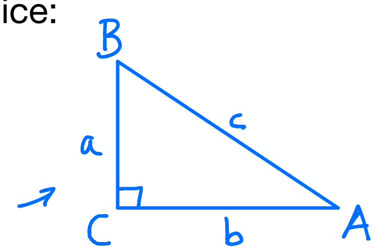
Recuerda.

El Teorema de Pitágoras dice:



$\Rightarrow a^2+b^2=c^2$

Teorema (Parte 1)

Si a y b son las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo, y c es la longitud de la hipotenusa, entonces

$$a^2+b^2=c^2.$$

Teorema (Parte 2)

Si a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo y si $a^2+b^2=c^2$. Entonces el triángulo en cuestión es rectángulo (y el ángulo recto es opuesto al lado que mide c).

4. We have used right triangles with the following sides:

Leg	Leg	Hypotenuse
3	4	5
6	8	10
9	12	15

By continuing this pattern, find three more right triangles with integer sides.

El triángulo con lados 3, 4 y 5 es rectángulo porque $3^2+4^2=5^2$ ✓

Misma pregunta, pero con lados 6, 8 y 10

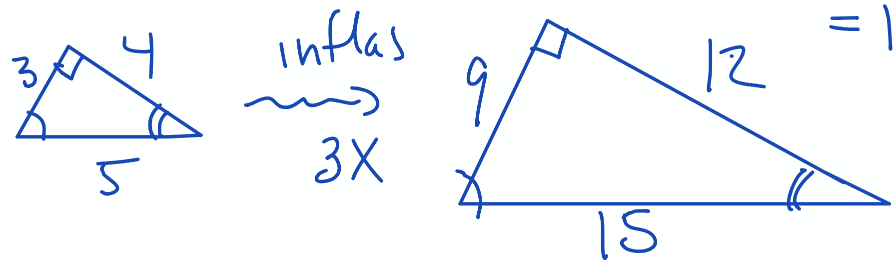
$6^2+8^2=36+64=100=10^2$ ✓ sí.

¿Y 9, 12 y 15?

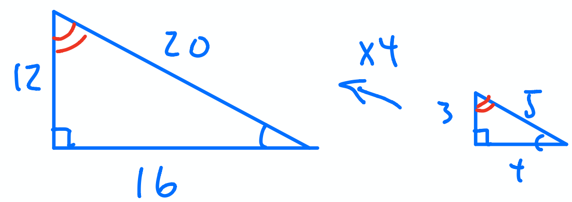
$9^2+12^2=81+144=225=15^2$

$$\boxed{3^2+4^2=5^2}$$

$$(2\cdot 3)^2+(2\cdot 4)^2=2^2\cdot 3^2+2^2\cdot 4^2=2^2(3^2+4^2)$$
$$=2^2\cdot 5^2=(2\cdot 5)^2$$
$$=10^2$$



$$(12, 16, 20) = 4\times\underbrace{(3, 4, 5)}$$



similares

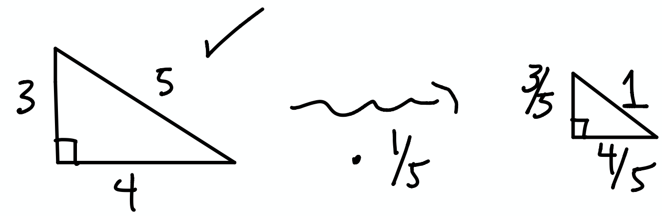
$$12\times(3, 4, 5) = (\underbrace{36, 48, 60}_{\text{es triángulo rectángulo}})$$

$$n\times(3, 4, 5) = (\underset{a}{3n}, \underset{b}{4n}, \underset{c}{5n}) \quad \text{es } \triangle \text{ rectángulo}$$

$$\underset{a^2}{(3n)^2} \underset{+}{+} \underset{b^2}{(4n)^2} = \underline{\underline{9n^2 + 16n^2 = 25n^2}} = \underset{c^2}{(5n)^2}$$

$$(3n)^2 = 3n\cdot 3n = 9n^2$$

6. Exercises 4 and 5 suggest that we can construct one integer-side right triangle from another by multiplying each side by the same number (since the new triangle is *similar* to the old, it is still a right triangle). We can also reverse the process, dividing each side by the same number. Although we won't always get integers, we will always get *rational* numbers. Show that a triangle with sides 3/5, 4/5, and 1 is a right triangle.



