.

54. (a) Demuestre que si la utilidad $P(x)$ es un máximo, por lo tanto el ingreso marginal es igual al costo marginal.
(b) Si $C(x) = 16\,000 + 500x - 1.6\,x^2 + 0.004x^3$ es la función costo y $p(x) = 1700 - 7x$ es la función demanda, hallar el nivel de producción que maximice la utilidad.

55. Un equipo de béisbol juega en un estadio con una capacidad de 55 000 espectadores. Con precios de los boletos en \$10, la asistencia promedio fue de 27 000 espectadores. Cuando el precio bajó hasta \$8, la asistencia promedio subió hasta 33 000.
(a) Encuentre la función de demanda, suponiendo que es lineal.
(b) ¿A qué precio deben fijarse los boletos para maximizar el ingreso?

56. Durante los meses de verano, Andrés hace y vende collares en la playa. El verano anterior los vendió a \$10 cada uno y sus ventas promediaron 20 unidades por día. Cuando aumentó el precio \$1, encontró que perdió dos ventas diarias.
(a) Encuentre la función de demanda, suponiendo que es lineal.
(b) Si el material para cada collar le cuesta \$6 a Andrés, ¿cuál debe ser el precio de venta para que maximice su utilidad?

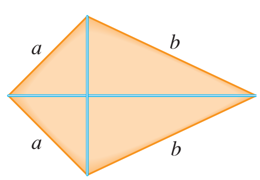
57. Un fabricante ha vendido 100 aparatos de televisión por semana a \$450 cada uno. Una investigación de mercado indica que por cada \$10 de descuento que ofrezca, el número de aparatos se incrementará en 1 000 por semana.

(a) Encuentre la función de demanda.
(b) ¿Cuán grande debe ser el descuento que ofrezca la compañía para maximizar su ingreso?
(c) Si la función de costo semanal es $C(x) = 68\,000 + 150x$, ¿cuál tiene que ser la magnitud del descuento para maximizar la utilidad?

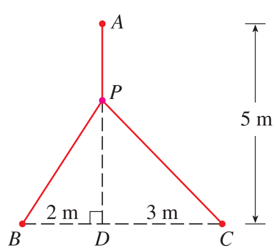
58. Por experiencia, el gerente de un complejo de apartamentos de 100 unidades sabe que se ocuparán todas si la renta es de \$800 al mes. Una investigación del mercado sugiere que, en promedio, quedará una unidad vacía por cada incremento de \$10 en la renta. ¿Cuánto debe cobrar el gerente por renta para maximizar el ingreso?

59. Demuestre que de todos los triángulos isósceles con un perímetro dado el que posee el área más grande es equilátero.

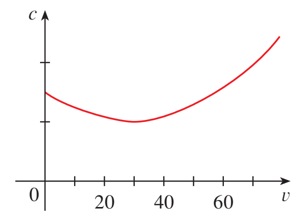
CAS **60.** Se va a construir el armazón de una cometa a partir de seis trozos de madera. Se han cortado los cuatro trozos exteriores con las longitudes que se indican en la figura. Para maximizar el área de la cometa, ¿qué longitud deben tener los trozos diagonales?



61. Un punto P necesita ser ubicado en algún lugar de la recta AD de modo que la longitud total L de cables que unen P con los puntos A, B y C sea mínima (véase figura). Exprese L en función de $x = |AP|$ y mediante las gráficas de L y dL/dx para estimar el valor mínimo.



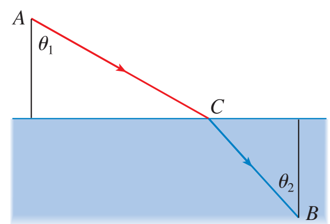
62. En la gráfica se muestra el consumo c de combustible de un automóvil (medido en galones por hora) como función de la rapidez v del mismo. Con rapidez muy bajas, el motor funciona de manera ineficiente; de modo que, inicialmente, c decrece a medida que la rapidez aumenta. Pero con rapidez, se incrementa el consumo de combustible. Usted puede ver que para este automóvil, $c(v)$ se minimiza cuando $v \approx 30$ mi/h. Sin embargo, para lograr la eficiencia respecto al combustible, lo que debe minimizarse no es el consumo de galones por hora sino de galones *por milla*. Denote este consumo con G. Use la gráfica para estimar la rapidez la cual G tiene el valor mínimo.



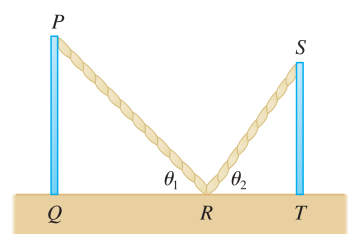
63. Sean v_1 la velocidad de la luz en el aire y v_2 la velocidad de la luz en el agua. Según el principio de Fermat, un rayo de luz viaja de un punto A en el aire a un punto B en el agua por una trayectoria ACB que minimiza el tiempo para hacer el recorrido. Demuestre que

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

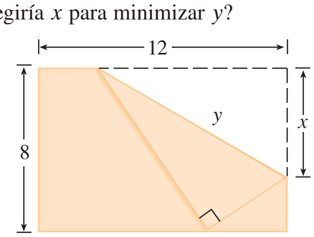
donde θ_1 (el ángulo de incidencia) y θ_2 (el ángulo de refracción) son como se muestra en la figura. Esta ecuación se conoce como ley de Snell.



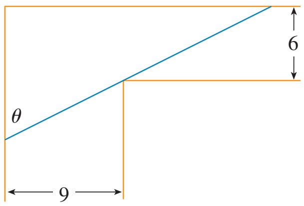
64. Dos postes verticales, PQ y ST, se aseguran por medio de un cable PRS extendido desde el extremo superior del primer poste hasta un punto R sobre el piso y, a continuación, hasta el extremo superior del segundo poste, como se ve en la figura. Demuestre que se tiene la longitud más corta de ese cable cuando $\theta_1 = \theta_2$



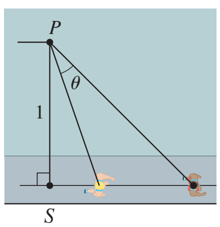
65. Se dobla la esquina superior izquierda de un trozo de papel de 8 pulgadas de ancho por 12 pulgadas de largo para llevarla hasta el borde de la derecha, como en la figura. ¿Cómo la doblaría de modo que se minimice la longitud del doblez? En otras palabras, ¿cómo elegiría x para minimizar y?



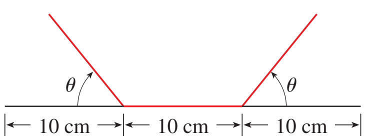
66. Se está transportando un tubo de acero por un pasillo de 9 pies de ancho. Al final de éste existe una vuelta a ángulo recto hacia otro pasillo más angosto de 6 pies de ancho. ¿Cuál es la longitud del tubo más largo que se puede hacer pasar horizontalmente por la esquina?



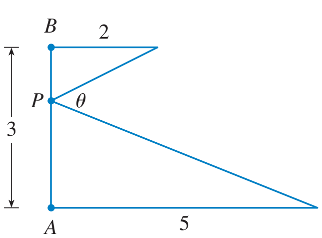
67. Un observador está de pie en el punto P, una unidad alejado de la pista. Dos corredores parten del punto S en la figura y corren a lo largo de la pista. Un corredor corre tres veces más rápido que el otro. Determine el valor máximo del ángulo de visión θ del observador entre los corredores. [*Sugerencia*: maximice $\tan \theta$.]



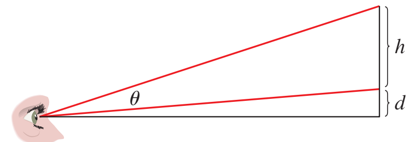
68. Se va a construir un canal para el agua de lluvia a partir de una lámina de metal de 30 cm de ancho doblando hacia arriba una tercera parte de la lámina en cada lado a través de un ángulo θ. ¿Cómo debe elegirse θ de manera que el canal conduzca la mayor cantidad de agua?



69. ¿Dónde debe elegirse el punto P sobre el segmento rectilíneo AB de modo que se maximice el ángulo θ?



70. En una galería de arte, una pintura tiene la altura h y está colgada de modo que su borde inferior queda a una distancia d arriba del ojo del observador (como se muestra en la figura). ¿Qué tan lejos de la pared debe pararse un observador para tener la mejor vista? (En otras palabras ¿dónde debe situarse el observador a fin de que se maximice el ángulo θ subtendido en su ojo por la pintura?

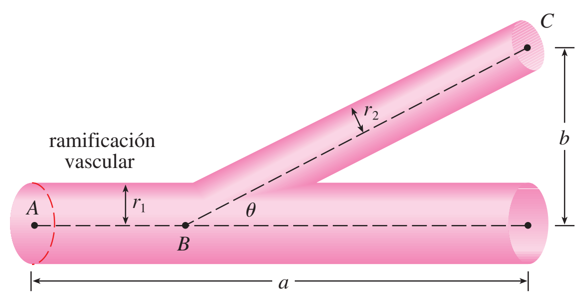


71. Halle el área máxima de un rectángulo que pueda circunscribirse con respecto a un rectángulo dado con longitud L y ancho W. [*Sugerencia:* Exprese el área como una función de un ángulo θ.]

72. El sistema vascular consta de vasos (arterias, arteriolas, capilares y venas) que llevan la sangre desde el corazón hasta los órganos y de regreso a aquél. Este sistema tiene que trabajar de manera que se minimice la energía consumida por el corazón al bombear la sangre. En particular, esta energía se reduce cuando se baja la resistencia de la sangre. Una de las leyes de Poiseuille da la resistencia R de la sangre como

$$R = C\frac{L}{r^4}$$

donde L es la longitud del vaso sanguíneo, r es el radio y C es una constante positiva determinada por la viscosidad de la sangre. (Poiseuille estableció esta ley a nivel experimental, pero también se deduce a partir de la ecuación 2 de la sección 8.4.2.) En la figura se muestra un vaso sanguíneo principal con radio r_1, el cual se ramifica formando un ángulo θ hacia un vaso más pequeño, con radio r_2.



(a) Aplique la ley de Poiseuille para demostrar que la resistencia total de la sangre a lo largo de la trayectoria en ABC es

$$R = C\left(\frac{a - b\cot\theta}{r_1^4} + \frac{b\csc\theta}{r_2^4}\right)$$

donde a y b son las distancias que se ven en la figura.

(b) Pruebe que esta resistencia se minimiza cuando

$$\cos\theta = \frac{r_2^4}{r_1^4}$$

(c) Encuentre el ángulo óptimo de ramificación (correcto hasta el grado más cercano) cuando el radio del vaso sanguíneo menor es dos tercios el radio del mayor.

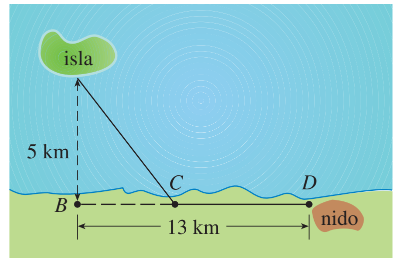
73. Los ornitólogos han determinado que algunas especies de pájaros tienden a evitar vuelos sobre grandes masas de agua durante las horas diurnas. Se cree que se requiere más energía para volar sobre al agua que sobre la tierra porque, en general, el aire se eleva sobre la tierra y cae sobre el agua durante el día. Se libera un pájaro con estas tendencias desde una isla que está a 5 km del punto más cercano B de una costa recta, vuela hasta un punto C de la costa y luego a lo largo de ésta hasta la zona D en que se encuentra su nido. Suponga que el pájaro busca de manera instintiva una trayectoria que minimice su consumo de energía. Los puntos B y D están separados 13 km.

(a) En general, si consume 1.4 veces más energía para volar sobre el agua que sobre la tierra, ¿hasta cuál punto C debe volar el pájaro para minimizar el consumo total de energía de regreso a la zona donde está su nido?

(b) Denote con W y L la energía (en joules) por kilómetro volado sobre el agua y sobre la tierra, respectivamente. ¿Qué significaría un valor grande de la proporción W/L en términos del vuelo del pájaro? ¿Qué significado tendría un valor pequeño? Determine la proporción W/L correspondiente al consumo mínimo de energía.

