Guia para el examen final

fecha del examen: jueves, 8 junio, 2017

1. Encuentra una ecuación para cada una de la rectas dadas por las siguientes condiciones:

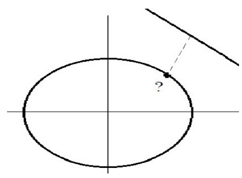
   (Nota: puede haber más que una recta en unos de los incisos).

   a) Pasa por $(2,3)$ y $(5,6)$.
   b) Pasa por $(3,4)$ y es perpendicular a $5x+6y=7$.
   c) Tiene pendiente $m=-3/4$ e intersecta el eje de x en $x=-5$.
   d) Es vertical y pasa por $(2,3)$.
   e) Es tangente al círculo $x^2+y^2+x+y=0$ y pasa por $(10,0)$.
   f) Es tangente a la parábola $y=x^2$ en $(1,1)$.
   g) Es tangente a la parábola $y=x^2$ y pasa por $(2,1)$.

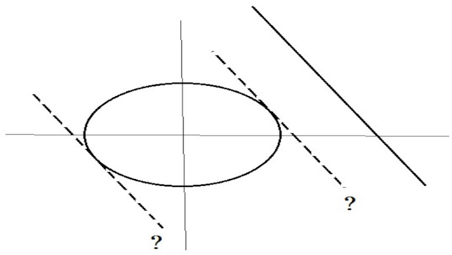
2. Encuentra una ecuación para
   a) El círculo con diámetro el segmento con extremos $(4,5),(-1,3)$.
   b) El círculo que pasa por $(2,1)$, $(3,5)$ con centro sobre la recta $x+y=0$.
   c) El lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta $x=2$ es el doble de su distancia al punto al origen. ¿Qué tipo de curva es?
   d) ¿Cómo cambia la respuesta al inciso anterior si cambiamos “el doble” por “la mitad”?

3. Encuentra
   a) La distancia entre las rectas $x+2y=3$ y $x+2y=4$.
   b) El vértice de la parábola $y^2+4y+8x+28=0$.
   c) Las asíntotas y focos de la hipérbola $y^2-x^2=7$.
   d) El radio de la circunferencia que pasa por $(3,0)$, $(1,2)$, $(-1,3)$.
   e) La distancia entre los focos de una elipse cuyos ejes menor y mayor miden 3 y 4 respectivamente.
   f) El punto más cercano de la parábola $y=x^2$ a la recta $y=x-10$.
   g) El área del triángulo con vértices $(3,1)$, $(-1,5)$, $(-2,-4)$.
   h) El punto de intersección de las medianas del triángulo con vértices $(3,1)$, $(-1,5)$, $(-2,-4)$.
   i) El centro del círculo inscrito dentro del triángulo con vértices $(1,3)$, $(-1,1)$ $(4,-2)$.
   j) Una ecuación cuadrática para la elipse que tiene sus focos en $(-1,1)$, $(1,1)$ y que pasa por $(0,2)$.
   k) Un punto F, una recta l y un número $e>0$ tal que el lugar geométrico de todos los puntos cuya distancia a l es e veces su distancia a F sea la elipse $3x^2+2y^2=1$. Mismo para la hipérbola $3x^2-2y^2=1$.

      Sugerencia: toma como F a unos de los focos y l una recta horizontal.
   l) El lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias al punto $(1,0)$ y la recta $x=2$ es 3.
   m) Los valores de c para los cuales la recta $x+2y=c$ intersecta la hipérbola $x^2-y^2=1$ en (i) 1 punto (ii) 2 puntos (iii) ningun punto.
   n) El punto más cercano de la elipse $x^2+2y^2=1$ a la recta $x+2y=10$.



   ñ) Ecuaciones para las dos rectas paralelas a la recta $x+y=5$ y tangentes a la elipse $2x^2+3y^2=4$.