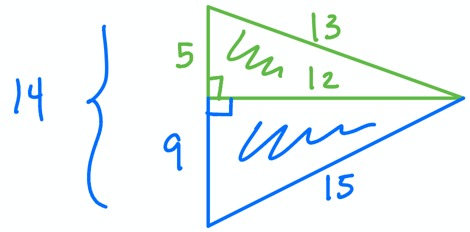
también

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} + \frac{4^2}{5^2} = \frac{3^2+4^2}{5^2} = \frac{5^2}{5^2} = 1 \checkmark$$

7. Using the technique from Exercise 6, start with a 3-4-5 triangle and find a right triangle with rational sides whose shorter leg is 1. Then find a right triangle whose longer leg is 1.

Yo

9. Note that the right triangles with sides equal to 5, 12, 13 and 9, 12, 15 both have a leg equal to 12. Using this fact, find the area of a triangle with sides 13, 14, and 15.



$$A = \frac{14 \cdot 12}{2} = 7 \cdot 12 = 84$$

El Δ de lados 13, 14 y 15 no es rectángulo:

$$13^2 + 14^2 \stackrel{?}{=} 15^2$$

$$169 + 196 \stackrel{?}{=} 225$$

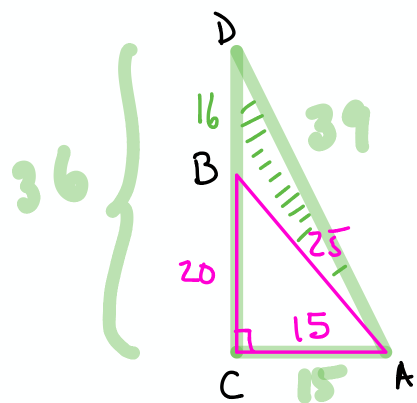
$$>$$

(b) Find the area of a triangle with sides 25, 39, 16.

Tenemos el Δ rectángulo $(15, 20, 25) = 5 \times (3, 4, 5)$

" " Δ rectángulo $(15, 36, 39) = 3 \times (5, 12, 13)$

$$\text{Área}(\Delta ABD) = 270 - 150 = 120$$

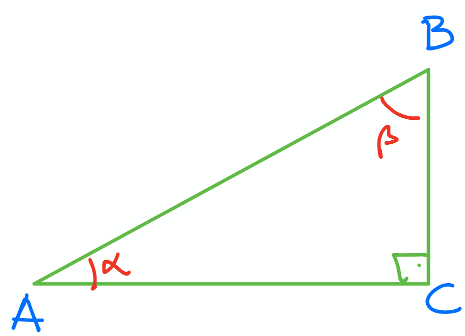


$$\begin{array}{r} 18 \\ \times\ 15 \\ \hline 90 \\ 18 \\ \hline 270 \end{array}$$

$$\text{Área}(\Delta ADC) = \frac{15 \cdot 36}{2} = 15 \cdot 18 = 270$$

$$\text{Área}(\Delta ABC) = \frac{15 \cdot 20}{2} = 15 \cdot 10 = 150$$

Sabemos que en un triángulo rectángulo, los dos ángulos agudos suman $90°$ (recíprocamente, si en un triángulo la suma de 2 ángulos es $90°$ entonces el triángulo es rectángulo -¿por qué?).



$\alpha+\beta=90°$

Por ejemplo: $\alpha=\beta=45° \Rightarrow \Delta ABC$ es Isósceles (¿por qué?)

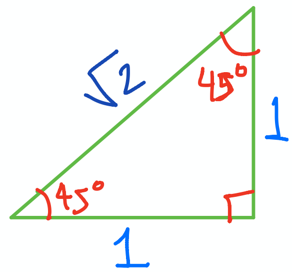
$$\underbrace{\alpha+\alpha}_{2\alpha}=90° \Rightarrow \alpha=\frac{90°}{2}=45°$$

Supón que cada cateto mide 1

$\sqrt{2} < 1.5 \simeq 2 < 2.25$

$1.5 > \sqrt{2} > 1 \iff 2 > 1$

$a > b > 0 \iff a^2 > b^2$



$$1^2 + 1^2 = c^2$$
$$\begin{array}{c} \| \\ 2 \end{array}$$
$$\Rightarrow c = \sqrt{2}$$

