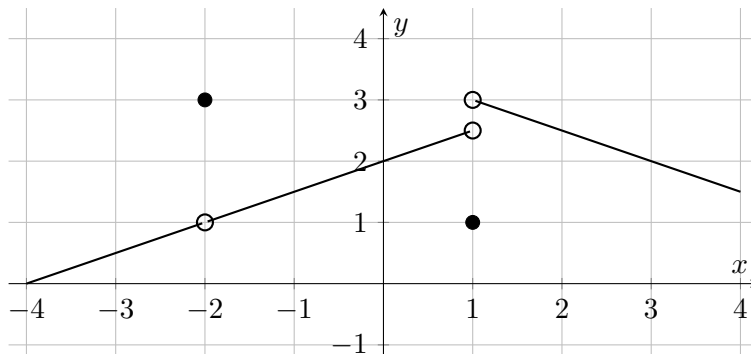


Tarea 4

Fecha de entrega: 24 de septiembre de 2026

Nota: Muestra todo tu trabajo y explica brevemente cómo obtuviste cada límite. No se asignarán puntos si sólo escribes la respuesta.

1. **Límites a partir de una gráfica.** Usa únicamente la gráfica de $y = f(x)$ para contestar.



a) Calcula $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ y encuentra $f(-2)$. ¿Son iguales?

b) Calcula $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

c) ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$? Explica brevemente.

d) Encuentra $f(1)$.

2. **Un límite observado numéricamente.** Considera

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, \quad x \neq 2.$$

Completa la tabla y úsala para estimar $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$.

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$g(x)$						

Después, factoriza $x^2 - 4$ y explica por qué esa simplificación confirma el valor que observaste en la tabla.

3. **Cocientes que se simplifican.** Calcula los siguientes límites. En cada inciso, primero factoriza y simplifica el cociente para $x \neq 1$.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$.

¿Qué patrón observas en las respuestas?

4. **El caso general.** Sea n un entero positivo. Usa la identidad

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$$

para calcular

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

Explica por qué el cociente original no está definido en $x = 1$, pero su límite cuando $x \rightarrow 1$ sí puede existir. Verifica tu fórmula con $n = 5$.

5. **La función $x \sin(1/x)$ cerca del origen.** Considera

$$h(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0.$$

- Usa los datos del archivo `tabla_x_sen_1_sobre_x_cerca_de_0.xlsx` que se te proporcionó anteriormente para hacer una gráfica de $h(x)$ cerca de $x = 0$. Marca claramente los ejes y utiliza los puntos de la tabla.
- A partir de la tabla y de tu gráfica, ¿qué valor parece tener $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$?
- Lee la siguiente demostración y después **reescribela con tus propias palabras**, explicando qué desigualdad se usa y por qué se puede aplicar el teorema del sándwich:

Para todo $x \neq 0$ se tiene

$$\left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1.$$

Multiplicando por $|x|$,

$$\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|.$$

Por lo tanto,

$$-|x| \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|.$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0,$$

el teorema del sándwich implica que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.}$$