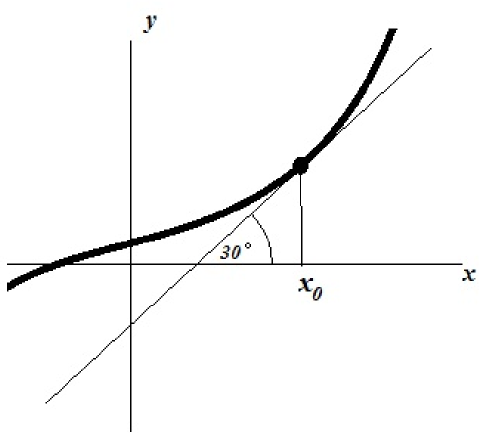
Guia para el examen final

(En construccion)

(Fecha del examen: 12 junio, 2012)

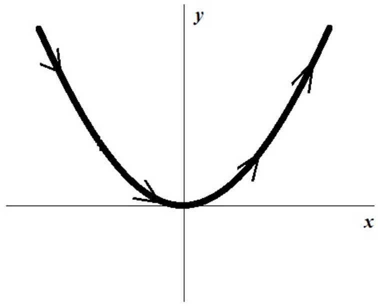
1. Encuentra las siguientes derivadas:
   a) $f'(x)$, donde $f(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$.
   b) $\frac{dz}{d\theta}$, donde $z = e^{\text{sen}(\theta)}$.
   c) $\frac{dx}{dy}$, donde $y = \tan(x)$.
   d) $\frac{dy}{dx}$, donde $y = \tan(x)$.
   e) $\frac{dy}{dx}$, donde $y = 2^x$.
   f) $\frac{d}{dh}2gy^2$, donde $y = \cos(\sqrt{h/2})$ y g es una constante.
   g) $y'(1)$ y $y''(1)$ donde $y(x) = (1 - \frac{1}{x^2})^4$.
   h) $y^{(1000)}(x)$ (la milesima derivada) donde $y(x) = (1 - x^2 + x^4)^{100}$.
   i) $y^{(2012)}(x)$, donde $y(x) = \sin(x)$.
   j) $y''(1)$, donde $y(x)$ es una funcion que satisface $1 + y(x) + [y(x)]^3 = 0$ para todo x.
   k) $F'(3)$, donde $F(x) = \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.
   l) $F'(3)$, donde $F(x) = \int_x^7 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.
   m) $F'(3)$, donde $\int_0^x F(t)dt = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$.
   n) $f'(x_0)$, para la f y la x_0 del dibujo.



   ñ) $f'(2)$, donde $f(x)$ es una función cuya gráfica intersecta la parábola $y = x^2$ perpendicularmente en el funto $(2, 4)$.
   o) $f'(0)$, donde $f(x) = \text{sen}(\arccos(x))$. (Hay que dar respuesta explicita, sin usar claculadora).
   p) $f'(0)$, donde $f(x) = \text{sen}(\arctan(x))$. (Hay que dar respuesta explicita, sin usar claculadora).
2. Una partícula se mueve a lo largo del eje de x segun la fórmula $x(t) = t^3 - t^2 - 2t$.
   a) Encuentra los intervalos de tiempo tal que la partícula se mueve hacia la derecha/izquierda.

b) Encuentas los momentos y lugares tal que la partícula se mueve con una velocidad 3.
c) Encuentra los lugares que la partícula ha visitado n veces, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

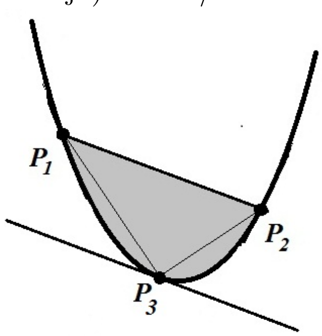
3. Imaginamos a una hormiga caminando a lo largo de la parábola $y = x^2$, de la izquierda hacia la derecha. Sus coordianadas x, y son funciones del tiempo, $x(t)$, $y(t)$. Su velocidad (o "vector de velocidad") es $\mathbf{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ y su rapidez (o "magnitud de la velocidad") es $v(t) = \|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}$. Su vector de aceleración es $\mathbf{a}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t))$ con magnitud ers $a(t) = \|\mathbf{a}(t)\| = \sqrt{(\ddot{x}(t))^2 + (\ddot{y}(t))^2}$.



Suponemos que $x(t) = t$.
a) Encuentra: $y(t)$, $\mathbf{v}(t)$, $v(t)$, $\mathbf{a}(t)$, $a(t)$.
b) Encuentra $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{a}(t)$ en $t = -1, 0, 1$ y dibujalos como flechas basadas en la posición de la hormiga $(x(t), y(t))$,
c) Encuentra los lugares de la parábola (sus coordenadas (x, y)) en donde la hormiga camina hacia el este/noreste/sureste.

4. Se requiere construir una cisterna (deposito de agua) de 10 mil litros (=10 metros cubicos) en forma de caja rectangular. El costo de construccion por 1 metro cuadrado de piso/pared/techo es de 200/100/500 pesos (resp.) Encuentra las medidas de la cisterna más economica.

   Respuesta: $1{,}42 \times 1{,}42 \times 4{,}97m$.
5. Enceuntra el área del disco con centro en (1,-2) y radio 3 que se encuentra arriba del eje de x.
6. Demuestra el siguiente teorema de Arquímedes ("la cuadratura de la parábola"): en una parábola se escogen dos puntos P_1, P_2. Luego se escoge un tercer punto, P_3, tal que la tangente a la parábola en P_3 es paralela al segmento P_1P_2. Entonces el área del segmento de la parábola delimitado por P_1, P_2 (el área sombreada en el dibujo) es el 4/3 del área del triángulo con vértices P_1, P_2, P_3.