4. Cada una de las siguientes ecuaciones describe alguna curva de segundo grado en el plano: circunferencia, parábola, elipse, hipérbola o un "caso degenerado"(par de rectas, una sola recta, un punto, o el conjunto vacío). Tienes que indentificar la curva, y encontrar: en caso de circunferencia - el centro y el radio, en caso de parábola - el foco y la directriz, en caso de elipse – los focos, los tamaños de los ejes (mayor y menor), el centro y los vértices, en caso hipérbola – los focos, los vértices y las asíntotas. También hay que dibujar la curva.

   a) $x^2 + 4x + y^2 + 8y + 19 = 0$
   b) $x^2 + 4x + 2y^2 + 16y + 19 = 0$
   c) $x^2 + 4x - 2y^2 + 16y + 19 = 0$
   d) $x^2 + 4x + 16y + 19 = 0$
   e) $x^2 + 4x + 16y^2 + 19 = 0$
   f) $x^2 + 4x + 16y^2 + 8y = 0$
   g) $x^2 + 4x + 8y^2 + 16y + 12 = 0$
   h) $x^2 + 4x - 2y^2 + 16y - 19 = 0$

5. Cierto o Falso: si dos hipérbolas tienen las mismas asíntotas entonces tienen los mismos focos.

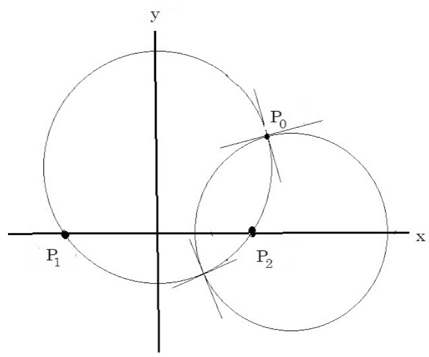
6. Dibuja en el plano con coordenadas b, c el lugar geométrico de los puntos (b, c) tal que la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ tiene (i) 1 solución (ii) 2 soluciones (iii) ninguna solución.

7. Sean a, b, c tres constantes con $a \neq 0$. Encuentra el vértice, foco y directriz de la parábola $y = ax^2+bx+c$ en términos de a, b, c.

8. Dos parábolas tienen su foco en el origin y sus vértices en $(1, 0)$ y $(-2, 0)$.
   a) Encuentra las ecuaciones de las parábolas y dibújalas.
   b) Encuentra sus puntos de intersección.
   c) Encuentra las pendientes de sus tangentes en cada uno de los puntos de intersección.

9. Una escalera de 3 m está recargada sobre una pared (que podemos pensar como el eje y). Llama A al extremo superior (que siempre está sobre el eje y) y B al inferior (que siempre está sobre el eje x). Un punto P sobre la escalera a 1 m de A traza una curva al tiempo que la escalera se desliza siempre tocando los ejes. Escribe la ecuación que satisface esta curva. ¿Qué curva es?

10. (Opcional) Sean $P_1 = (-1, 0)$, $P_2 = (0, 1)$ y $P_0 = (a, b)$, con $b \neq 0$.
    a) Encuentra el centro, el radio y la ecuación del círculo que pasa por P_0, P_1, P_2.
    b) Encuentra el lugar geometrico de los puntos P en el plano tal que su razon de distancias a P_1 y P_2 sea lo mismo que para P_0. Es decir, $dist(P, P_1)/dist(P, P_2) = dist(P_0, P_1)/dist(P_0, P_2)$. Demuestra que este lugar geométrico es una circunferencia que pasa por P_0 y encuentra su centro, radio y ecuación.
    c) Demuestra que para cada uno de los dos puntos de intersección de las dos circunferencias de los dos incisos anteriores, las tangentes a las circunferencias son perpendiculares.



    Nota: este ejercicio da un ejemplo de "círculos de Apolonio". Ver más sobre este bonito tema en `https://en.wikipedia.org/wiki/Apollonian_circles` (desafortunadamente la versión en español de este artículo no es sobre el mismo tema).

11. (Opcional) Consideramos la parábola $y = f(x) = x^2 - 2$. Definimos una seria de números $x_1, x_2, \ldots$ de la manera siguiente (los imaginamos como puntos sobre el eje de x): $x_1 = 2$. Luego, definimos a $y_1 = y(x_1) = (x_1)^2-2$. Ahora tomamos la recta tangente a la parábola en $P_1 = (x_1, y_1)$ y la intersectamos con el eje de x. El punto de intersección lo denotamos por $(x_2, 0)$. Y así seguimos, $P_2 = (x_2, y(x_2))$ y $(x_3, 0)$ es la intersección a la recta tangente a la parábola en P_2. Etc.
    a) Encuentra a x_1, x_2, x_3, x_4.
    b) Escribe una fórmula que expresa el término x_{n+1} de la sucesión en términos del término x_n.
    c) Parece que la sucesión (infinita) de los números $x_1, x_2, \ldots$ se acerca cada vez más a un cierto número. ¿Cúal?
    d) Usa el método de los incisos anteriores para encontrar a $\sqrt{3}$ con una precisión de 2 lugares decimales.

    Nota: el método de este problema se llama "el método de Newton."