(c) ¿Cuál debe ser el valor de W/L para que el ave vuele directamente hasta la zona D donde está su nido? ¿Cuál tiene que ser el valor de W/L para que vuele hasta B y, a continuación, a lo largo de la costa hasta D?

(d) Si los ornitólogos observan que los pájaros de ciertas especies alcanzan la costa en un punto a 4 km de B, ¿cuántas veces más energía consume un ave para volar sobre el agua que sobre la tierra?



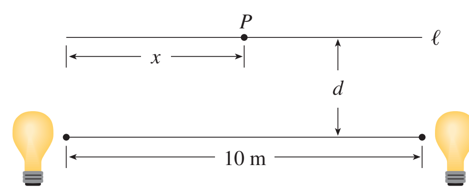
74. Se colocan dos fuentes luminosas de intensidad idéntica separadas 10 m. Un objeto está en un punto P, sobre una recta ℓ paralela a la recta que une las fuentes luminosas y a una distancia de d metros de esta línea (véase la figura). Desea localizar P sobre ℓ de manera que se minimice la intensidad de la iluminación. Necesita aplicar el hecho de que la intensidad de la iluminación de una sola fuente es directamente proporcional a la intensidad de ésta e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a ella.

(a) Encuentre una expresión para la intensidad $I(x)$ en el punto P.

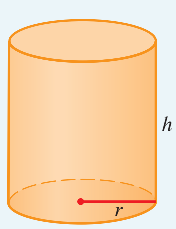
(b) Si $d = 5$ m, use las gráficas de $I(x)$ e $I'(x)$ para demostrar que la intensidad se minimiza cuando $x = 5$ m, es decir, cuando P está en el punto medio de ℓ.

(c) Si $d = 10$ m, demuestre que la intensidad (quizás de modo sorprendente) no se minimiza en el punto medio.

(d) En algún lugar entre $d = 5$ m y $d = 10$ m se tiene un valor de transición de d en el cual el punto de iluminación mínima cambia de manera abrupta. Estime este valor de d mediante métodos gráficos. Enseguida, encuentre el valor exacto de d.

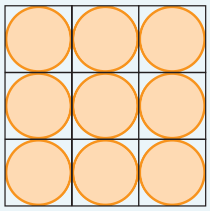


PROYECTO DE APLICACIÓN — LA FORMA DE UNA LATA

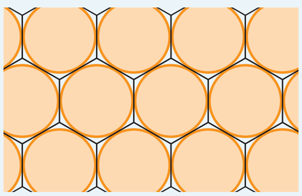


En este proyecto se investiga el modo más económico de formar una lata. En primer lugar, esto significa que se da el volumen V de una lata cilíndrica y necesita hallar la altura h y el radio r que minimice el costo del metal para fabricarla (véase la figura). Si hace caso omiso de cualquier desecho de metal en el proceso de fabricación, el problema es minimizar el área superficial del cilindro. En el ejemplo 2 de la sección 4.7, resolvió este problema y halló que $h = 2r$; es decir, la altura debe ser igual al diámetro. Pero si usted va a su alacena o al supermercado con una regla, descubrirá que la altura suele ser mayor que el diámetro y que la relación h/r varía desde 2 hasta alrededor de 3.8. Vea si puede explicar este fenómeno.

1. El material para las latas se corta de láminas metálicas. Los costados cilíndricos se forman al doblar rectángulos; estos rectángulos se cortan de la hoja con poco o ningún desperdicio. Pero



Discos cortados de cuadrados



Discos cortados de hexágonos

si los discos superior y del fondo se cortan a partir de cuadrados de lado $2r$ (como en la figura), esto genera una cantidad de metal de desecho considerable, el cual puede reciclarse pero que tiene poco o ningún valor para quienes fabrican latas. Si éste es el caso, demuestre que se minimiza la cantidad de metal usado cuando

$$\frac{h}{r} = \frac{8}{\pi} \approx 2.55$$

2. Se obtiene un apiñamiento más eficiente de los discos dividiendo la hoja metálica en hexágonos y luego cortar las tapas y bases circulares a partir de ellos (véase la figura). Demuestre que, si se adopta esta estrategia, en tal caso

$$\frac{h}{r} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \approx 2.21$$

3. Los valores de h/r que se encontraron en los problemas 1 y 2 están un poco más cercanos a los que se encuentran en los anaqueles del supermercado, pero todavía no toman en cuenta todo. Si mira con más atención algunas latas reales, la tapa y la base se forman a partir de discos con radios más grandes que r, los cuales se doblan sobre los extremos de la lata. Si toma en cuenta esto, incrementa h/r. Lo que es más significativo, además del costo del metal, necesita incorporar la fabricación de la lata al costo. Suponga que se incurre en la mayor parte del desembolso al unir los costados a los bordes de las latas. Si corta los discos a partir de hexágonos, como en el problema 2, después el costo es proporcional a

$$4\sqrt{3}\,r^2 + 2\pi rh + k(4\pi r + h)$$

donde k es el recíproco de la longitud que se puede unir para el costo de una unidad de área de metal. Demuestre que esta expresión se minimiza cuando

$$\frac{\sqrt[3]{V}}{k} = \sqrt[3]{\frac{\pi h}{r}} \cdot \frac{2\pi - h/r}{\pi h/r - 4\sqrt{3}}$$

4. Trace la gráfica de $\sqrt[3]{V}/k$ como función de $x = h/r$ y úsela para argumentar que cuando una lata es grande o realizar la unión es barato, debe hacer que h/r sea aproximadamente igual a 2.21 (como en el problema 2). Pero cuando la lata es pequeña o unir resulta costoso, h/r tiene que ser apreciablemente mayor.

5. El análisis hace ver que las latas grandes deben ser casi cuadradas y las pequeñas altas y delgadas. Eche una mirada a las formas relativas de las latas en un supermercado. ¿La conclusión suele ser cierta en la práctica? ¿Hay excepciones? ¿Puede sugerir las razones por las que las latas pequeñas no siempre son altas y delgadas?

4.8 MÉTODO DE NEWTON

Suponga que un distribuidor de automóviles le ofrece uno en \$18 000 al contado o en pagos de \$375 al mes durante cinco años. A usted le gustaría saber qué tasa de interés le está cargando el distribuidor. Para hallar la respuesta, tiene que resolver la ecuación

$$\boxed{1} \qquad 48x(1 + x)^{60} - (1 + x)^{60} + 1 = 0$$

(Los detalles se explican en el ejercicio 41.) ¿Cómo podría resolver una ecuación de este tipo?

Para una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, existe una fórmula bien conocida para las raíces. Para las ecuaciones de tercer y cuarto grados también existen fórmulas para las raíces, pero son en extremo complicadas. Si f es un polinomio de grado 5 o superior, no existe

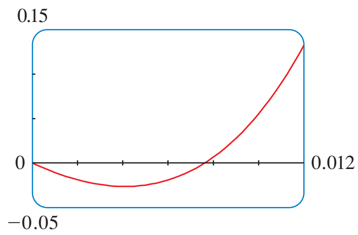


FIGURA 1

■ Intente resolver la ecuación 1 con el buscador numérico de raíces de su calculadora o computadora. Algunas máquinas no pueden resolverla. Otras tienen éxito, pero requieren que se les especifique un punto de partida para la búsqueda.

una fórmula de este tipo (véase la nota de la página 210). Del mismo modo, no hay una fórmula que permita hallar las raíces exactas de una ecuación trascendente como $\cos x = x$.

Puede hallar una solución *aproximada* para la ecuación 1 dibujando el lado izquierdo de la misma. La gráfica de la figura 1 se produjo con un aparato graficador y después de experimentar con los rectángulos de visualización.

Además de la solución $x = 0$ que no interesa, hay una solución entre 0.007 y 0.008. Un acercamiento muestra que la raíz es más o menos 0.0076. Si necesita más exactitud, haga varios acercamientos, pero esto se vuelve tedioso. Una opción más rápida es usar un buscador numérico de raíces en una calculadora o en un sistema algebraico para computadora. Si así lo hace, encuentra que la raíz, correcta hasta nueve dígitos decimales, es 0.007628603.

¿Cómo funcionan estos buscadores numéricos de raíces? Se aplican diversos métodos pero en la mayor parte se usa el **método de Newton**, que también se conoce como **método de Newton-Raphson**. Se explica cómo trabaja este método, en parte para mostrar qué sucede en el interior de la calculadora o computadora y, en parte, como una aplicación de la idea de aproximación lineal.

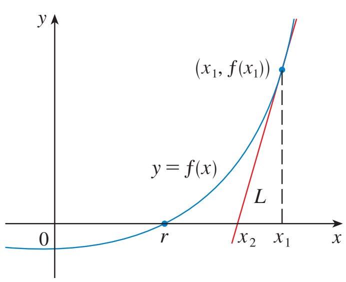


FIGURA 2

En la figura 2 se muestra la geometría que se encuentra detrás del método de Newton, donde se ha asociado una r a la raíz que intenta hallar. Empiece con una primera aproximación x_1, la cual se obtiene por tanteos, o de un esquema aproximado de la gráfica de f a partir de la gráfica de f generada por una computadora. Considere la recta tangente L a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_1, f(x_1))$ y vea la intersección de L con el eje x, marcada como x_2. La idea tras el método de Newton es que la recta tangente está cercana a la curva y, por consiguiente, su intersección con el eje x, x_2, está cerca de la intersección de la curva con el eje x (a saber, la raíz r que busca). Debido a que la tangente es una recta, puede hallar con facilidad su intersección con el eje x.

Para encontrar una fórmula para x_2 en términos de x_1, usa el hecho de que la pendiente de L es $f'(x_1)$, de modo que su ecuación es

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

Como la intersección x de L es x_2, se establece $y = 0$ y se obtiene

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

Si $f'(x_1) \neq 0$, puede resolver esta ecuación para x_2:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Use x_2 como una aproximación para r.

En seguida repita este procedimiento con x_1 reemplazada por x_2, usando la recta tangente en $(x_2, f(x_2))$. Ésta da una tercera aproximación:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

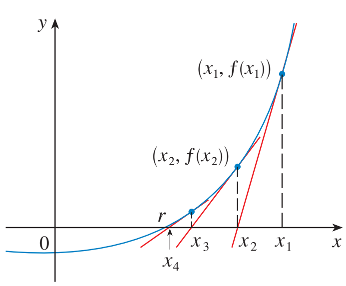


FIGURA 3

Si sigue repitiendo este proceso, obtendrá una sucesión de aproximaciones $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$, como se observa en la figura 3. En general, si la n-ésima aproximación es x_n y $f'(x_n) \neq 0$, por lo tanto la siguiente aproximación se expresa con

2
$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

■ Las sucesiones se presentaron de manera breve en *Presentación preliminar del cálculo* en la página 6. En la sección 11.1 se inicia un análisis más detallado.

Si los números x_n se aproximan cada vez más a r cuando n se hace grande, entonces la sucesión *converge* a r y se escribe

$$\lim_{n\to\infty} x_n = r$$

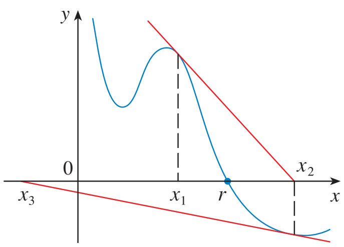


FIGURA 4

Aun cuando la sucesión de aproximaciones sucesivas converge a la raíz deseada, para funciones del tipo que se ilustra en la figura 3, en ciertas circunstancias la sucesión puede no converger. Por ejemplo, considere la situación que se ilustra en la figura 4. Puede ver que x_2 es una aproximación más deficiente que x_1. Quizás éste sea el caso cuando $f'(x_1)$ este cercana a 0. Incluso podría suceder que una aproximación (como la de x_3 de la figura 4) caiga fuera del dominio de f. Por lo tanto el método de Newton falla y debe elegirse una mejor aproximación inicial x_1. Véanse los ejercicios 31 a 34 en relación con ejemplos específicos en que el método de Newton funciona con mucha lentitud o no funciona en absoluto.

V EJEMPLO 1 Empiece con $x_1 = 2$, y encuentre la tercera aproximación x_3 para la raíz de la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$.