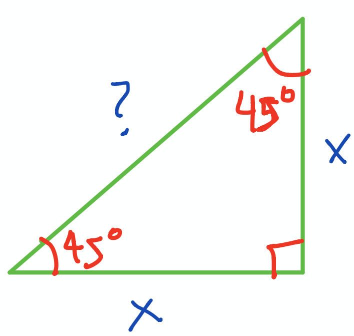
$\sqrt{2} \approx 1.4142\ldots$

$\sqrt{2}$ no es una fracción

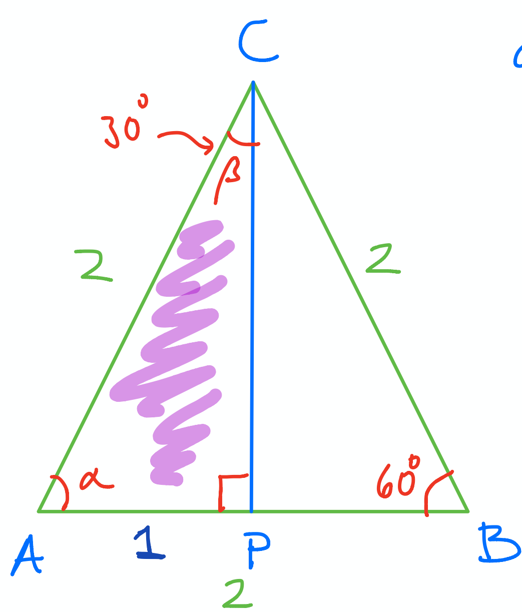
¿Cuánto mide la hipotenusa?

¿Y si los catetos miden 2? ¿O $\frac{1}{2}$?

¿Y si miden x?



Otro triángulo rectángulo "famoso" es el siguiente: mira un triángulo equilátero cuyos lados midan 2



Dibuja la altura por C y sea P el pto. donde corta AB.

P es el punto medio de AB ¿por qué?

El $\triangle APC$ es rectángulo.

El cateto AP mide 1 (¿por qué?)

La hipotenusa AC mide 2

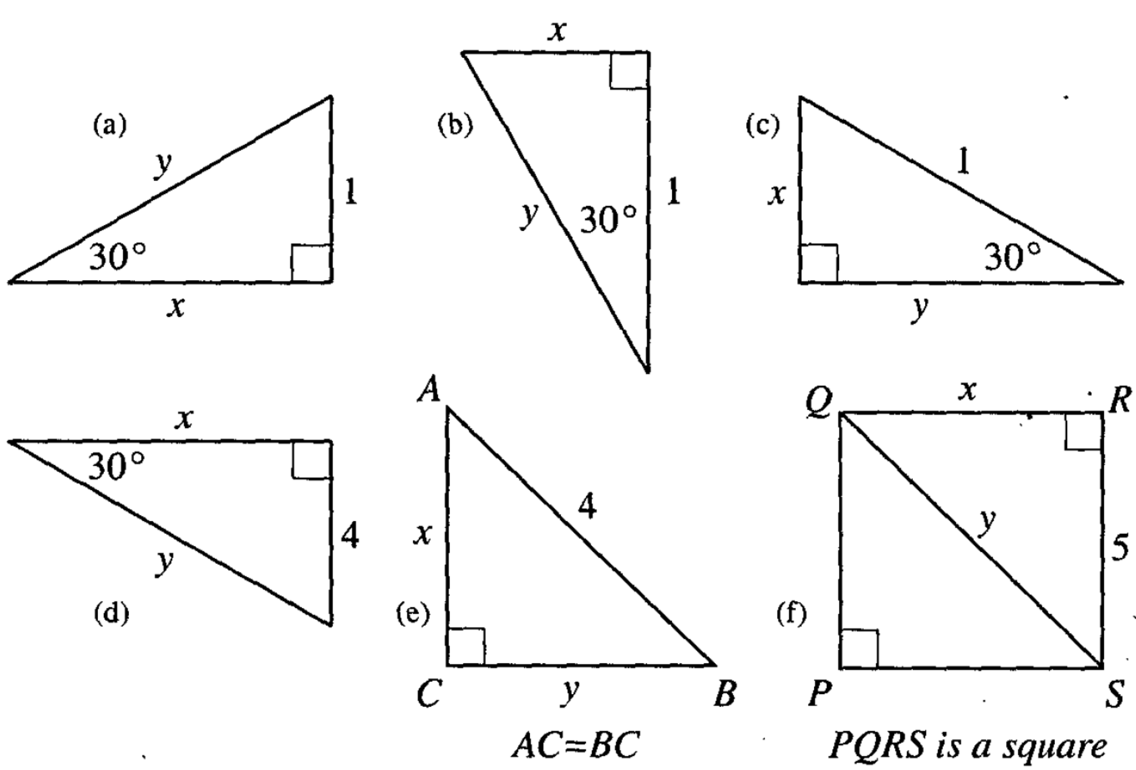
¿Cuánto mide el cateto PC?

¿Cuánto miden los ángulos α y β de este triángulo?

