

Notas de clase y tarea 11

Cálculo 2

Se entrega el jueves 7 de mayo de 2026

1. Área de superficies de revolución

Lo primero es entender como calcular el área de un cono truncado. Para ello calculamos el área de un cono de radio r y “altura inclinada” (ie la longitud de una generatriz) L .

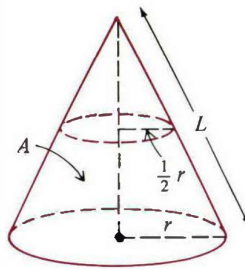


Figura 1: Cono de radio r y altura inclinada L

Corta el cono a lo largo de la generatriz y desdobra ¡ El cono se puede aplanar! Como todos los puntos de la base están a la misma distancia L del vértice, la figura que te queda es un sector de círculo, cuyo arco mide lo mismo que la longitud del círculo base, esto es, $2\pi r$:

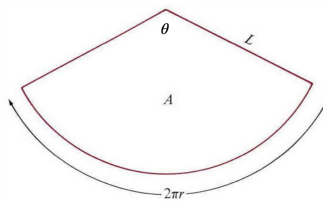


Figura 2: El área del sector es precisamente el área del cono que queremos calcular

Sea θ el ángulo del sector, entonces

- $\theta L = 2\pi r$, sale de la fórmula para calcular la longitud de un arco de un círculo de radio L que subtiende un ángulo central θ ; despejando, $\theta = \frac{2\pi r}{L}$;
- La fórmula para el área del sector: $A = \frac{\theta}{2}L^2$; sustituyendo θ nos queda el área del cono, en términos de r y L :

$$A = \pi rL.$$

Ahora calculamos el área de un cono truncado:

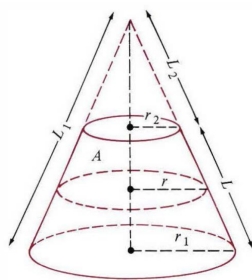


Figura 3: Cono truncado con radios r_1 y r_2 y altura inclinada L . Su área es $A = \pi L(r_1 + r_2)$

$$\begin{aligned} A &= \pi r_1 L_1 - \pi r_2 L_2 = \pi(r_1 L_1 - r_2 L_2) \quad \text{la diferencia de áreas de los conos con } (r_1, L_1) \text{ y } (r_2, L_2) \\ &= \pi(r_1 L_1 - r_1 L_2 + r_2 L_1 - r_2 L_2) \quad r_1 L_2 = r_2 L_1, \text{ ya que, por triángulos semejantes, } \frac{L_1}{r_1} = \frac{L_2}{r_2} \\ &= \pi(L_1 - L_2)(r_1 + r_2) = \pi L(r_1 + r_2). \end{aligned}$$

Ahora, imagina que tenemos un segmento de curva en el plano y lo rotamos alrededor del eje de las x . Obtenemos una **superficie de revolución** S . Queremos calcular el área de S . Como hicimos en clase (para calcular la longitud de una curva), aproximamos la curva por una poligonal. Al rotar la poligonal, cada segmento genera un cono truncado:

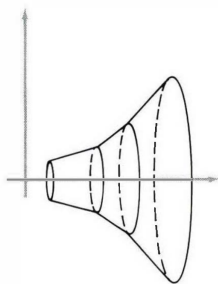
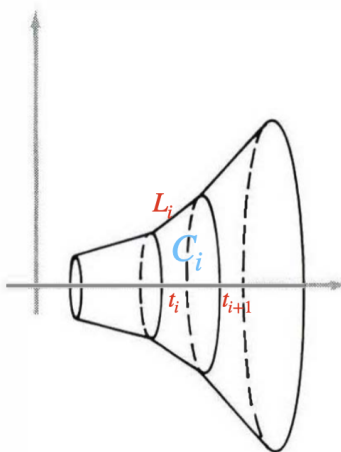


Figura 4: La curva puede ser una gráfica o una curva parametrizada

Supón que la curva está parametrizada como $(x(t), y(t))$ con $t \in [a, b]$. Copiamos la idea que se usó para calcular la longitud de una curva. Partimos el intervalo $[a, b]$: $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ y consideramos la poligonal que tiene vértices en $(x(t_i), y(t_i))$. Giramos cada segmento correspondiente a $[t_i, t_{i+1}]$ de la poligonal y nos da un cono truncado C_i con radios $y(t_i)$ y $y(t_{i+1})$ y altura inclinada L_i .