SOLUCIÓN Aplique el método de Newton con

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 \qquad \text{y} \qquad f'(x) = 3x^2 - 2$$

TEC En Module 4.8 puede investigar cómo funciona el método de Newton para diferentes funciones cuando cambie x_1

El propio Newton utilizó esta ecuación para ilustrar su método y eligió $x_1 = 2$ después de experimentar un tanto porque $f(1) = -6$, $f(2) = -1$ y $f(3) = 16$. La ecuación 2 se convierte en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2}$$

Con $n = 1$, tiene

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - 2x_1 - 5}{3x_1^2 - 2}$$

$$= 2 - \frac{2^3 - 2(2) - 5}{3(2)^2 - 2} = 2.1$$

■ En la figura 5 se muestra la geometría detrás del primer paso del método de Newton del ejemplo 1. Como $f'(2) = 10$, la recta tangente $y = x^3 - 2x - 5$ en $(2, -1)$ tiene una ecuación $y = 10x - 21$ de manera que su intersección x es $x_2 = 2.1$.

En seguida con $n = 2$ obtiene

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - 2x_2 - 5}{3x_2^2 - 2}$$

$$= 2.1 - \frac{(2.1)^3 - 2(2.1) - 5}{3(2.1)^2 - 2} \approx 2.0946$$

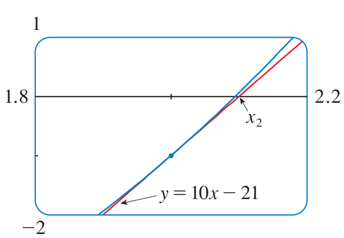


FIGURA 5

Resulta que esta tercera aproximación $x_3 \approx 2.0946$ es exacta hasta cuatro posiciones decimales. □

Suponga que quiere lograr una exactitud dada, hasta ocho cifras decimales, aplicando el método de Newton. ¿Cómo sabrá cuándo detenerse? La regla empírica que se usa en general es parar cuando las aproximaciones sucesivas x_n y x_{n+1} concuerdan hasta los ocho dígitos decimales (posiciones decimales). (En el ejercicio 37 de la sección 11-11 se dará un enunciado más preciso referente a la exactitud del método de Newton.)

Advierta que el procedimiento al ir de n hacia $n + 1$ es el mismo para todos los valores de n (se llama proceso *iterativo*). Esto significa que el método de Newton es en particular conveniente para una calculadora programable o una computadora.

V EJEMPLO 2 Aplique el método de Newton para hallar $\sqrt[6]{2}$ con una aproximación de ocho posiciones decimales.

SOLUCIÓN En primer lugar, observe que encontrar $\sqrt[6]{2}$ equivale a hallar la raíz positiva de la ecuación

$$x^6 - 2 = 0$$

Por consiguiente, tome $f(x) = x^6 - 2$. Después $f'(x) = 6x^5$ y la fórmula 2 (método de Newton) se convierte en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^6 - 2}{6x_n^5}$$

Si elige $x_1 = 1$ como la aproximación inicial, obtiene

$$x_2 \approx 1.16666667$$

$$x_3 \approx 1.12644368$$

$$x_4 \approx 1.12249707$$

$$x_5 \approx 1.12246205$$

$$x_6 \approx 1.12246205$$

Dado que x_5 y x_6 concuerdan hasta las ocho posiciones decimales, concluye que

$$\sqrt[6]{2} \approx 1.12246205$$

hasta ocho posiciones decimales. □

V EJEMPLO 3 Encuentre, una aproximación hasta seis posiciones decimales, de la raíz de la ecuación $\cos x = x$.

SOLUCIÓN Primero escriba de nuevo la ecuación en la forma estándar:

$$\cos x - x = 0$$

Por lo tanto, $f(x) = \cos x - x$. Entonces $f'(x) = -\operatorname{sen} x - 1$, de modo que la fórmula 2 se convierte en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{-\operatorname{sen} x_n - 1} = x_n + \frac{\cos x_n - x_n}{\operatorname{sen} x_n + 1}$$

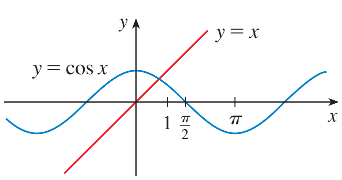


FIGURA 6

Con el fin de estimar un valor apropiado para x_1, en la figura 6 trace las gráficas de $y = \cos x$ y $y = x$. Parece que se cruzan en un punto cuya coordenada x es algo menor que 1, de modo que tome $x_1 = 1$ como una aproximación inicial conveniente. Luego, al poner su calculadora en modo de radianes, obtiene

$$x_2 \approx 0.75036387$$

$$x_3 \approx 0.73911289$$

$$x_4 \approx 0.73908513$$

$$x_5 \approx 0.73908513$$

Dado que x_4 y x_5 concuerdan hasta seis posiciones decimales (ocho, de hecho), se concluye que la raíz de la ecuación es correcta hasta seis posiciones decimales es 0.739085. □

En vez de usar el esquema aproximado de la figura 6 para obtener una aproximación de partida para el método de Newton del ejemplo 3, puede usar la gráfica más exacta que

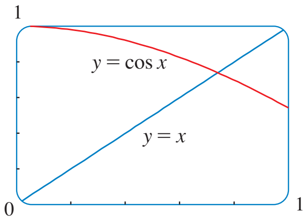


FIGURA 7

proporciona una calculadora o una computadora. La figura 7 sugiere que utilice $x_1 = 0.75$ como la aproximación inicial. Entonces el método de Newton da

$$x_2 \approx 0.73911114 \qquad x_3 \approx 0.73908513 \qquad x_4 \approx 0.73908513$$

y así obtiene la misma respuesta de antes, pero con unos cuantos pasos menos.

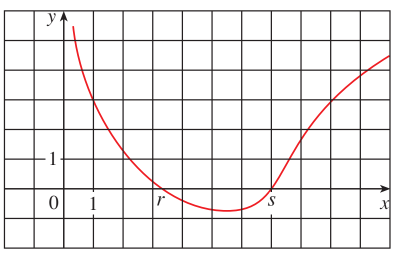
Tal vez se pregunte por qué molestarse con el método de Newton si se tiene disponible un dispositivo graficador. ¿Verdad que es más fácil hacer acercamientos repetidamente y encontrar las raíces como en la sección 1.4? Si sólo se requieren una o dos cifras decimales de exactitud, después el método de Newton es inapropiado y basta con cualquier graficador. Pero si es necesario llegar a las seis u ocho cifras decimales, los acercamientos continuos se vuelven molestos. En general, a menudo conviene usar una computadora y el método de Newton uno tras otro: el aparato graficador para arrancar y el método de Newton para terminar.

4.8 EJERCICIOS

1. En la figura se muestra la gráfica de una función f. Suponga que se usa el método de Newton para obtener una aproximación de la raíz r de la ecuación $f(x) = 0$, con aproximación lineal $x_1 = 1$.

(a) Dibuje las rectas tangentes que se usan para hallar x_2 y x_3, y estime los valores numéricos de estas dos.

(b) ¿Sería $x_1 = 5$ una mejor aproximación inicial? Explique.



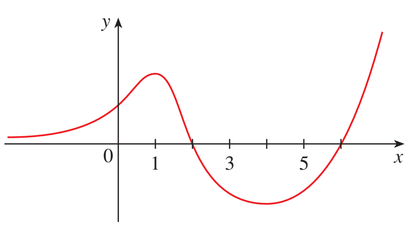
2. Siga las instrucciones que se dieron para el inciso (a) del ejercicio 1, pero use $x_1 = 9$ como la aproximación de arranque para hallar la raíz s.

3. Suponga que la recta $y = 5x - 4$ es tangente a la curva $y = f(x)$ cuando $x = 3$. Con el método de Newton para localizar una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ y una aproximación inicial de $x_1 = 3$, encuentre la segunda aproximación x_2.

4. Para cada aproximación inicial, determine gráficamente qué sucede si se aplica el método de Newton para la función cuya gráfica se muestra.

(a) $x_1 = 0$ (b) $x_1 = 1$ (c) $x_1 = 3$

(d) $x_1 = 4$ (e) $x_1 = 5$



5–8 Use el método de Newton con la aproximación inicial dada x_1 para hallar x_3, la tercera aproximación para la raíz de la ecuación dada. (Dé sus respuestas hasta cuatro cifras decimales.)

5. $x^3 + 2x - 4 = 0, \quad x_1 = 1$

6. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3 = 0, \quad x_1 = -3$

7. $x^5 - x - 1 = 0, \quad x_1 = 1$

8. $x^5 + 2 = 0, \quad x_1 = -1$

9. Use el método de Newton con la aproximación inicial $x_1 = -1$ para hallar x_2, la segunda aproximación a la raíz de la ecuación $x^3 + x + 3 = 0$. Explique cómo funciona el método dibujando en primer lugar la función y su recta tangente en $(-1, 1)$.

10. Use el método de Newton con la aproximación inicial $x_1 = 1$ para encontrar x_2, la segunda aproximación a la raíz de la ecuación $x^4 - x - 1 = 0$. Explique cómo funciona el método dibujando en primer lugar la función y su recta tangente en $(1, -1)$.

11–12 Aplique el método de Newton para aproximar el número dado correcto hasta ocho cifras decimales.

11. $\sqrt[5]{30}$ **12.** $\sqrt[100]{1000}$

13–16 Aplique el método de Newton para aproximar la raíz indicada de la ecuación correcta hasta seis cifras decimales.

13. La raíz de $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 6 = 0$ en el intervalo $[1, 2]$

14. La raíz de $2.2x^5 - 4.4x^3 + 1.3x^2 - 0.9x - 4.0 = 0$ en el intervalo $[-2, -1]$

15. La raíz positiva de $\operatorname{sen} x = x^2$

16. La raíz positiva de $2 \cos x = x^4$

17–22 Mediante el método de Newton determine todas las raíces de la ecuación con seis posiciones decimales.

17. $x^4 = 1 + x$ **18.** $e^x = 3 - 2x$

19. $(x - 2)^2 = \ln x$

20. $\dfrac{1}{x} = 1 + x^3$

21. $\cos x = \sqrt{x}$

22. $\tan x = \sqrt{1 - x^2}$

23–28 Use el método de Newton para hallar todas las raíces de las ecuaciones correctas hasta ocho posiciones decimales. Empiece por dibujar una gráfica para hallar aproximaciones iniciales.

23. $x^6 - x^5 - 6x^4 - x^3 + x + 10 = 0$

24. $x^2(4 - x^2) = \dfrac{4}{x^2 + 1}$

25. $x^2\sqrt{2 - x - x^2} = 1$

26. $3\,\mathrm{sen}(x^2) = 2x$

27. $4e^{-x^2}\,\mathrm{sen}\,x = x^2 - x + 1$

28. $e^{\arctan x} = \sqrt{x^3 + 1}$

29. (a) Aplique el método de Newton a la ecuación $x^2 - a = 0$ para deducir el siguiente algoritmo de raíz cuadrada (que usaron los antiguos babilonios para calcular $\sqrt{a}$):

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

(b) Utilice el inciso (a) para calcular $\sqrt{1\,000}$ correcta hasta seis posiciones decimales.

30. (a) Aplique el método de Newton a la ecuación $1/x - a = 0$ para deducir el algoritmo siguiente del recíproco:

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$$

(Este algoritmo permite que una computadora encuentre recíprocos sin dividir en realidad.)

(b) Use el resultado del inciso (a) para calcular $1/1.6984$ correcta hasta seis posiciones decimales.

31. Explique por qué el método de Newton no funciona para hallar la raíz de la ecuación $x^3 - 3x + 6 = 0$ si se elige que la aproximación inicial sea $x_1 = 1$.

32. (a) Use el método de Newton con $x_1 = 1$ para hallar la raíz de la ecuación $x^3 - x = 1$ correcta hasta seis posiciones decimales.

(b) Resuelva la ecuación del inciso (a) con $x_1 = 0.57$ como la aproximación inicial.

(c) Resuelva la ecuación del inciso (a) con $x_1 = 0.57$. (Necesita una calculadora programable para esta parte.)

(d) Trace la gráfica de $f(x) = x^3 - x - 1$ y de sus rectas tangentes en $x_1 = 1$, 0.6 y 0.57 para explicar por qué el método de Newton es muy sensible al valor de la aproximación inicial.

