PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA

(Traducido del libro de Israel M. Gelfand & Mark Saul, "Trigonometry")

Cap. 5: Medidas de ángulos en Radianes

Notas:

*1. Los ejercicios marcados con * están resueltos en el libro.*

2. Los problemas se resuelven sin calculadora, a menos que se indica explicitamente lo contrario.

5.1. * ¿Cuál es la medida en radianes de un ángulo de 60^0?

5.2. * ¿Cuál es la medida en radianes de un ángulo de 360^0?

5.3. * ¿Cuál es la medida en grados de un ángulo de 1 radian?

5.4. * Calcula $\text{sen}(\pi/6)$.

5.5. * En un círculo de radio 1, ¿cuál es la langitud de un arco determinado por un ángulo cntral de 2 radianes?

5.6. * Un ángulo central en un círculo de radio 2 unidades determina un arco con longitud 4 unidades. ¿Cuál es la medida en radiantes de este ángulo?

5.7. ¿Cuál es la medida en radianes de un ángulo de 180^0? 90^0?

5.8. ¿Cuál es la medida en grados de un ángulo de 2 radianes?

5.9. ¿Cuál es la medida en radianes de un 1/4 de una vuelta?

5.10. ¿Cuál es la medida en radianes de una rotación por 45^0?

5.11. Llena la siguiente tabla

grados	radian
90	
180	
270	
360	
	$\pi/2$
	π
	$3\pi/2$
	2π

5.12. Llena las siguientes tablas

grados	radian
0	
30	
72	
120	
135	
	$\pi/6$
	$\pi/5$
	$\pi/4$
	$\pi/3$
	$2\pi/3$
	$7\pi/10$

grados	radian
198	
210	
225	
240	
	$11\pi/10$
	$10\pi/9$
	$7\pi/6$
	$6\pi/5$
	$5\pi/4$
	$4\pi/3$

5.13. ¿Cuál es la medida en radianes de un ángulo de 1 grado?

5.14. Usando una calculadora, encuentra el seno y coseno de un ángulo de (a) 1 radian (b) 1 grado.

5.15. Llena la siguiente tabla sin calculadora

α (radian)	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$
$\pi/6$		
$\pi/3$		
$\pi/2$		
$2\pi/3$		
$7\pi/6$		
$5\pi/4$		
$3\pi/2$		
$11\pi/6$		

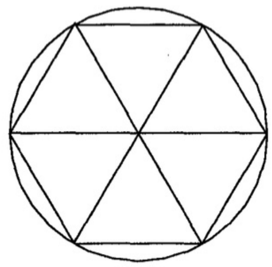
5.16. En un círculo de radio 1, ¿cuál es la langitud de un arco determinado por un ángulo central de 2 radianes? de 3 radianes? de π radianes?

5.17. En un círculo de radio 3, ¿cuál es la langitud de un arco determinado por un ángulo central de 2 radianes? de 3 radianes? de π radianes?

5.18. Si $\operatorname{sen}\pi/9 = \cos\alpha$ y α es agudo (entre 0 y $\pi/2$ radianes), ¿cuál es la medida en radianes de α?

5.19. Si α es un ángulo agudo (entre 0 y $\pi/2$ radianes), ¿cuál es más grande, $\operatorname{sen}\alpha$ o $\cos(\pi/2 - \alpha)$?

5.20. Tomamos una ángulo de 1 radian. Usando el dubujo abajo, demuestra que su medida en grados es menor que 60^0. (De hecho, 1 radian es aproximadamente 57^0).



5.21. * ¿Qué distancia ha viajado una rueda con radio de 1 metro después de dar una vuelta?

5.22. * Una rueda con radio 1 metro da una 1/2 vuelta. ¿Qué distancia ha viajado?

5.23. * ¿Qué distancia ha viajado una rueda con radio de 1 metro a la largo de una línea recta, despue's de dar rotar 2 radianes?

5.24. * ¿Por cúantos radianes ha rotado una rueda con radio de 1 metro, si ha viajado 5 metros a lo largo de una carretera?

5.25. * ¿Por cuánto debe rotar una rueda con radio de 1 metro para viajar 1000 metros en una carretera? Da la respuesra en radianes y en grados.

