

Tarea 7. Cálculo Diferencial. Derivadas de funciones

Aplicando la regla de la derivada del producto de dos funciones, la regla de la derivada de la razón de dos funciones, y/o la regla de la cadena para derivar la composición de dos funciones, encuentra por al menos dos maneras las derivadas de las siguientes funciones expresadas en cada problema.

1. Por ejemplo, la siguiente función se puede escribir de tres maneras distintas, como se indica en los incisos (a) al (c). Considera sólo esta función para $x > 0$. Encuentra la derivada $df(x)/dx$ para el inciso (a) por la regla de la cadena, para el inciso (b) aplicando regla del producto y derivada de la cadena, para el inciso (c) aplicando la regla de la razón y de la cadena. En cada caso debes llegar a la misma expresión de derivada.

(a) $f(x) = (2x + 3)^5$

(b) $f(x) = (2x + 3)^3(2x + 3)^2$

(c) $f(x) = \frac{(2x+3)^7}{(2x+3)^2}$.

- (d) Evalúa la derivada que acabas de calcular en $x = 7$. Da la ecuación de la recta en la forma $y = mx + b$, que pasa por el punto

$$[7, f(7)],$$

donde la pendiente de la recta es $m = f'(7)$. Esta recta es tangente a la curva $f(x)$ precisamente en el punto anterior. Gráfica esta recta en DESMOS junto con la función $f(x)$ sobre el intervalo $[2, 15]$. Haz una gráfica a mano en tu tarea donde aproximes lo mejor que puedas la función $f(x)$ en este intervalo, al igual que la recta tangente a esa función en el punto indicado donde $x = 7$.

- (e) Ahora para $h = 0.0001$, calcula la expresión

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

para $x = 7$. Compara tu resultado con el valor exacto de $f'(7)$ que calculaste ya en el inciso (d).

2. La función $w(z) = (a + z)^3$ se puede escribir también como

$$w(z) = (a + z)^2(a + z)$$

y también como $w(z) = a^3 + 3a^2z + 3az^2 + z^3$. Calcula la derivada $dw(z)/dz$ usando la regla de la cadena en el primer caso, como el producto de dos funciones en el segundo y como gustes en el tercero, mostrando que llegas a la misma expresión. Evalúa esta derivada en $z = 3$. Da la ecuación de la recta que pasa por el punto

$$[3, w(3)]$$

y que tiene pendiente igual a $w'(3)$. Esta recta es tangente a la función w en el punto $z = 3$. Finalmente, aproxima la derivada en $z = 3$ considerando una $h = 0.001$ y evaluando

$$\frac{w(x+h) - w(x)}{h}, \text{ para } z = 3.$$

Comenta si te parece cercano o no este valor al de la primera derivada exacta que calculaste antes.

3. Encuentra la derivada $dg(y)/dy$ para $g(y) = (2y^2 + 4y)^3 (y^4 - 2y^2)^{-2}$ y para

$$g(y) = \frac{(2y^2 + 4y)^3}{(y^4 - 2y^2)^2}.$$

4. Encuentra la derivada en $x = 4$ para $f(x) = (2x + 5a)^7 (3x^2 - 2)^{-3}$, donde a es una constante positiva arbitraria. Ahora evalúa esta derivada en $x = 4$ considerando que $a = 5$.

5. Encuentra la derivada para $v(y) = 5y + 9(3y^2 + y)^3$. Evalúala en $y = 1$.