33. Explique por qué falla el método de Newton cuando se aplica a la ecuación $\sqrt[3]{x} = 0$ con cualquier aproximación inicial $x_1 \neq 0$. Ilustre su explicación con un esquema.

34. Si

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

por lo tanto la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ es $x = 0$. Explique por qué el método de Newton falla para determina la raíz sin importar cuál aproximación inicial $x_1 \neq 0$ se use. Ilustre la explicación con un diagrama.

35. (a) Aplique el método de Newton para calcular los números críticos de la función $f(x) = x^6 - x^4 + 3x^3 - 2x$ correcta hasta tres posiciones decimales.

(b) Calcule el valor mínimo absoluto de f correcta hasta cuatro posiciones decimales.

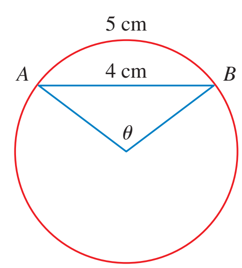
36. Utilice el método de Newton para encontrar el valor mínimo absoluto de la función $f(x) = x\cos x$, $0 \leq x \leq \pi$ sen x correcto hasta seis posiciones decimales.

37. Con el método de Newton halle las coordenadas del punto de inflexión de la curva $y = e^{\cos x}$, $0 \leq x \leq \pi$, correctas hasta seis posiciones decimales.

38. De la infinidad de rectas que son tangentes a la curva $y = -\mathrm{sen}\,x$ y pasan por el origen, una tiene la pendiente más grande. Use el método de Newton para hallar la pendiente de esa recta correcta hasta seis posiciones decimales.

39. Aplique el método de Newton para hallar las coordenadas, correctas hasta seis posiciones decimales, del punto en la parábola $y = (x - 1)^2$ que esté lo más cercano al origen.

40. En la figura, la longitud de la cuerda AB es 4 cm y la del arco AB es 5 cm. Encuentre el ángulo central θ, en radianes, correcto hasta cuatro posiciones decimales. A continuación dé la respuesta hasta el grado más cercano.



41. Un distribuidor de automóviles vende uno nuevo en \$18 000. También ofrece venderlo en pagos de \$375 al mes durante cinco años. ¿Qué tasa de interés mensual está cargando este distribuidor?

Para resolver este problema necesitará usar la fórmula para el valor actual A de un anualidad que consta de n pagos iguales de tamaño R con la tasa de interés i durante el periodo

$$A = \frac{R}{i}[1 - (1 + i)^{-n}]$$

Demuestre, sustituyendo i por x, que

$$48x(1 + x)^{60} - (1 + x)^{60} + 1 = 0$$

Utilice el método de Newton para resolver esta ecuación.

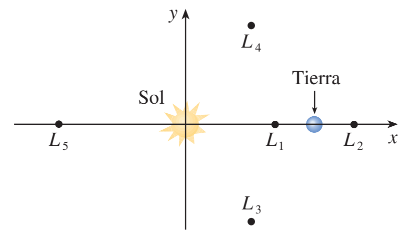
42. En la figura se muestra el Sol ubicado en el origen y la Tierra en el punto (1, 0). (La unidad, en este caso, es la distancia entre los centros de la Tierra y el Sol, llamada *unidad astronómica*: 1 AU $\approx 1.496 \times 10^8$ km.) Existen cinco lugares L_1, L_2, L_3, L_4 y L_5 en este plano de rotación de la Tierra alrededor del Sol donde un satélite permanece estático con aquélla, debido a que las fuerzas que actúan sobre el satélite (incluyendo las atracciones gravitacionales de la Tierra y el Sol) se equilibran entre sí. Estos lugares se conocen como *puntos de libración*. (En uno de estos puntos de libramiento se ha colocado un satélite de investigación solar.) Si m_1 es la masa del Sol, m_2 es la masa de la Tierra, y $r = m_2/(m_1 + m_2)$, resulta que la coordenada x de L_1 es la raíz única de la ecuación de quinto grado

$$p(x) = x^5 - (2 + r)x^4 + (1 + 2r)x^3 - (1 - r)x^2 + 2(1 - r)x + r - 1 = 0$$

y la coordenada x de L_2 es la raíz de la ecuación

$$p(x) - 2rx^2 = 0$$

Utilizando el valor $r \approx 3.04042 \times 10^{-6}$, encuentre las ubicaciones de los puntos de libramiento (a) L_1 y (b) L_2.



4.9 ANTIDERIVADAS

Un físico que conoce la velocidad de una partícula podría desear conocer su posición en un instante dado. Un ingeniero que puede medir la cantidad variable a la cual se fuga el agua de un tanque quiere conocer la cantidad que se ha fugado durante cierto periodo. Un biólogo que conoce la rapidez a la que crece una población de bacterias puede interesarse en deducir el tamaño de la población en algún momento futuro. En cada caso, el problema es hallar una función F cuya derivada es en la función conocida f. Si tal función F existe, se llama antiderivada de f.

DEFINICIÓN Una función F recibe el nombre de **antiderivada** de f sobre un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo x en I.

Por ejemplo, sea $f(x) = x^2$. No es difícil descubrir una antiderivada de f si utiliza la regla de la potencia. En efecto, si $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, entonces $F'(x) = x^2 = f(x)$. Pero la función $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100$ también satisface $G'(x) = x^2$. Por lo tanto, F y G son antiderivadas de f. De hecho, cualquier función de la forma $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, donde C es una constante, es una antiderivada de f. Surge la pregunta: ¿hay otras?

Para contestar la pregunta, refiérase a la sección 4.2 donde se aplicó el teorema del valor medio para demostrar que si dos funciones tienen derivadas idénticas en un intervalo, en tal caso deben diferir por una constante (corolario 4.2.7). Por esto, si F y G son dos antiderivadas cualquiera de f, entonces

$$F'(x) = f(x) = G'(x)$$

así $G(x) - F(x) = C$, donde C es una constante. Puede escribir esto como $G(x) = F(x) + C$, de modo que tiene el resultado siguiente.

1 TEOREMA Si F es una antiderivada de f sobre un intervalo I, entonces la antiderivada más general de f sobre I es

$$F(x) + C$$

donde C es una constante arbitraria.

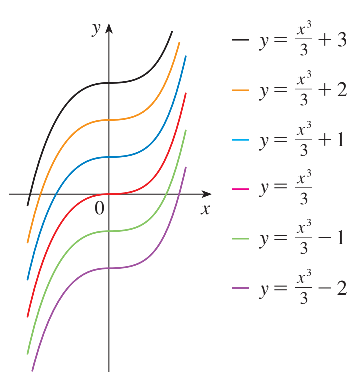


FIGURA 1
Miembros de la familia de antiderivadas de $f(x) = x^2$

De nuevo con la función $f(x) = x^2$, se ve que la antiderivada general de f es $\frac{1}{3}x^3 + C$ Al asignar valores específicos a la constante C, obtiene una familia de funciones cuyas gráficas son traslaciones verticales de una a otra (véase la figura 1). Esto tiene sentido porque cada curva debe tener la misma pendiente en cualquier valor conocido de x.

EJEMPLO 1 Encuentre la antiderivada más general de cada una de las funciones siguientes.
(a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ (b) $f(x) = 1/x$ (c) $f(x) = x^n, \quad n \neq -1$

SOLUCIÓN

(a) Si $F(x) = -\cos x$, entonces $F'(x) = \operatorname{sen} x$, de manera que una antiderivada de sen x es $-\cos x$. Por el teorema 1, la antiderivada más general es $G(x) = -\cos x + C$.

(b) Con base en lo que se vio en la sección 3.6, recuerde que

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Por consiguiente, en el intervalo $(0, \infty)$ la antiderivada general de $1/x$ es $\ln x + C$. Asimismo,

$$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}$$

para todo $x \neq 0$. El teorema 1 entonces afirma que la antiderivada general de $f(x) = 1/x$ es $\ln |x| + C$ sobre cualquier intervalo que no contenga 0. En particular, esto es verdadero sobre cada uno de los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. Por consiguiente, la antiderivada general de f es

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + C_1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(c) Use la regla de la potencia para descubrir una antiderivada de x^n. De hecho, si $n \neq -1$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$$

Así, la antiderivada general de $f(x) = x^n$ es

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Esto es válido para $n \geqslant 0$ ya que después $f(x) = x^n$ está definida sobre el intervalo. Si n es negativo (pero $n \neq -1$), sólo es válida sobre cualquier intervalo que no contenga a 0. □

Como en el ejemplo 1, toda fórmula de derivación leída de derecha a izquierda da lugar a una fórmula de antiderivación. En la tabla 2 se enumeran algunas antiderivadas. Cada fórmula de la tabla es verdadera, puesto que la derivada de la función de la columna de la derecha aparece en la columna izquierda. En particular, en la primera fórmula se afirma que la antiderivada de una constante multiplicada por una función es una constante multiplicada por la antiderivada de la función. En la segunda se expresa que la antiderivada de una suma es la suma de las antiderivadas. (Se usa la notación $F' = f$, $G' = g$.)

2 TABLA DE FÓRMULAS DE ANTIDERIVACIÓN

■ Para obtener la antiderivada más general, sobre un intervalo, a partir de las particulares de la tabla 2, sume una constante, como en el ejemplo 1.

Función	Antiderivada particular	Función	Antiderivada particular
$cf(x)$	$cF(x)$	$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$
$f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x)$	$\sec^2 x$	$\tan x$
$x^n \quad (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\sec x \tan x$	$\sec x$
$1/x$	$\ln \|x\|$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{sen}^{-1} x$
e^x	e^x	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$		

EJEMPLO 2 Encuentre todas las funciones g tales que

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$$

SOLUCIÓN Primero, escriba de nuevo la función dada en la forma siguiente:

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + \frac{2x^5}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = 4 \operatorname{sen} x + 2x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

De esta manera, desea hallar una antiderivada de

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + 2x^4 - x^{-1/2}$$

Al usar las fórmulas de la tabla 2 con el teorema 1, obtiene

$$g(x) = 4(-\cos x) + 2\frac{x^5}{5} - \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C$$
$$= -4\cos x + \tfrac{2}{5}x^5 - 2\sqrt{x} + C \qquad \square$$

En las aplicaciones del cálculo es muy común tener una situación como la del ejemplo 2, donde se requiere hallar una función, dado el conocimiento acerca de sus derivadas. Una ecuación que comprende las derivadas de una función se llama **ecuación diferencial**. Éstas se estudian con cierto detalle en el capítulo 9 pero, por el momento, es posible resolver algunas ecuaciones diferenciales elementales. La solución general de una ecuación diferencial contiene una constante arbitraria (o varias constantes arbitrarias), como en el ejemplo 2. Sin embargo, pueden haber algunas condiciones adicionales que determinan las constantes y, por lo tanto, especifican de manera única la solución.

■ En la figura 2 se muestran las gráficas de la función f' del ejemplo 3 y de su antiderivada f. Advierta que $f'(x) > 0$, de manera que f siempre es creciente. Observe asimismo que, cuando f' tiene un máximo o un mínimo, f parece que tiene un punto de inflexión. De modo que la gráfica sirve como una comprobación de dicho cálculo.

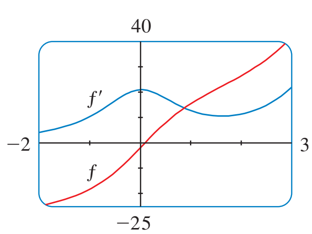


FIGURA 2

EJEMPLO 3 Encuentre f si $f'(x) = e^x + 20(1 + x^2)^{-1}$ y $f(0) = -2$.

SOLUCIÓN La antiderivada general de

$$f'(x) = e^x + \frac{20}{1 + x^2}$$

es

$$f(x) = e^x + 20 \tan^{-1}x + C$$

Para determinar C, use el hecho de que $f(0) = -2$:

$$f(0) = e^0 + 20 \tan^{-1} 0 + C = -2$$

En estos términos, tiene $C = -2 - 1 = -3$, de modo que la solución particular es

$$f(x) = e^x + 20 \tan^{-1}x - 3 \qquad \square$$

V EJEMPLO 4 Encuentre f si $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$, $f(0) = 4$ y $f(1) = 1$.