5.26. * ¿Cuál es la medida en radianes de un ángulo de 1000^0?

5.27. * El seno de 500 radianes es positivo o negativo?

5.28. ¿Por cuántos radianes debe rotar un círculo con radio de 1 metro para viajar 5 metros en una carretera?

5.29. ¿Por cuántos grados debe rotar un círculo con radio de 1 metro para viajar 5 metros en una carretera?

5.30. ¿Qué distancia viaja un círculo con radio de 1 metro después de rotar 4 radianes?

5.31. ¿Qué distancia viaja un círculo con radio de 1 metro después de rotar 120^0?

5.32. En un círculo con radio de 1 metro, ¿cuál es la longitud de un arco determinado por un ángulo central de 1/2 radian? $\pi/2$? α? 15120 grados? ¿Cuál es la medida en grados de un ángulo con medida en radiantes es 12π? 15π? 100π?

5.33. ¿Cuál es la medida en radianes de un ángulo de 720 grados? 1440 grados? 3600 grados?

5.34. En un círculo de radio 3, ¿cuál es la longitud del arco determinado por un ángulo de 1.5 radianes?

5.35. En un círculo de radio 5, ¿cuál es la longutud del arco determinado por un ángulo de 80 grados?

5.36. En un círculo de radio 2, ¿cuál es la medida en radianes de un ángulo central que determina un arco de longitud 3?

5.37. En un círculo de radio 6, ¿cuál es la medida en grados de un ángulo central que determina un arco de longitud 2?

5.38. Un círculo de radio 8 roda a lo largo de una linea recta, rotando por un ángulo de 150 grados. ¿Qué distancia ha viajado?

5.39. ¿Por qué ángulo rota la manecilla de las horas de un reloj en una hora? Da tu respuesta en radianes.

5.40. ¿Por qué ángulo rota la manecilla de los minutos de un reloj en una hora? Y la manecilla de los segundos?

5.41. Respondiendo problema 5.39, Pepito dió la siguiente solución: 1 hora sobre la cara del reloj es 1/12 de un círculo, por lo que son $2\pi/12 = \pi/6$ radianes. En grados, la respuesta es 360/12=30 grados. Pero la respuesta de Pepito es *incorrecta*, tanto en radianes como en grados. Encuentra y corrige el error de Pepito. ¿Has hecho tu el mismo error en este problema y en problemas similares sobre reloj?

Sugerencia: ¿en qué dirección rotan las manos del reloj?

5.42. Consideramos un reloj de bolsillo cuya manecilla de horas mide 1 cm. ¿Cuánto tiempo le toma el punto extremo de esta manecilla viajar 1000 cm?

5.43. Suponemos que la manecilla de las horas del reloj Big Ben (en Londres) mide exactamente 1 metro. ¿Cuanto tiempo le toma a esta manecilla rotar por 1000 radianes?

5.44. Una rueda con radio de 1 metro está rodando a lo largo de una línea recta. Uno de los rayos de la rueda está pintado de rojo. Al inicio, este rayo es vertical, apuntando hacia el suelo. ¿Cuántos radianes la rueda debe rotar para que el rayo vuelva ser vertical, apuntando hacia el cielo?

5.45. Una rueda con radio de 1 metro está rodando a lo largo de una línea recta. La recta está marcada con puntos rojos, separados uno del otro por una distancia de 3 metros. La rueda tiene una mancha de pintura azul fresca. Al incio, la mancha azul toca el suelo, coincidiendo con uno de los puntos rojos. Cuando la rueda está rodando, la mancha deja una marca azul cada vez que toca el suelo.

(a) ¿Cuál es la distancia entre las marcas azules?

(b) ¿Por qué ángulo rota la rueda entre una marca azul y la siguiente?

(c) Si al inicio la marca azul coincide con una marca roja, ¿va a volver a coincidir en algun momento?

(d) ¿Cuándo la marca azul y la roja no coinciden, ¿qué tan cerca pueden ser? (si abes programar, puedes escribir un programa de computadora que responde esta pregunta).

