Guia para el examen parcial num. 2

(Fecha del examen: jueves, 27 abril, 2017)

1. Encuentra la distancia entre los objectos siguientes:
   a) Los puntos $(2,3)$ y $(5,6)$.
   b) El punto $(2,3)$ y la recta $4x+5y=6$.
   c) Las rectas $2x+3y=4$ y $2x+3y=8$.
   d) Las rectas $2x+3y=4$ y $4x+6y=4$.
   e) Las rectas $y=2x+3$ y $y=2x+4$.
   f) La recta $y=2x+3$ y la recta paralela a ella que pasa por $(1,2)$.
   g) El punto $(2,3)$ y el círculo $2x^2+2y^2=1$.
   (O sea, la distancia al punto más cercano de este círculo).
   h) La recta $x+2y=10$ y el círculo $2x^2+2y^2=1$.
   i) El círculo $x^2+y^2+10x+20y=100$ y el círculo $2x^2+2y^2=1$.
2. Encuentra una ecuación para
   a) La recta con pendiente $2/3$ que intersecta al eje de x en el punto $(1,0)$.
   b) La recta con pendiente m que intersecta al eje de x en el punto $(x_0,0)$.
   c) La recta con pendiente m que intersecta al eje de y en el punto $(0,y_0)$.
   d) Las rectas con pendiente $-3/5$ a una distancia 5 del origen $(0,0)$.
   e) Las rectas con pendiente p a una distancia d del origen $(0,0)$.
   f) Las bisectrices de los ángulos formados por las rectas $y=x$, $y=2x$.
   g) La recta tangente al círculo $x^2+y^2=1$ en el punto $(1/3,2\sqrt{2}/3)$.
   h) La recta tangente al círculo $x^2+y^2=1$ en el punto (x_0,y_0) (es decir, $(x_0)^2+(y_0)^2=1$).
   i) Las rectas tangentes al círculo $x^2+y^2=1$ que pasan por $(2,3)$.
   j) Las rectas tangentes al círculo $x^2+y^2=1$ que pasan por un punto (x_1,y_1) fuera del círclo (es decir, $(x_1)^2+(y_1)^2>1$).
   k) La recta tangente al círculo $ax^2+ay^2+bx+cy=1$ en el punto (x_0,y_0) (es decir, (x_0,y_0) satisface $a(x_0)^2+a(y_0)^2+bx_0+cy_0=1$).
   l) El círculo de radio 2 con centro en $(3,4)$.
   m) El círculo que se obtiente del círculo anterior al moverlo 3 unidades a la derecha y 5 abajo, y duplicar su radio.
   n) Las rectas tangentes a ambos círculos de los dos inciso anteriores.
   ñ) (Opcional) El lugar geométrico de los centros de los círculos tangentes a los dos círculos del inciso anterior.
   o) El círculo que pasa por $(-1,0)$, $(1,0)$ con centro sobre la recta $y=x+1$.
   p) El círculo inscrito dentro del triángulo cuyos lados están dados for $y=x, y=2x, x+y=3$.
   q) (Opcional) Los tres círclos tangentes entre sí y a los lados del triángulo del inciso anterior.
   r) El lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos de longitud 2 cuyos extremos están sobre las rectas $x+y=1, x-y=1$.
   s) El lugar geométrico de los puntos $P=(x,y)$ con $y>0$ que son el vértice de un ángulo de 30^0 cuyos lados pasan por $(1,0),(-1,0)$.

t) El círculo tangente al eje de x, de radio 2 y tangente al círculo tangente al eje de x de radio con centro en $(0, 1)$.

u) El círculo tangente al eje de x y tangente a los dos círculos del inciso anterior.

v) El el lugar geométrico de los centros de los círculos tangentes al eje de x y al círculo de radio 1 centrado en $(0, 1)$.

w) El lugar geométrico de los puntos cuya distancia a $(1, 0)$ es 3 veces su distancia a $(-1, 0)$.

x) El lugar geométrico de los puntos cuya suma de cuadrados de distancias a $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ es 3.

3. Encuentra a todas las solucions con números enteros positivos menores que 50 de las ecuaciones (a) $a^2 + b^2 + ab = c^2$, (b) $a^2 + 2b^2 = 3c^2$.

   Sugerencia. Para (a), divide entre c^2 y obtienes la ecuacion $x^2 + y^2 + xy = 1$. Esta es la ecuación de un círculo y el problema consiste en encontrar sus puntos *racionales* (ie, con coordenadas racionales). Para eso, puedes repetir lo que hicimos para las ternas pitagóricas (defines una "proyección estereográfica" desde uno de sus puntos racionales a una recta, eg desde $(1, 0)$ al eje de y). Para (b), haces algo similar (aunque la curva $x^2 + 2y^2 = 3$ no es un círculo). Nota que el punto $(1, 1)$ es racional.