SOLUCIÓN La antiderivada general de $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$ es

$$f'(x) = 12\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 4x + C = 4x^3 + 3x^2 - 4x + C$$

Si usa una vez más las reglas de antiderivación encuentra que

$$f(x) = 4\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + Cx + D = x^4 + x^3 - 2x^2 + Cx + D$$

Para determinar C y D, utilice las condiciones dadas de que $f(0) = 4$ y $f(1) = 1$. Como $f(0) = 0 + D = 4$, tiene $D = 4$. Puesto que

$$f(1) = 1 + 1 - 2 + C + 4 = 1$$

tiene $C = -3$. Debido a eso, la función requerida es

$$f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 4$$ □

Si conoce la gráfica de una función f, sería razonable que fuera capaz de dibujar la gráfica de una antiderivada F. Por ejemplo, suponga que sabe que $F(0) = 1$. Entonces, hay un punto de donde partir, el punto $(0, 1)$, y la dirección en la cual tiene que desplazar su lápiz la proporciona, en cada etapa, la derivada $F'(x) = f(x)$. En el ejemplo siguiente aplique los principios de este capítulo para mostrar cómo graficar F aun cuando no tiene una fórmula para f. Éste sería el caso cuando datos experimentales determinan $f(x)$.

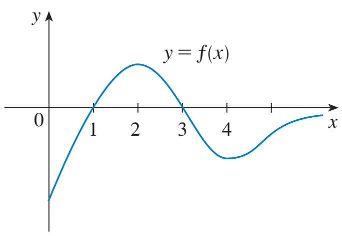


FIGURA 3

EJEMPLO 5 La gráfica de una función f se ilustra en la figura 3. Trace un croquis de una antiderivada F, dado que $F(0) = 2$.

SOLUCIÓN Le guía el hecho de que la pendiente de $y = F(x)$ es $f(x)$. Parta del punto $(0, 2)$ y dibuje F como una función inicialmente decreciente ya que $f(x)$ es negativa cuando $0 < x < 1$. Observe que $f(1) = f(3) = 0$, de modo que F tiene tangentes horizontales cuando $x = 1$ y $x = 3$. En el caso de $1 < x < 3$, $f(x)$ es positiva y de este modo F es creciente. Observe que F tiene un mínimo local cuando $x = 1$ y un máximo local cuando $x = 3$. Para $x > 3$, $f(x)$ es negativa y F es decreciente en $(3, \infty)$. Como $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, la gráfica de F se vuelve más plana cuando $x \to \infty$. También note que $F''(x) = f'(x)$ cambia de positiva a negativa en $x = 2$, y de negativa a positiva en $x = 4$; así F tiene puntos de inflexión cuando $x = 2$ y $x = 4$. Se aprovecha esta información para trazar la gráfica de la antiderivada en la figura 4. □

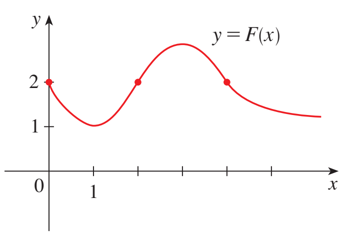


FIGURA 4

MOVIMIENTO RECTILÍNEO

La antiderivación es en particular útil al analizar el movimiento de un objeto que se mueve en línea recta. Recuerde que si el objeto tiene la función de posición $s = f(t)$, en tal caso la función de velocidad es $v(t) = s'(t)$. Esto significa que la función de posición es una antiderivada de la función de velocidad. Del mismo modo, la función de aceleración es $a(t) = v'(t)$, de suerte que la función de velocidad es una antiderivada de la aceleración. Si se conocen la aceleración y los valores iniciales $s(0)$ y $v(0)$, entonces se puede hallar la función de posición al antiderivar dos veces.

EJEMPLO 6 Una partícula se mueve en línea recta y tiene la aceleración dada por $a(t) = 6t + 4$. Su velocidad inicial es $v(0) = -6$ cm/s y su desplazamiento inicial es $s(0) = 9$ cm. Encuentre su función de posición $s(t)$.

SOLUCIÓN Dado que $v'(t) = a(t) = 6t + 4$, la antiderivada da

$$v(t) = 6\frac{t^2}{2} + 4t + C = 3t^2 + 4t + C$$

Observe que $v(0) = C$, pero $v(0) = -6$, de tal suerte que $C = -6$ y

$$v(t) = 3t^2 + 4t - 6$$

Como $v(t) = s'(t)$, s es la antiderivada de v:

$$s(t) = 3\frac{t^3}{3} + 4\frac{t^2}{2} - 6t + D = t^3 + 2t^2 - 6t + D$$

Esto da $s(0) = D$. Si $s(0) = 9$, de modo que $D = 9$ y la función de posición requerida es

$$s(t) = t^3 + 2t^2 - 6t + 9$$ □

Un objeto cerca de la superficie de la tierra está sujeto a una fuerza gravitacional que produce una aceleración hacia abajo denotada con g. Para el movimiento cercano a la tierra supone que g es constante y su valor es de unos 9.8 m/s^2 (o 32 pies/s^2).

V EJEMPLO 7 Se lanza una pelota hacia arriba a una rapidez de 48 pies/s desde el borde de un acantilado a 432 pies por arriba del nivel de la tierra. Encuentre su altura sobre el nivel de la tierra t segundos más tarde. ¿Cuándo alcanza su altura máxima? ¿Cuándo choca contra el nivel de la tierra?

SOLUCIÓN El movimiento es vertical y se elige la dirección positiva como la correspondiente hacia arriba. En un instante t, la distancia arriba del nivel de la tierra $s(t)$ y la velocidad $v(t)$ es decreciente. Por consiguiente, la aceleración debe ser negativa y

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -32$$

Con antiderivadas

$$v(t) = -32t + C$$

Para determinar C, use la información dada de que $v(0) = 48$. Esto da $48 = 0 + C$, de manera que

$$v(t) = -32t + 48$$

La altura máxima se alcanza cuando $v(t) = 0$; es decir, después de 1.5 s. Como $s'(t) = v(t)$, antiderive una vez más y obtiene

$$s(t) = -16t^2 + 48t + D$$

Aplique $s(0) = 432$ y tiene $432 = 0 + D$; por consiguiente

$$s(t) = -16t^2 + 48t + 432$$

■ En la figura 5, se muestra la función de posición de la pelota del ejemplo 7. La gráfica corrobora la conclusión obtenida: la pelota alcanza su altura máxima después de 1.5 s y choca contra el suelo luego de 6.9 s.

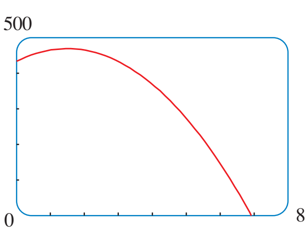


FIGURA 5

La expresión para $s(t)$ es válida hasta que la pelota choca contra el nivel de la tierra. Esto sucede cuando $s(t) = 0$; o sea cuando

$$-16t^2 + 48t + 432 = 0$$

o, equivalentemente, $$t^2 - 3t - 27 = 0$$

Con la fórmula cuadrática para resolver esta ecuación obtiene

$$t = \frac{3 \pm 3\sqrt{13}}{2}$$

Rechace la solución con signo menos, ya que da un valor negativo para t. En consecuencia, la pelota choca contra el nivel de la tierra después de $3(1 + \sqrt{13})/2 \approx 6.9$ s. □

4.9 EJERCICIOS

1–20 Encuentre la antiderivada más general de la función. (Compruebe su respuesta mediante la derivación.)

1. $f(x) = x - 3$

2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

3. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{5}x^3$

4. $f(x) = 8x^9 - 3x^6 + 12x^3$

5. $f(x) = (x + 1)(2x - 1)$

6. $f(x) = x(2 - x)^2$

7. $f(x) = 5x^{1/4} - 7x^{3/4}$

8. $f(x) = 2x + 3x^{1.7}$

9. $f(x) = 6\sqrt{x} - \sqrt[6]{x}$

10. $f(x) = \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[3]{x^4}$

11. $f(x) = \dfrac{10}{x^9}$

12. $g(x) = \dfrac{5 - 4x^3 + 2x^6}{x^6}$

13. $f(u) = \dfrac{u^4 + 3\sqrt{u}}{u^2}$

14. $f(x) = 3e^x + 7\sec^2 x$

15. $g(\theta) = \cos\theta - 5\,\mathrm{sen}\,\theta$

16. $f(x) = \mathrm{sen}\,t + 2\,\mathrm{senh}\,t$

17. $f(x) = 5e^x - 3\cosh x$

18. $f(x) = 2\sqrt{x} + 6\cos x$

19. $f(x) = \dfrac{x^5 - x^3 + 2x}{x^4}$

20. $f(x) = \dfrac{2 + x^2}{1 + x^2}$

21–22 Encuentre la antiderivada F de f que satisfaga la condición dada. Compruebe su respuesta comparando las gráficas de F y f.

21. $f(x) = 5x^4 - 2x^5, \quad F(0) = 4$

22. $f(x) = 4 - 3(1 + x^2)^{-1}, \quad F(1) = 0$

23–46 Halle f.

23. $f''(x) = 6x + 12x^2$

24. $f''(x) = 2 + x^3 + x^6$

25. $f''(x) = \frac{2}{3}x^{2/3}$

26. $f''(x) = 6x + \mathrm{sen}\,x$

27. $f'''(t) = e^t$

28. $f'''(t) = t - \sqrt{t}$

29. $f'(x) = 1 - 6x, \quad f(0) = 8$

30. $f'(x) = 8x^3 + 12x + 3, \quad f(1) = 6$

31. $f'(x) = \sqrt{x}(6 + 5x), \quad f(1) = 10$

32. $f'(x) = 2x - 3/x^4, \quad x > 0, \quad f(1) = 3$

33. $f'(t) = 2\cos t + \sec^2 t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2, \quad f(\pi/3) = 4$

34. $f'(x) = (x^2 - 1)/x, \quad f(1) = \frac{1}{2}, \quad f(-1) = 0$

35. $f'(x) = x^{-1/3}, \quad f(1) = 1, \quad f(-1) = -1$

36. $f'(x) = 4/\sqrt{1 - x^2}, \quad f(\frac{1}{2}) = 1$

37. $f''(x) = 24x^2 + 2x + 10, \quad f(1) = 5, \quad f'(1) = -3$

38. $f''(x) = 4 - 6x - 40x^3, \quad f(0) = 2, \quad f'(0) = 1$

39. $f''(\theta) = \mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta, \quad f(0) = 3, \quad f'(0) = 4$

40. $f''(t) = 3/\sqrt{t}, \quad f(4) = 20, \quad f'(4) = 7$

41. $f''(x) = 2 - 12x, \quad f(0) = 9, \quad f(2) = 15$

42. $f''(x) = 20x^3 + 12x^2 + 4, \quad f(0) = 8, \quad f(1) = 5$

43. $f''(x) = 2 + \cos x, \quad f(0) = -1, \quad f(\pi/2) = 0$

44. $f''(t) = 2e^t + 3\,\mathrm{sen}\,t, \quad f(0) = 0, \quad f(\pi) = 0$

45. $f''(x) = x^{-2}, \quad x > 0, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 0$

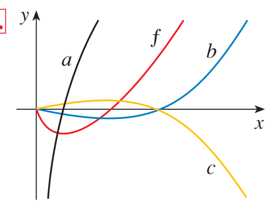
46. $f'''(x) = \cos x, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 2, \quad f''(0) = 3$

47. Dado que la gráfica de f pasa por el punto $(1, 6)$ y que la pendiente de su recta tangente en $(x, f(x))$ es $2x + 1$, encuentre $f(2)$.

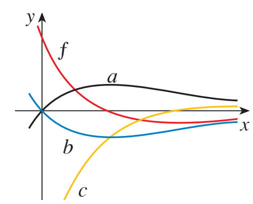
48. Encuentre una función f tal que $f'(x) = x^3$ y la recta $x + y = 0$ sea tangente a la gráfica de f.

49–50 Se proporciona la gráfica de una función f. ¿Qué gráfica es una antiderivada de f y por qué?

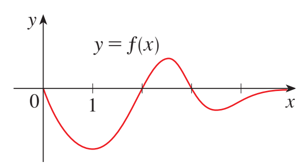
49.



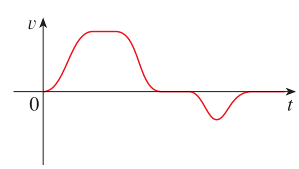
50.