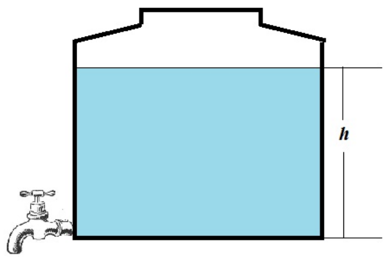


   Sugerencia: reubicando los ejes de coordenadas x, y, podemos suponer que la parábola está dada por $y = ax^2$, $a > 0$.
7. Encuentra el área dentro de una elipse con semi-ejes $a > b$.

   Sugerencia: Sugerencia: reubicando los ejes de coordenadas x, y, podemos suponer que la elipse está dada por $(x/a)^2 + (y/b) = 1$.

8. Encuentra una recta que pasa por el origen y que divide en 2 partes del mismo área la parte de la parábola $y = (x-3)^2 - 1$ que se encuentra abajo del eje de x.

9. Un tinaco cilíndrico tiene una llave en el fondo y agua a un nivel de 1 metro arriba del fondo. Abrimos la llave y el nivel de agua empieza a bajar. Despues de 1 minuto el nivel del agua ha bajado 10cm. Dejando la llave abierta, ¿en cuánto tiempo se vacia el tinaco?



Sugerencias:

a) Denotamos por $h(t)$ el nivel del agua en el tinaco (en cm) como función del tiempo t (en minutos), $t = 0$ siendo el momento de abrir la llave.

Vamos a demostrar abajo que la función $h(t)$ tiene la forma $h(t) = h_0(1-t/t_0)^2$, donde $h_0 = h(0)$ es el nivel incial del agua y t_0 es el momento que se vacia el tinaco, $h(t_0) = 0$, lo que buscamos.

De aquí, usando los valores dados en el problema de $h(0) = h_0 = 100$ y $h_1 = h(1) = 90$, determina el valor de t_0 (el momento t_0 que el tinaco se vacia, $h(t_0) = 0$).

Respuesta: $t_0 = 1/(1 - \sqrt{h_1/h_0}) \approx 19.5$ minutos.

b) Para llegar a la fórmula del inciso anterior para $h(t)$, vamos a demostrar abajo que $h(t)$ satiface una ecuación diferencial de la forma $\frac{dh}{dt} = -c\sqrt{h}$, para una constante $c > 0$.

Demuestra que la solución general de la ecuación $h' = -c\sqrt{h}$, con $h(0) = h(0)$ y $h(t_0) = 0$, es la fórmula del inciso anterior.

c) Para llegar a la ecuación $h' = -c\sqrt{h}$ (la parte más importante y bonita de este problema) vamos a usar dos leyes de conservacion: (1) conservacion de masa y (2) conservacion de energia.
Más preciso: (1) el agua que pierde el tinaco sale por la llave; (2) la energia cinética del chorro de agua que sale por la llave viene de la energia potencial que pierde el tinaco .

d) Empezamos por la conservación de masa. Denotamos por A el área¡de superficie del agua en el tinaco, por a el área de la apertura de la llave (ambos en cm^2) y por $v(t)$ la velocidad del chorro del agua (en cm/min) que sale por la llave en el momento t (obviamente, la $v(t)$ se disminue con t, igual que la $h(t)$).

Demuestra que la ley conservación de masa para el agua en este problema implica la relación $\frac{dh}{dt} = -\frac{a}{A}v$.

Para ver esto, considera un pequeño intervalo de tiempo $[t, t+\Delta t]$. Denota por $\Delta h = h(t+\Delta t) - h(t)$, el cambio del nivel de agua en este intervalo del tiempo (nota que $\Delta h < 0.$). Demuestra que en este intervalo de tiempo el tinaco perdio un volumen de agua de $\approx A|\Delta h|\ cm^3$, y que por la llave salieron $av(t)\Delta t\ cm^3$

de agua. Así que $A\Delta h \approx -av(t)\Delta t$. Dividiendo entre Δt y tomando el límite $\Delta t \to 0$, obtienes la relación $h' = -\frac{a}{A}v$.

e) Conservación de energía. Usamos la misma notación del inciso anterior y además denotamos por ρ (la letra griega "rho") la densidad de agua (en g/cm^3, un poco menos que 1 en Guanajuato), y por g la aceleración de objetos debido a gravedad en la superficie de la tierra (en cm/min^2).

Demuestra que en el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ la energía potencial V que perdió el tinaco, debido a la perdida de $A\Delta h$ de agua, es $\Delta V \approx \rho(A\Delta h)gh(t)$, y que la energía cinética del chorro del agua que estaba saliendo por la llave en este intervalo del tiempo es $\Delta K \approx \frac{1}{2}\rho(A\Delta h)[v(t)]^2$. Igualando $\Delta K = \Delta V$ (la ley de conservacion de energia), obtienes $v = \sqrt{2gh}$.

f) Combinando los dos incisos anteriores obtienes una ecuación del tipo $h' = -c\sqrt{h}$, para alguna $c > 0$ (expresa la c en términos de a, A, g, aunque no vamos usar esta expresión aquí). Has llegado a la "ecuación del tinaco" (o del "reloj de agua").

g) Haz unos expriementos con distintos contenedores de agua (vasos, garafones...) y compara los resultados con la fórmula $h(t) = h_0(1 - (t/t_0))^2$.