Así que

$$A(C_i) = \pi(y(t_i) + y(t_{i+1}))L_i = \pi(y(t_i) + y(t_{i+1}))\sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2}.$$

Recuerda que ahora podemos escribir (Teorema del Valor Medio):

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) - x(t_i) &= x'(\zeta_i)(t_{i+1} - t_i), \\ y(t_{i+1}) - y(t_i) &= y'(\xi_i)(t_{i+1} - t_i), \end{aligned}$$

para algunos números $\zeta_i, \xi_i \in (t_i, t_{i+1})$. Luego

$$A(C_i) = \pi(y(t_i) + y(t_{i+1}))\sqrt{[x'(\zeta_i)]^2 + [y'(\xi_i)]^2}(t_{i+1} - t_i).$$

Luego el área de la superficie “conoide” generada al rotar la poligonal tiene área

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} A(C_i) = \pi \sum_{i=0}^{n-1} (y(t_i) + y(t_{i+1}))\sqrt{[x'(\zeta_i)]^2 + [y'(\xi_i)]^2}(t_{i+1} - t_i).$$

Conforme la partición se hace cada vez más fina, la poligonal se acerca más a la curva y la conoide cada vez más a la superficie de revolución. A su vez, el área de la conoide se acerca a una integral que calcula el área de la superficie

$$A(S) = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Esto es porque

$$\begin{aligned} y(t_i) + y(t_{i+1}) &\mapsto 2y(t) \\ x'(\zeta_i) &\mapsto x'(t) \\ y'(\xi_i) &\mapsto y'(t) \\ t_{i+1} - t_i &\mapsto dt \end{aligned}$$

En particular, si la curva es la gráfica de $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, entonces la fórmula queda

$$A(S) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

1.1. Ejemplos

1. Calculemos el área de la esfera de radio r . Considera $f : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Si giras la gráfica de f alrededor del eje x obtienes una esfera de radio r . Así

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx \\ &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= 2\pi r \int_{-r}^r dx = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

2. Volvemos a calcular el área de la esfera de radio r , pero ahora rotando la curva parametrizada $(r \cos t, r \sin t)$ con $t \in [0, \pi]$.

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^\pi r \sin t \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt \\ &= 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin t dt = 2\pi r (-\cos t) \Big|_0^\pi = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

3. Ahora calculemos el área del toro de revolución que se obtiene al rotar el círculo de radio r y centro en $(0, R)$ alrededor del eje x . Parametrizamos el círculo como $(r \cos t, r \sin t) + (0, R)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Entonces

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^{2\pi} (r \sin t + R) \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt \\ &= 2\pi r \left[r \int_0^{2\pi} \sin t dt + R \int_0^{2\pi} dt \right] = (2\pi r) \cdot (2\pi R) = 4\pi^2 r R. \end{aligned}$$

2. Tarea 11

1. En clase vimos que la cicloide, que se obtiene de rodar un círculo de radio r a lo largo del eje x , está parametrizada por $r(\theta - \text{sen } \theta, 1 - \text{cos } \theta)$. Sea $P = r(\theta_0 - \text{sen } \theta_0, 1 - \text{cos } \theta_0)$, θ_0 arbitrario.
 - a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la cicloide en el punto P .
 - b) Comprueba que dicha recta tangente pasa por el polo norte del círculo que define P .
2. Considera la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$.
 - a) Da una parametrización de esta elipse, similar a la del círculo de radio r .
 - b) Escribe una integral que calcule el área del elipsoide de revolución, que se obtiene al rotar la elipse alrededor del eje x .
 - c) ¡Calcula la integral! (Se puede). Hay tres casos: $a = b$ (ya lo hicimos arriba, no lo repitas), $a > b$ y $b > a$.
3. Del libro de Marsden y Weinstein, p.487, los ejercicios: 16, 18 y 20.