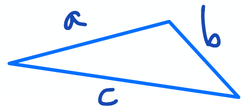
Más ejercicios:

1. Find the length of each leg of an isosceles right triangle whose hypotenuse has length 1. Challenge: Find the length, correct to nine decimal places without using your calculator (but using information contained in the text above!).

2. Calcula x y y:



Examinando la segunda parte del T. de Pitágoras

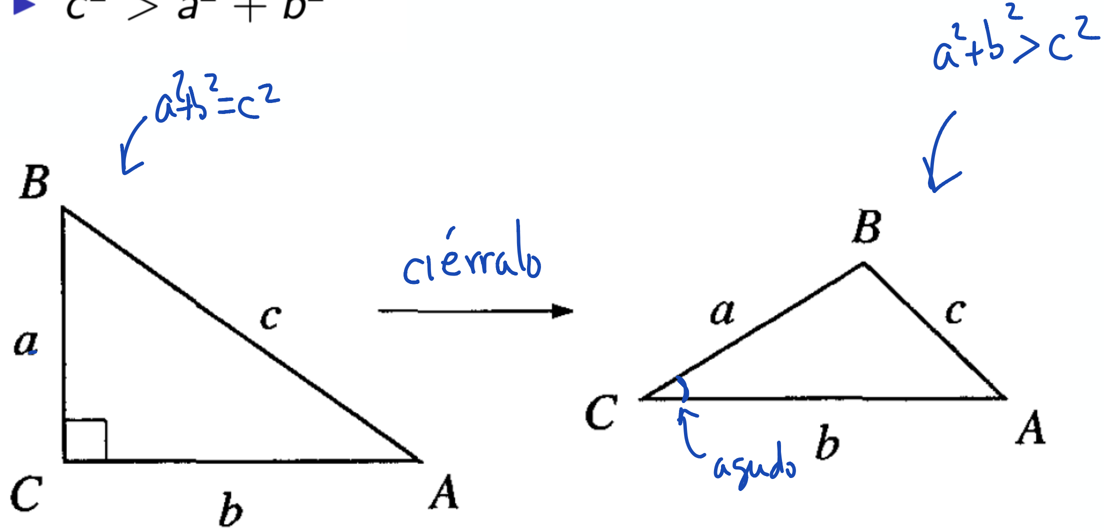


Si en el triángulo $\triangle ABC$, con c el lado más grande, se tiene que $c^2 \neq a^2 + b^2$, entonces sabemos que el triángulo no es rectángulo.

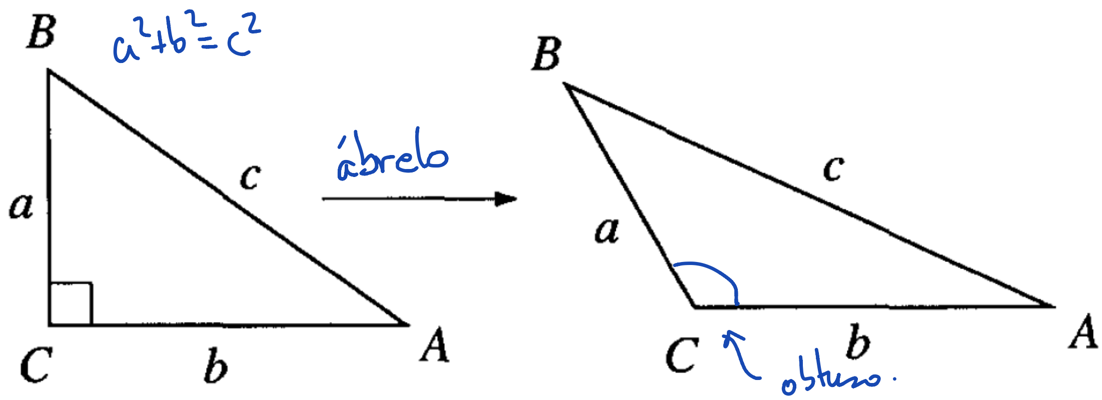
¿Podemos decir más?

Hay dos sopas:

- $c^2 < a^2 + b^2$; y
- $c^2 > a^2 + b^2$



$$c^2 < a^2 + b^2 \iff \text{el ángulo } C \text{ es agudo.}$$



$$c^2 > a^2 + b^2 \iff \text{el ángulo } C \text{ es obtuso.}$$

Ejemplos:

Decide si los triángulos (de lados) {6,8,9} y {6,8,11} son agudos, rectángulos u obtusos.

