3. Si A, B, C y D son cuatro puntos distintos cualesquiera de una recta dirigida, demostrar que, para todas las ordenaciones posibles de estos puntos sobre la recta, se verifica la igualdad

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AD}.$$

4. Hallar la distancia entre los puntos cuyas coordenadas son: (-5) y (6); (3) y (-7); (-8) y (-12).

5. La distancia entre dos puntos es 9. Si uno de los puntos es (-2), hallar el otro punto. (Dos casos.)

6. En un sistema coordenado lineal, $P_1(x_1)$ y $P_2(x_2)$ son los puntos extremos dados de un segmento dirigido. Demostrar que la coordenada (x) de un punto P que divide a P_1P_2 en la razón dada $r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ es

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \quad r \neq -1.$$

7. Haciendo $r = 1$ en la fórmula obtenida en el ejercicio 6, demostrar que la coordenada del punto medio de un segmento rectilíneo es la media aritmética de las coordenadas de sus puntos extremos.

8. Hallar los puntos de trisección y el punto medio del segmento dirigido cuyos extremos son los puntos (-7) y (-19).

9. Un extremo de un segmento dirigido es el punto (-8) y su punto medio es (3). Hallar la coordenada del otro extremo.

10. Los extremos de un segmento dirigido son los puntos $P_1(4)$ y $P_2(-2)$. Hallar la razón $\overline{P_2P} : \overline{PP_1}$ en que el punto $P(7)$ divide a este segmento.

11. Un cuadrado, de lado igual a $2a$, tiene su centro en el origen y sus lados son paralelos a los ejes coordenados. Hallar las coordenadas de sus cuatro vértices.

12. Tres vértices de un rectángulo son los puntos $(2, -1)$, $(7, -1)$ y $(7, 3)$. Hallar el cuarto vértice y el área del rectángulo.

13. Los vértices de un triángulo rectángulo son los puntos $(1, -2)$, $(4, -2)$, $(4, 2)$. Determinar las longitudes de los catetos, y después calcular el área del triángulo y la longitud de la hipotenusa.

14. En el triángulo rectángulo del ejercicio 13, determinar primero los puntos medios de los catetos y, después, el punto medio de la hipotenusa.

15. Hallar la distancia del origen al punto (a, b).

16. Hallar la distancia entre los puntos $(6, 0)$ y $(0, -8)$.

17. Los vértices de un cuadrilátero son los puntos $(1, 3)$, $(7, 3)$, $(9, 8)$ y $(3, 8)$. Demostrar que el cuadrilátero es un paralelogramo y calcular su área.

18. Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos $(-1, 1)$ y $(3, 1)$. Hallar las coordenadas del tercer vértice. (Dos casos.)

19. Demostrar que los puntos $(-5, 0)$, $(0, 2)$ y $(0, -2)$ son los vértices de un triángulo isósceles, y calcular su área.

20. Demostrar que los puntos $(0, 0)$, $(3, 4)$, $(8, 4)$ y $(5, 0)$ son los vértices de un rombo, y calcular su área.

5. Carácter de la Geometría analítica. La Geometría elemental, conocida ya del lector, se llama Geometría *pura* para distinguirla del presente estudio. Acabamos de ver que por medio de un sistema coordenado es posible obtener una correspondencia biunívoca entre puntos y números reales. Esto, como veremos, nos permitirá aplicar los métodos del Análisis a la Geometría, y de ahí el nombre de *Geometría analítica*. Al ir avanzando en nuestro estudio veremos, por ejemplo, cómo pueden usarse, ventajosamente, los métodos algebraicos en la resolución de problemas geométricos. Recíprocamente, los métodos de la Geometría analítica pueden usarse para obtener una representación geométrica de las ecuaciones y de las relaciones funcionales.

[redacted] de sistema coordenado, que caracteriza a la Geometría analítica, fué introducido por primera vez en 1637 por el matemático francés René Descartes (1596–1650). Por esta razón, la Geometría analítica se conoce también con el nombre de *Geometría cartesiana*. Por la parte que toma en la unificación de las diversas ramas de las matemáticas, la introducción de la Geometría analítica representa uno de los adelantos más importantes en el desarrollo de las matemáticas.

En Geometría pura, el estudiante recordará que, generalmente, era necesario aplicar un método especial o un artificio, a la solución de cada problema; en Geometría analítica, por el contrario, una gran variedad de problemas se pueden resolver muy fácilmente por medio de un procedimiento uniforme asociado con el uso de un sistema coordenado. El estudiante debe tener siempre presente que está siguiendo un curso de Geometría *analítica* y que la solución de un problema geométrico no se ha efectuado por Geometría *analítica* si no se ha empleado un sistema coordenado. Según esto, un buen plan para comenzar la solución de un problema es trazar un sistema de ejes coordenados propiamente designados. Esto es de particular importancia en los primeros pasos de la Geometría analítica, porque un defecto muy común del principiante es que si el problema que trata de resolver se le dificulta, está propenso a caer en los métodos de la Geometría pura. El estudiante deberá hacer un esfuerzo para evitar esta tendencia y para adquirir el método y espíritu analítico lo más pronto [redacted]