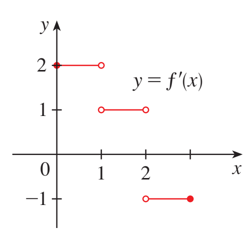
51. Se presenta la gráfica de una función en la figura. Trace un croquis de una antiderivada F, dado que $F(0) = 1$.



52. La gráfica de la función velocidad de un automóvil se ilustra en la figura. Elabore la gráfica de la función posición.



53. Se muestra la gráfica de f'. Dibuje la gráfica de f si ésta es continua y $f(0) = -1$.



54. (a) Use un aparato graficador para dibujar $f(x) = 2x - 3\sqrt{x}$.
(b) A partir de la gráfica del inciso (a), dibuje una gráfica aproximada de la antiderivada F que satisfaga $F(0) = 1$.
(c) Aplique las reglas de esta sección a fin de hallar una expresión para $F(x)$.
(d) Dibuje F usando la expresión del inciso (c). Compare con su esquema del inciso (b).

55–56 Dibuje una gráfica de f y mediante ella elabore un croquis de la antiderivada que pasa por el origen.

55. $f(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{1 + x^2}, \quad -2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$

56. $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 2} - 1, \quad -1.5 \leqslant x \leqslant 1.5$

57–62 Una partícula se desplaza de acuerdo con la información dada. Determine la posición de la partícula.

57. $v(t) = \text{sen}\, t - \cos t, \quad s(0) = 0$

58. $v(t) = 1.5\sqrt{t}, \quad s(4) = 10$

59. $a(t) = t - 2, \quad s(0) = 1, \quad v(0) = 3$

60. $a(t) = \cos t + \text{sen}\, t, \quad s(0) = 0, \quad v(0) = 5$

61. $a(t) = 10\, \text{sen}\, t + 3 \cos t, \quad s(0) = 0, \quad s(2\pi) = 12$

62. $a(t) = t^2 - 4t + 6,, \quad s(0) = 0, \quad s(1) = 20$

63. Se deja caer una piedra desde la plataforma superior de observación (la plataforma espacial) de la Torre CN, 450 m arriba del nivel de la tierra.
(a) Encuentre la distancia de la piedra arriba del nivel de la tierra en el instante t.
(b) ¿Cuánto tarda la piedra en llegar al nivel de la tierra?
(c) ¿Con qué velocidad choca contra el nivel de la tierra?
(d) Si la piedra se lanza hacia arriba a una rapidez de 5 m/s, ¿cuánto tarda en llegar el nivel de la tierra?

64. Demuestre que para el movimiento en línea recta con aceleración constante a, velocidad inicial v_0 y desplazamiento inicial s_0, el desplazamiento después del tiempo t es.

$$s = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$$

65. Se proyecta un objeto hacia arriba con velocidad inicial v_0 metros por segundo, desde un punto a s_0 metros arriba del nivel de la tierra. Demuestre que

$$[v(t)]^2 = v_0^2 - 19.6[s(t) - s_0]$$

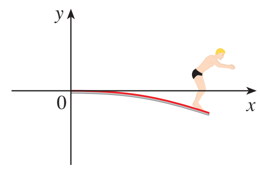
66. Se lanzan dos pelotas hacia arriba desde el borde del acantilado del ejemplo 7. La primera con una rapidez de 48 pies/s y la segunda se arroja 1 s más tarde con una rapidez de 24 pies/s. ¿En algún momento rebasa una a la otra?

67. Se dejó caer una piedra de un desfiladero y chocó contra el nivel de la tierra con una rapidez de 120 pies/s. ¿Cuál es la altura del desfiladero?

68. Si un clavadista con masa m está en el borde de una plataforma de clavados con longitud L y densidad lineal ρ, después la plataforma adopta la forma de una curva $y = f(x)$, donde

$$EIy'' = mg(L - x) + \tfrac{1}{2}\rho g(L - x)^2$$

E e I son constantes positivas que dependen del material con que está hecha la plataforma y g (< 0) es la aceleración debido a la gravedad.
(a) Halle una expresión para la forma de la curva.
(b) Use $f(L)$ para estimar la distancia debajo de la horizontal al borde de la plataforma.



69. Una compañía estima que el costo marginal (en dólares por artículo) de producir x artículos es de $1.92 - 0.002x$. Si el costo de producción de un artículo es de \$562, encuentre el costo de producir 100 artículos.

70. La densidad lineal de una varilla con una longitud de 1 m se expresa por medio de $\rho(x) = 1/\sqrt{x}$ en gramos por centímetro, donde x se mide en centímetros desde uno de los extremos de la varilla. Encuentre la masa de esta última.

71. Dado que las gotas de lluvia crecen a medida que caen, su área superficial aumenta y, por lo tanto, se incrementa la resistencia a su caída. Una gota de lluvia tiene una velocidad inicial hacia abajo de 10 m/s y su aceleración hacia abajo es

$$a = \begin{cases} 9 - 0.9t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 10 \\ 0 & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

Si al inicio la gota de lluvia está a 500 m arriba de la superficie de la tierra, ¿cuánto tarda en caer?

72. Un vehículo se desplaza a 50 millas/h cuando aplica los frenos, lo que produce una desaceleración constante de 22 pies/s^2. ¿Cuál es la distancia que recorre el automóvil antes de detenerse?

73. ¿Que aceleración constante se requiere para incrementar la rapidez de un vehículo desde 30 millas/h hasta 50 millas/h en 5 s?

74. Un automóvil frenó con una desaceleración constante de 16 pies/s^2, lo que genera antes de detenerse unas marcas de deslizamiento que miden 200 pies. ¿Qué tan rápido se desplazaba el vehículo cuando se aplicaron los frenos?

75. Un automóvil se desplaza a 100 km/h cuando el conductor ve un accidente 80 m más adelante y aplica los frenos apresuradamente. ¿Qué desaceleración constante se requiere para detener el vehículo a tiempo de evitar chocar con los vehículos accidentados?

76. Un modelo de cohete se dispara verticalmente hacia arriba desde el reposo. Su aceleración durante los primeros tres segundos es $a(t) = 60t$, momento en que se agota el combustible y se convierte en un cuerpo en “caída libre”. Después de 14 segundos, se abre el paracaídas del cohete y la velocidad (hacia abajo) disminuye linealmente hasta -18 pies/s en 5 s. Entonces el cohete “flota” hasta el piso a esa velocidad.
(a) Determine la función de posición s y la función de velocidad v (para todos los tiempos t). Dibuje s y v.

(b) ¿En qué momento el cohete alcanza su altura máxima y cuál es esa altura?
(c) ¿En qué momento aterriza?

77. Un tren "bala" de magnitud de velocidad alta acelera y desacelera a una proporción de 4 pies/s^2. Su rapidez de crucero máxima es de 90 mi/h.
(a) ¿Cuál es la distancia máxima que puede recorrer el tren si se acelera desde el reposo hasta que alcanza su rapidez de crucero y, a continuación, corre a esa rapidez durante 15 minutos?
(b) Suponga que el tren parte del reposo y debe detenerse por completo en 15 minutos. ¿Cuál es la distancia máxima que puede recorrer en estas condiciones?
(c) Encuentre el tiempo mínimo que tarda el tren en viajar entre dos estaciones consecutivas que se encuentran a 45 millas de distancia.
(d) El viaje de una estación a la siguiente dura 37.5 minutos. ¿Cuál es la distancia entre las estaciones?

4 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. Explique la diferencia entre máximo absoluto y máximo local. Ilustre por medio de un esquema.

2. (a) ¿Qué dice el teorema del valor extremo?
(b) Explique cómo funciona el método del intervalo cerrado.

3. (a) Enuncie el teorema de Fermat.
(b) Defina un número crítico de f.

4. (a) Enuncie el teorema de Rolle.
(b) Enuncie el teorema del valor medio y proporcione una interpretación geométrica.

5. (a) Enuncie la prueba de creciente/decreciente.
(b) ¿Que significa que f es cóncava hacia arriba en un intervalo I?
(c) Enuncie la prueba de la concavidad.
(d) ¿Qué son los puntos de inflexión? o Cómo puede hallar los?

6. (a) Enuncie la prueba de la primera derivada.
(b) Enuncie la prueba de la segunda derivada.
(c) ¿Cuáles son las ventajas y las desventajas relativas de estas pruebas?

7. (a) ¿Qué dice la regla de l'Hospital?
(b) ¿Cómo puede usar la regla de l'Hospital si tiene un producto $f(x)g(x)$ donde $f(x) \to 0$ y $g(x) \to \infty$ cuando $x \to a$?
(c) ¿Cómo puede usar la regla de l'Hospital si tiene una diferencia $f(x) - g(x)$ donde $f(x) \to \infty$ y $g(x) \to \infty$ cuando $x \to a$?
(d) ¿Cómo puede usar la regla de l'Hospital si tiene una potencia $[f(x)]^{g(x)}$ donde $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$ cuando $x \to a$?

8. Si tiene una calculadora graficadora o una computadora, ¿por qué necesita el cálculo para dibujar una función?

9. (a) Dada una aproximación inicial x_1 a una raíz de la ecuación $f(x) = 0$, explique geométricamente, mediante un diagrama, ¿cómo se obtiene la segunda aproximación x_2 en el método de Newton?
(b) Escriba una expresión para x_2 en términos de x_1, $f(x_1)$ y $f'(x_1)$.
(c) Escriba una expresión para x_{n+1} en términos de x_n, $f(x_n)$ y $f'(x_n)$.
(d) ¿Bajo qué circunstancias es probable que el método de Newton falle o funcione muy despacio?

10. (a) ¿Qué es una antiderivada de una función f?
(b) Suponga que F_1 y F_2 son antiderivadas de f sobre un intervalo I. ¿Cómo se relacionan F_1 y F_2?

PREGUNTAS DE VERDADERO O FALSO

Determine si la proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que refute la proposición.

1. Si $f'(c) = 0$ después f tiene un máximo o un mínimo locales en c.

2. Si f tiene un valor mínimo absoluto en c, en tal caso $f'(c) = 0$.

3. Si f es continua sobre (a, b) en seguida f alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y k en (a, b).

4. Si f es derivable y $f(-1) = f(1)$, entonces existe un número c tal que $|c| < 1$ y $f'(c) = 0$.

5. Si $f'(x) < 0$ para $1 < x < 6$, entonces f es decreciente sobre $(1, 6)$.

6. Si $f''(2) = 0$, entonces $(2, f(2))$ es un punto de inflexión de la curva $y = f(x)$.

7. Si $f'(x) = g'(x)$ para $0 < x < 1$, a continuación $f(x) = g(x)$ para $0 < x < 1$.

8. Existe una función f tal que $f(1) = -2$, $f(3) = 0$ y $f'(x) > 1$ para todo x.

9. Existe una función f tal que $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ para todo x.

10. Existe una función f tal que $f(x) < 0$, $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ para todo x.

11. Si f y g son crecientes en un intervalo I, entonces $f + g$ es creciente en I.

12. Si f y g son crecientes en un intervalo I, entonces $f - g$ es creciente en I.

13. Si f y g son crecientes en un intervalo I, entonces fg es creciente en I.

14. Si f y g son funciones crecientes positivas en un intervalo I, entonces fg es creciente en I.

15. Si f es creciente y $f(x) > 0$ en I, entonces $g(x) = 1/f(x)$ es decreciente en I.

16. Si f es par, entonces f' es par.

17. Si f es periódico, entonces f' es periódica.

18. La antiderivada más general de $f(x) = x^{-2}$ es

$$F(x) = -\frac{1}{x} + C$$

19. Si $f'(x)$ existe y es diferente de cero para todo x, entonces $f(1) \neq f(0)$.

20. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{e^x} = 1$

EJERCICIOS

1–6 Encuentre los valores extremos locales y absolutos de la función sobre el intervalo dado.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1, \quad [2, 4]$

2. $f(x) = x\sqrt{1 - x}, \quad [-1, 1]$

3. $f(x) = \dfrac{3x - 4}{x^2 + 1}, \quad [-2, 2]$

4. $f(x) = (x^2 + 2x)^3, \quad [-2, 1]$

5. $f(x) = x + \operatorname{sen} 2x, \quad [0, \pi]$

6. $f(x) = (\ln x)/x^2, \quad [1, 3]$

7–14 Obtenga el límite.