(e) Ahora suponemos que cada intervalo entre dos puntos rojos sucesivos está dividido en 4 sub-segmentos de la misma longitud, digamos por 3 puntos de color rosa. Después de dar

1000 vueltas la rueda deja una marca azul. ¿Entre cuáles dos puntos (de qué color) está esa marca azul?

5.46. Una estudiante usó su calculadora para calcular el seno de 1. La respuestaque dió la calcuadora fue 0.8414709848079. ¿En qué modo estaba la calculadora, radianes o grados?

5.47. Para ángulos pequeños, $\operatorname{sen} x$ es aproximadamente igual a x, si x está dado en radianes. Usa tu calculadora para averiguar qué tan grande es la diferencia entre x y $\operatorname{sen} x$ por ángulos de $0.2, 0.15, 0.05$ radianes. En cada caso, ¿cuál es más grande, x o $\operatorname{sen} x$?

5.48. En escuelas viejas de artilería usaban una versión de la aproximación $\operatorname{sen} x \approx x$. Sin embargo, tenian que medir x en grados, por lo que usaban $\operatorname{sen} x = x/60$. ¿Cuál es el error de esta aproximación para $x = 10^0$? (Da tu respuesta en %. Por ejemplo, 0.11 en lugar de 0.1 es un 10 % de error).

5.49. (a) Adivina sin calculadora el valor de $\operatorname{sen} 0.1$ (en radian). Luego usa una calculadora para checar tu respuesta.

(b) Ahora haz lo mismo para $\operatorname{sen} 0.1^0$ (en grados).

5.50. (a) Encuentra el seno de 1000 grados.

(b) Encuentra el seno de 1000 radianes.

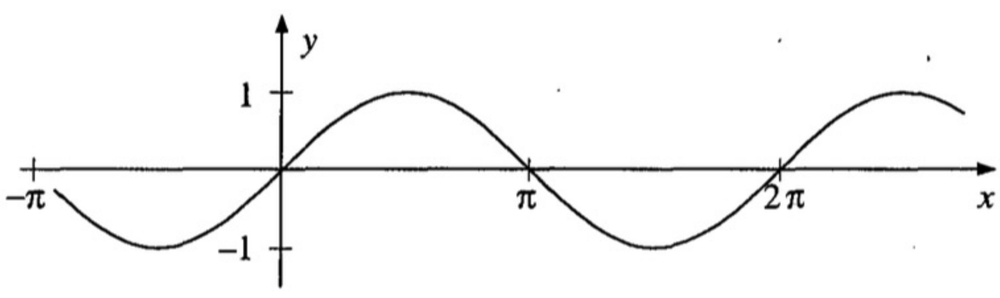
5.51. (a) Encuentra $\operatorname{sen}(\operatorname{sen} 1000)$ (el ángulo está dado en radian).

(b) Encuentra $\operatorname{sen} 3.14$ (el ángulo está dado en radian).

5.52. Sin mirar la calculadora, demuestra que $\cos 1.5707$ es menor que 0.0001 (el ángulo está dado en radian).

Sugerencia: reconoces el número 1.5707?

5.53. Usa la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ para responder las siguientes preguntas. Puedes usar una calculadora para verificar unas respuestas.



(a) ¿El $\operatorname{sen} 7\pi/5$ es positivo o negativo? Estima el valor.

(b) ¿El $\operatorname{sen}(-7\pi/5)$ es positivo o negativo? Estima el valor.

(c) Sabemos que $\operatorname{sen} \pi/6 = 1/2$. Verifica esto en la gráfica. ¿Dónde más la función seno alcanza el valor 1/2?

(d) ¿Para cuáles valores de x es cierto que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \pi/12$? Marca sobre el eje de x todos estos valores de x que puedes encontrar.

(e) ¿Para cuáles valores de x es cierto que $\operatorname{sen} x = 0.8$? Estima un valor de x para lo cual es cierto. Luego ubica sobre el eje de x todos los otros valores de x que puedes encontrar.

5.54. Usa tu calculadora para llenar la siguiente tabla (claramente la enda y 3era columna serán una aproximación.

α (radianes)	α (grados)	$\operatorname{sen} \alpha$
1	57.29578	
0.5		
0.2		
0.1		
0.01		
0.02		
0.001		
0.002		
0.005		

5.55. Sin usar tu calculadora, estima el valor de

$$\operatorname{sen} 0.00123456.$$

Después de haber respondido, usa tu calculadora para averiguar si tu respuesta fue demasiado grande o demasiado pequeña.