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan \pi x}{\ln(1 + x)}$

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2 + x}$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{4x} - 1 - 4x}{x^2}$

10. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{4x} - 1 - 4x}{x^2}$

11. $\lim\limits_{x \to \infty} x^3 e^{-x}$

12. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln x$

13. $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$

14. $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} (\tan x)^{\cos x}$

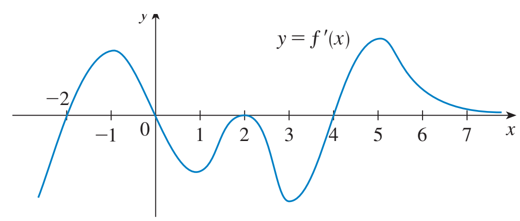
15–17 Trace la gráfica de una función que cumple con las condiciones dada.

15. $f(0) = 0, \quad f'(-2) = f'(1) = f'(9) = 0,$
$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 6} f(x) = -\infty,$
$f'(x) < 0$ en $(-\infty, -2)$, $(1, 6)$ y $(9, \infty)$,
$f'(x) > 0$ en $(-2, 1)$ y $(6, 9)$,
$f''(x) > 0$ en $(-\infty, 0)$ y $(12, \infty)$,
$f''(x) < 0$ en $(0, 6)$ y $(6, 12)$

16. $f(0) = 0, \quad f$ es continua y par
$f'(x) = 2x$ si $0 < x < 1, \quad f'(x) = -1$ si $1 < x < 3,$
$f'(x) = 1$ si $x > 3$

17. f es impar $\quad f'(x) < 0$ para $0 < x < 2,$
$f'(x) > 0$ para $x > 2, \quad f''(x) > 0$ para $0 < x < 3,$
$f''(x) < 0$ para $x > 3, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = -2$

18. En la figura se ilustra la gráfica de la *derivada* f' de una función f.
(a) ¿En qué intervalos f es creciente o decreciente?
(b) ¿Para qué valores de x la función f tiene un máximo local o un mínimo local?
(c) Trace la gráfica de f''.
(d) Trace la gráfica posible de f.



19–34 Mediante los criterios de la sección 4.5 trace la curva.

19. $y = 2 - 2x - x^3$

20. $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$

21. $y = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$

22. $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$

23. $y = \dfrac{1}{x(x - 3)^2}$

24. $y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x + 2)^2}$

25. $y = x^2/(x + 8)$

26. $y = \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}$

27. $y = x\sqrt{2 + x}$

28. $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

29. $y = \operatorname{sen}^2 x - 2 \cos x$

30. $y = 4x - \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

31. $y = \operatorname{sen}^{-1}(1/x)$

32. $y = e^{2x - x^2}$

33. $y = xe^{-2x}$

34. $y = x + \ln(x^2 + 1)$

35–38 Produzca gráficas de f que revelen todos los aspectos importantes de la curva. Use las gráficas de f' y f'' para estimar los intervalos de incremento y decremento, los valores extremos los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión. En el ejercicio 35 aplique el cálculo para determinar estas cantidades con exactitud.

35. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$

36. $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 + x + 3}$

37. $f(x) = 3x^6 - 5x^5 + x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 2$

38. $f(x) = x^2 + 6.5 \operatorname{sen} x, \quad -5 \leqslant x \leqslant 5$

39. Trace la gráfica de $f(x) = e^{-1/x^2}$ en un rectángulo de visualización en que aparezcan todos los aspectos principales de la función. Estime los puntos de inflexión. En seguida, aplique el cálculo para determinarlos con exactitud.

CAS 40. (a) Dibuje la función $f(x) = 1/(1 + e^{1/x})$.
(b) Explique la forma de la gráfica calculando los límites de $f(x)$ cuando x tiende a ∞, $-\infty$, 0^+ y 0^-.
(c) Use la gráfica de f para estimar las coordenadas de los puntos de inflexión.
(d) Utilice su CAS para calcular y trazar la gráfica de f''.
(e) Con la gráfica del inciso (d) estime el punto de inflexión con más exactitud.

CAS **41–42** Utilice las gráficas de f, f' y f'' para estimar la coordenada x de los puntos máximo y mínimo y los puntos de inflexión de f.

41. $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$

42. $f(x) = e^{-0.1x} \ln(x^2 - 1)$

43. Investigue la familia de funciones de $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x + C)$. ¿Cuáles características tienen los miembros de esta familia en común? ¿En qué difieren? ¿Para cuáles valores de C es f continua sobre $(-\infty, \infty)$? ¿Para cuáles valores de C f no tiene gráfica? ¿Qué sucede cuando $C \to \infty$?

44. Investigue la familia de funciones $f(x) = cxe^{-cx^2}$. ¿Qué le ocurre a los puntos máximos y mínimos y a los puntos de inflexión al cambiar c? Ilustre sus conclusiones dibujando varios miembros de la familia.

45. Demuestre que la ecuación $3x + 2\cos x + 5 = 0$ posee exactamente una raíz real.

46. Suponga que f es continua en $[0, 4]$, $f(0) = 1$, y $2 \leqslant f'(x) \leqslant 5$ para toda x en $(0, 4)$. Demuestre que $9 \leqslant f(4) \leqslant 21$.

47. Aplicando el teorema del valor medio a la función $f(x) = x^{1/5}$ en el intervalo $[32, 33]$, demuestre que

$$2 < \sqrt[5]{33} < 2.0125$$

48. ¿Para cuáles valores de las constantes a y b se tiene que $(1, 6)$ es un punto de inflexión de la curva $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$?

49. Sea $g(x) = f(x^2)$ donde f es dos veces derivable para todo x, $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ y f es cóncava hacia abajo sobre $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba sobre $(0, \infty)$.
(a) ¿En cuáles números g tiene un valor extremo?
(b) Discuta la concavidad de g.

50. Halle dos números enteros positivos tales que la suma del primer número y cuatro veces el segundo sea 1 000 y el producto de los números sea lo más grande posible.

51. Demuestre que la distancia más corta desde el punto (x_1, y_1) a la recta $Ax + By + C = 0$ es

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

52. Encuentre el punto sobre la hipérbola $xy = 8$ que está más cercano al punto $(3, 0)$.

53. Halle el área más pequeña posible de un triángulo isósceles que está circunscrito a una circunferencia de radio r.

54. Encuentre el volumen del cono circular más grande que puede inscribirse en una esfera de radio r.

55. En ΔABC, D queda en AB, $CD \perp AB$, $|AD| = |BD| = 4$ cm y $|CD| = 5$ cm. ¿Dónde se debe situar un punto P sobre CD de tal modo que la suma $|PA| + |PB| + |PC|$ sea mínima?

56. Resuelva el ejercicio 55 cuando $|CD| = 2$ cm.

57. La velocidad de una ola de longitud L en agua profunda es

$$v = K\sqrt{\frac{L}{C} + \frac{C}{L}}$$

donde K y C son constantes positivas conocidas. ¿Cuál es la longitud de la ola que da la velocidad mínima?

58. Se va a construir un tanque metálico de almacenamiento con volumen V, en forma de un cilindro circular recto rematado por un hemisferio. ¿Cuáles dimensiones requerirán la cantidad mínima de metal?

59. Un equipo de hockey juega en una arena con una capacidad de 15 000 espectadores. Con el precio del boleto fijado en \$12, la asistencia promedio en un juego es de 11 000 espectadores. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que disminuya el precio del boleto, la asistencia promedio aumentará 1 000. ¿Cómo deben de fijar los propietarios del equipo el precio del boleto para maximizar sus ingresos provenientes de la venta de boletos?

60. Un fabricante determina que el costo de fabricar x unidades de un artículo es $C(x) = 1\,800 + 25x - 0.2x^2 + 0.001x^3$ y la función de demanda es $p(x) = 48.2 - 0.03x$.
(a) Dibuje las funciones de costo y de ingreso y úselas para estimar el nivel de producción para obtener la utilidad máxima.
(b) Aplique el cálculo a fin de hallar el nivel de producción para obtener la utilidad máxima.
(c) Estime el nivel de producción que minimice el costo promedio.

61. Aplique el método de Newton para calcular la raíz de la ecuación $x^5 - x^4 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$ en el intervalo $[1, 2]$ con una aproximación de seis posiciones decimales.

62. Aplique el método de Newton para hallar todas las raíces de la ecuación $\operatorname{sen} x = x^2 - 3x + 1$ con una exactitud de seis posiciones decimales.

63. Aplique el método de Newton para hallar el valor máximo absoluto de la función $f(x) = \cos t + t - t^2$, con una exactitud de ocho posiciones decimales.

64. Aplique las normas de la sección 4.5 para trazar la curva $y = x \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq 2\pi$. Recurra al método de Newton si es necesario.

65–72 Determine f.

65. $f'(x) = \cos x - (1 - x^2)^{-1/2}$

66. $f'(x) = 2e^x + \sec x \tan x$

67. $f'(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}$

68. $f'(x) = \operatorname{senh} x + 2 \cosh x, \quad f(0) = 2$

69. $f'(t) = 2t - 3 \operatorname{sen} t, \quad f(0) = 5$

70. $f'(u) = \dfrac{u^2 + \sqrt{u}}{u}, \quad f(1) = 3$

71. $f''(x) = 1 - 6x + 48x^2, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 2$

72. $f''(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5, \quad f(0) = 2, \quad f(1) = 0$

73–74 Se está moviendo una partícula con la información que se proporciona. Halle la posición de la partícula.

73. $v(t) = 2t - 1/(1 + t^2), \quad s(0) = 1$

74. $a(t) = \operatorname{sen} t + 3 \cos t, \quad s(0) = 0, \quad v(0) = 2$

75. (a) Si $f(x) = 0.1e^x + \operatorname{sen} x$, $-4 \leq x \leq 4$, use una gráfica de f para dibujar una gráfica aproximada de la antiderivada F de f que satisfaga $F(0) = 0$.
(b) Encuentre una expresión para $F(x)$.
(c) Dibuje F con la expresión del inciso (b). Compare con su esquema del inciso (a).

76. Investigue la familia de curvas dada por

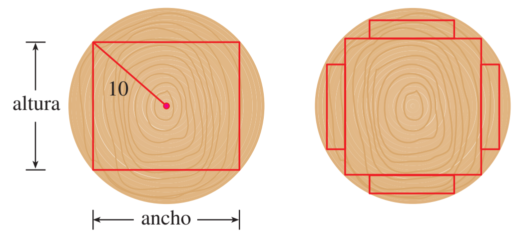
$$f(x) = x^4 + x^3 + cx^2$$

En particular, determine el valor de transición de c en que cambia la cantidad de números críticos y el valor de transición en que varía el número de puntos de inflexión. Ilustre las formas posibles con gráficas.

77. Se deja caer un recipiente metálico desde un helicóptero a 500 m arriba de la superficie de la tierra. Su paracaídas no se abre, pero el recipiente ha sido diseñado para soportar una velocidad de impacto de 100 m/s. ¿Se reventará o no?

78. En una carrera de automóviles a lo largo de una pista recta, el auto A deja atrás dos veces al vehículo B. Demuestre que en algún momento en la carrera las aceleraciones de los automóviles fueron iguales. Plantee las suposiciones que haga.

79. Se va a cortar una viga rectangular a partir de un tronco cilíndrico que tiene un radio de 10 pulgadas.
(a) Demuestre que la viga de área máxima de sección transversal es cuadrada.
(b) Se van a cortar cuatro tablones rectangulares de las cuatro secciones del tronco que quedan después de cortar la viga cuadrada. Determine las dimensiones de los tablones que tendrán el área máxima de la sección transversal.
(c) Suponga que la resistencia de la viga rectangular es proporcional al producto de su ancho y al cuadrado de su altura. Encuentre las dimensiones de la viga más fuerte que se puede cortar a partir del tronco cilíndrico



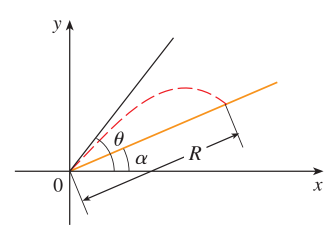
80. Si se dispara un proyectil a una velocidad inicial v a un ángulo de inclinación θ a partir de la horizontal, por lo tanto su trayectoria, despreciando la resistencia del aire, es la parábola

$$y = (\tan\theta)x - \frac{g}{2v^2\cos^2\theta}x^2 \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

(a) Suponga que el proyectil se dispara desde la base de un plano inclinado que forman un ángulo α, $\alpha > 0$, respecto de la horizontal, como se muestra en la figura. Demuestre que el alcance del proyectil, medido hacia arriba de la pendiente, se expresa mediante

$$R(\theta) = \frac{2v^2\cos\theta\ \operatorname{sen}(\theta - \alpha)}{g\cos^2\alpha}$$

(b) Determine θ de modo que R sea un máximo.
(c) Suponga que el plano forma un ángulo α hacia *abajo* de la horizontal. Determine el alcance R en este caso y el ángulo al cual debe dispararse el proyectil para maximizar R.



81. Demuestre que, para $x > 0$,

$$\frac{x}{1 + x^2} < \tan^{-1}x < x$$

82. Trace la gráfica de una función f tal que $f'(x) < 0$ para toda x, $f''(x) > 0$ para $|x| > 1$, $f''(x) < 0$ para $|x| < 1$ y $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) + x] = 0$.

PROBLEMAS ADICIONALES

Uno de los principios más importantes en la solución de los problemas es la *analogía* (véase la página 76). Si tiene dificultades para comenzar un problema, conviene resolver un problema semejante más sencillo. En el ejemplo siguiente se ilustra el principio. Cubra la solución e intente solucionarlo primero.

EJEMPLO 1 Si x, y y z son números positivos demuestre que

$$\frac{(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1)}{xyz} \geqslant 8$$

SOLUCIÓN Puede resultar difícil empezar con este problema. (Algunos estudiantes lo han atacado multiplicando el numerador, pero eso sólo genera un lío.) Intente pensar en un problema similar, más sencillo. Cuando intervienen varias variables, a menudo resulta útil pensar en un problema análogo con menos variables. En el presente caso, puede reducir el número de variables de tres a una y probar la desigualdad análoga

$$\boxed{1} \qquad \frac{x^2 + 1}{x} \geqslant 2 \quad \text{para} \quad x > 0$$

De hecho, si puede probar (1), entonces se deduce la desigualdad deseada porque

$$\frac{(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1)}{xyz} = \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)\left(\frac{y^2 + 1}{y}\right)\left(\frac{z^2 + 1}{z}\right) \geqslant 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

La clave para probar (1) es reconocer que es una versión disfrazada de un problema de mínimo. Si hace

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x} \qquad x > 0$$

entonces $f'(x) = 1 - (1/x^2)$, de tal suerte que $f'(x) = 0$ cuando $x = 1$. Asimismo, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 1$, y $f'(x) > 0$ para $x > 1$. Por consiguiente, el valor mínimo absoluto de f es $f(1) = 2$. Esto significa que

$$\frac{x^2 + 1}{x} \geqslant 2 \qquad \text{para todos los valores positivos de } x$$

y, como se mencionó con anterioridad, por multiplicación se infiere la desigualdad dada.

La desigualdad (1) pudo probarse sin cálculo. De hecho, si $x > 0$

$$\frac{x^2 + 1}{x} \geqslant 2 \iff x^2 + 1 \geqslant 2x \iff x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$$

$$\iff (x - 1)^2 \geqslant 0$$

Debido a que la última desigualdad obviamente es verdadera, la primera también lo es. □

Retome el concepto

¿Qué ha aprendido a partir de la solución de este ejemplo?

- Para resolver un problema que comprende varias variables, podría ayudar resolver un problema semejante con una variable.
- Cuando intente probar una desigualdad, podría ayudar si piensa en ella como en un problema de máximo y mínimo.

PROBLEMAS ADICIONALES

PROBLEMAS

1. Si un rectángulo tiene su base sobre el eje x y dos vértices sobre la curva $y = e^{-x^2}$, demuestre que el rectángulo tiene el área más grande posible cuando los dos vértices están en los puntos de inflexión de la curva.

2. Demuestre que $|\operatorname{sen} x - \cos x| \leqslant \sqrt{2}$ para todo x.

3. Demuestre que para todos los valores positivos de x y y,

$$\frac{e^{x+y}}{xy} \geqslant e^2$$

4. Demuestre que $x^2y^2(4 - x^2)(4 - y^2) \leqslant 16$ para todos los números x y y tales que $|x| \leqslant 2$ y $|y| \leqslant 2$.

5. Si a, b, c y d son constantes tal que

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + \operatorname{sen} bx + \operatorname{sen} cx + \operatorname{sen} dx}{3x^2 + 5x^4 + 7x^6} = 8$$

halle el valor de la suma $a + b + c + d$.

6. Encuentre el punto sobre la parábola $y = 1 - x^2$ en el cual la recta tangente corta el primer cuadrante en un triángulo con área mínima.

7. Encuentre los puntos más altos y más bajos sobre la curva $x^2 + xy + y^2 = 12$.

8. Esquematice el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $|x + y| \leqslant e^x$.

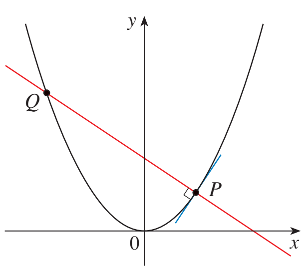


FIGURA PARA EL PROBLEMA 9

9. Si $P(a, a^2)$ es cualquier punto en la parabola $y = x^2$, excepto en el origen, sea Q el punto donde la línea normal cruza la parábola una vez más. Demuestre que el segmento de línea PQ tiene la longitud más corta posible cuando $a = 1/\sqrt{2}$

10. ¿Para que valores de c la curva $y = cx^3 + e^x$ tiene puntos de inflexión?

11. Determine los valores del número a para los cuales la función f no tiene números críticos.

$$f(x) = (a^2 + a - 6)\cos 2x + (a - 2)x + \cos 1$$

12. Trace la región en el plano que consta de todos los puntos (x, y) tales que

$$2xy \leqslant |x - y| \leqslant x^2 + y^2$$

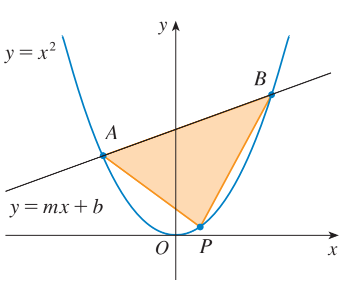


FIGURA PARA EL PROBLEMA 13

13. La recta $y = mx + b$ corta a la parábola $y = x^2$ en los puntos A y B (véase la figura). Determine el punto P en el arco AOB de la parábola que maximiza el área del triángulo PAB.

14. $ABCD$ es un trozo cuadrado de papel con lados de longitud 1 m. Se dibuja un cuarto de círculo desde B hasta D, con centro en A. El trozo de papel se dobla a lo largo de EF con E sobre AB y F sobre AD, de suerte que A cae sobre el cuarto de círculo. Determine las áreas máxima y mínima que podría tener el triángulo AEF.

15. ¿Para qué números positivos a la curva $y = a^x$ corta a la recta $y = x$?

16 ¿Para qué valores de a es verdadera la ecuación siguiente?

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + a}{x - a}\right)^x = e$$

17. Sea $f(x) = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + a_n \operatorname{sen} nx$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales y n es un entero positivo. Si sabe que $|f(x)| \leqslant |\operatorname{sen} x|$ para toda x, demuestre que

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1$$

PROBLEMAS ADICIONALES

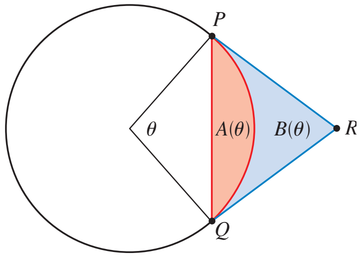


FIGURA PARA EL PROBLEMA 18

18. Un arco PQ de un círculo subtiende un ángulo central θ, como en la figura. Sea $A(\theta)$ el área entre la cuerda PQ y el arco PQ. Sea $B(\theta)$ el área entre las rectas tangentes PR, QR y el arco. Encuentre

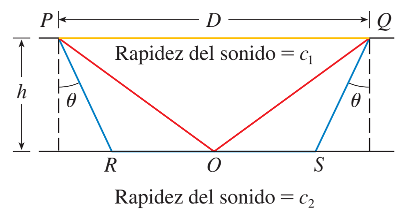
$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$

19. La velocidad del sonido c_1 en una capa superior y c_2 en una capa inferior de roca y el espesor h de la capa superior se pueden calcular mediante la exploración sísmica si la velocidad del sonido en la capa inferior es mayor que la velocidad en la capa superior. Se hace detonar una carga de dinamita en el punto P y las señales transmitidas se registran en el punto Q, el cual está a una distancia D de P. La primera señal que llega a Q viaja por la superficie y tarda T_1 segundos. La siguiente señal viaja desde el punto P al punto R, desde R a S en la capa inferior y luego a Q, lo cual le lleva T_2 segundos. La tercera señal es reflejada por la capa inferior en el punto medio O de RS y tarda T_3 segundos en llegar a Q.

(a) Exprese T_1, T_2 y T_3 en función de D, h, c_1, c_2 y θ.

(b) Demuestre que T_2 es un mínimo cuando sen $\theta = c_1/c_2$.

(c) Suponga que $D = 1$ km, $T_1 = 0.26$ s, $T_2 = 0.32$ s, $T_3 = 0.34$ s. Calcule c_1, c_2 y h.



Nota: Los geofísicos usan esta técnica cuando estudian la estructura de la corteza terrestre, ya sea con fines de detectar petróleo o enormes grietas en las rocas.

20. ¿Para qué valores de c existe una recta que cruce la curva $y = x^4 + cx^3 + 12x^2 - 5x + 2$ en cuatro puntos diferentes?

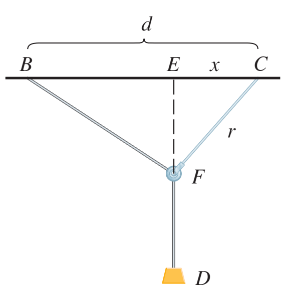


FIGURA PARA EL PROBLEMA 21

21. Uno de los problemas que planteó el marqués de l'Hospital en su libro de texto *Analyse des Infiniment Petits* concierne a una polea conectada al techo de una habitación en un punto C mediante una cuerda de longitud r. En otro punto B sobre el techo, a una distancia d de C (donde $d > r$), una cuerda de longitud ℓ se conecta a la polea y pasa por ésta en F y se conecta a un peso W. El peso se libera y alcanza el reposo en su posición de equilibrio D. Tal y como argumentó l'Hospital, esto sucede cuando la distancia $|ED|$ se maximiza. Demuestre que cuando el sistema alcanza el punto de equilibrio, el valor de x es

$$\frac{r}{4d}\left(r + \sqrt{r^2 + 8d^2}\right)$$

observe que esta expresión es independiente tanto de W como de ℓ.

22. Dada una esfera con radio r, encuentre la altura de una pirámide de volumen mínimo cuya base es un cuadrado y cuyas caras base y triangular son tangentes a la esfera. ¿Qué sucede si la base de la pirámide es un n-gono regular? (Un n-gono regular es un polígono con n lados y ángulos iguales.) (Use el hecho de que el volumen de una pirámide es $\frac{1}{3}Ah$, donde A es el área de la base.)

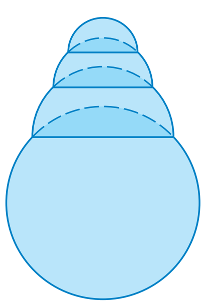


FIGURA PARA EL PROBLEMA 24

23. Suponga que una bola de nieve se funde de tal modo que su volumen disminuye en proporción directa a su área superficial. Si tarda tres horas en que la bola disminuya a la mitad de su volumen original, ¿cuánto tardará la bola en fundirse totalmente?

24. Una burbuja hemiesférica se coloca sobre una burbuja esférica de radio 1. Después, una burbuja hemisférica más pequeña se coloca sobre la primera. Este proceso prosigue hasta que se forman n cámaras, incluso la esfera. (La figura muestra el caso $n = 4$.) Utilice la inducción matemática para probar que la altura máxima de cualquier torre de burbujas con n cámaras es $1 + \sqrt{n}$.