5.56. (a) Usa tu calculadora para llenar la siguiente tabla.

α (radianes)	$\alpha - \frac{\alpha^3}{6}$	$\operatorname{sen} \alpha$
1		
0.5		
0.2		
0.05		
0.01		
0.001		

(b) La tabla del inciso (a) muestra que $\operatorname{sen} \alpha$ es aproximadamente $\alpha - \alpha^3/6$, si α es una ángulo pequeño medido en radianes. Encuentra la correspondiente aproximación para $\operatorname{sen} D$, donde D es un ángulo pequeño medido en grados. Tu aproximación debe ser una expresión en la variable D. Después, checa tu aproximación para $D = 1^0$.

5.57. El error en el estimado del problema anterior es simepre menor que $\alpha^5/120$ (α en radian). ¿Cuánto es el error más grande posible si el ángulo esta dado en grados en lugar de radianes?

5.58. Usa tu calculadora para determinar la medida en radian de los ángulos x tales que $x^5/120 < 0.001$.

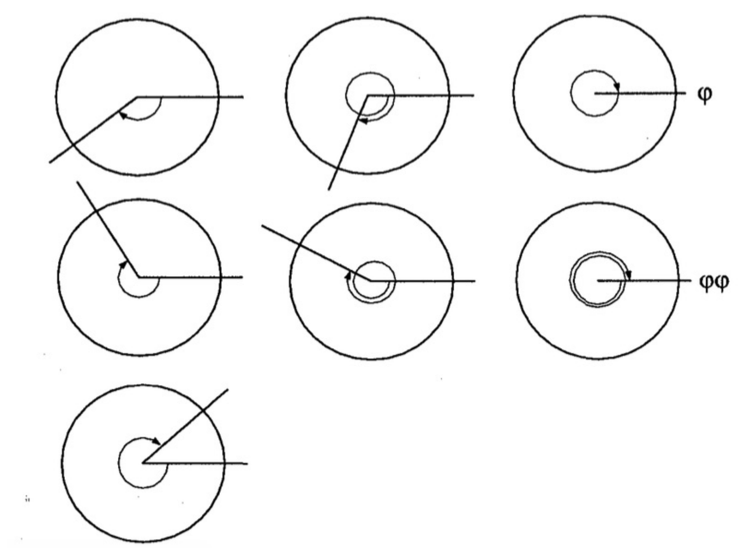
5.59. Hemos discutido en problemas anteriores la aproximación

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{6}$$

que se demuestra en cálculo. ¿Puedes adivinar el siguiente término en esta aproximación?

Si lo puedes hacer, vas a tener una fórmula que da $\operatorname{sen} x$ para valor pequeños de x con más dígitos decimales correctos que pueden mostrar la mayoría de las claculadoras!

5.60. En el año 2096, una nave espacial aterrizó en el planeta tierra, con artefactos provenientes de una distanta civilización extraterrestre. Aquí están algunos diagramas encontrados en la nave:



Unos expertos creen que estos diagramas muestran cómo midieron ángulos. Cuenta lo más que puedes sobre el sistema de medición de ángulos de esta civilización. ¿Qué crees que significa el símbolo φ en esta civilización?

5.61. ¿En qué cuadrante se encuentra cada uno de los siguientes ángulos

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 1000\ \text{(todos esos en radian)},\quad 1000\ \text{grados}.$$

5.62. Si hubieras respondido el problema anterior para todos los ángulos (en radian 1, 2, 3, ..., 100, ¿que fracción de estos ángulos crees que van estar en el cuadrante I? cuadrante II? III? IV?

Solución. Puedes adivinar que aproximadamente 1/4 de los ángulos se encuentra en cada cuadrante – no hay una razón para para "favorizar" un cuadrante en particular. De hecho, esta adivinanza es correcta. Es un caso especial de la importante Teorema Ergódica de matemáticas avanzadas. Si consideras ángulos que miden en radianes 1, 2, 3, . . . , 1000, tu aproximación de un 1/4 para cada cuadrante será aun más precisa.