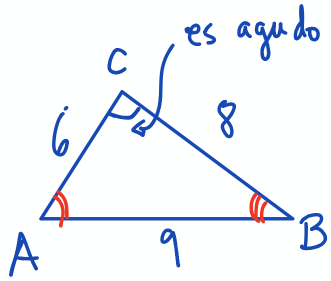
¿Existe un Δ con lados 6, 8 y 9? Sí

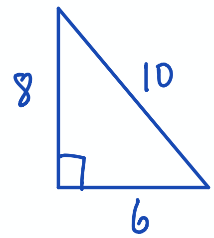
Porque $6+8=14>9$ ✓

$$\underbrace{6^2+8^2}_{36+64} > \underbrace{9^2}_{81}$$

$36+64 = 100$

no es rectángulo





Los ángulos A y B son menores que C porque sus lados opuestos son menores al lado opuesto a C.

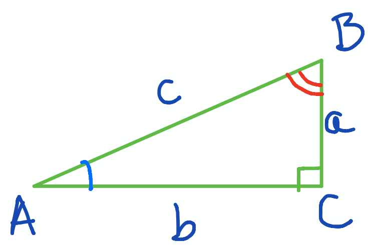
Más ejemplos

1. Is a triangle with side lengths 2, 3, and 4 acute, right or obtuse?

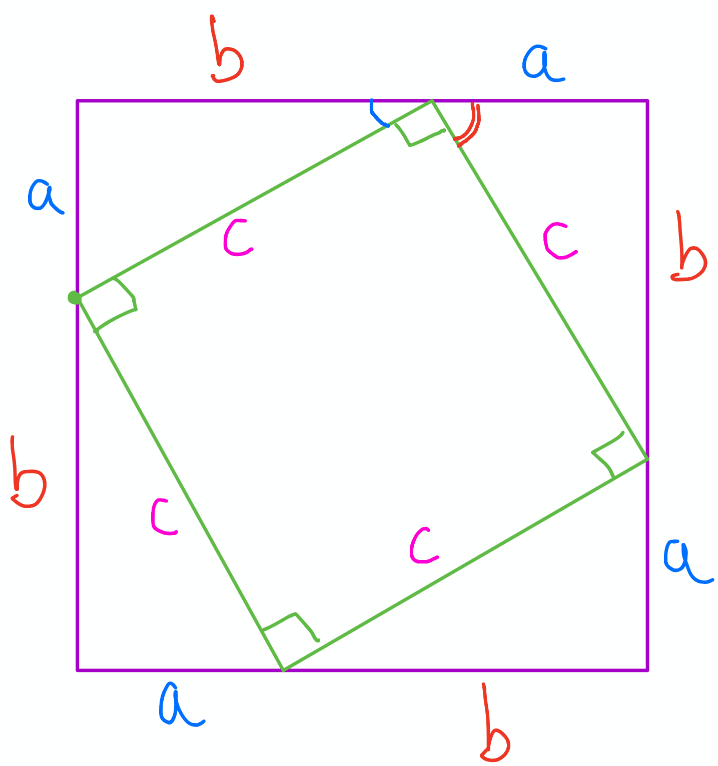
2. Is a triangle with sides 4, 5, 6 acute, right, or obtuse?

3. Is the triangle with side lengths 1, 2, and 3 acute, right, or obtuse?

Demostración del T. de Pitágoras: parte 1



Tenemos el ΔABC
con $C = 90°$.
Queremos probar que
$$c^2 = a^2 + b^2$$



Cada lado del cuadrado morado mide $a+b$

Área del cuadrado morado $= (a+b)^2$

$\|$

Suma de las áreas de los 4 triángulos
y el cuadrado verde

$$\| $$

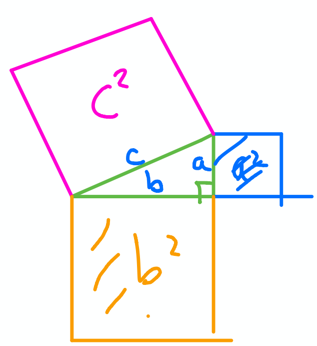
$$\overset{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{ab}{\cancel{2}} + c^2$$

Nos quedó

$$(a+b)^2 = 2\cancel{ab} + c^2$$

$$\|$$

$$a^2 + 2\cancel{ab} + b^2 \Rightarrow \boxed{a^2+b^2=c^2} \quad \blacksquare$$



Demostración del T. de Pitágoras: parte 2

Queremos probar que si nos dan tres números positivos a, b y c con $c^2 = a^2 + b^2$, entonces el triángulo de lados a, b, c tiene un ángulo recto opuesto al lado que mide c.

Lo primero es ver que hay un triángulo de lados a, b, c. Para ello, basta con verificar que la suma de los dos números más pequeños es más que el número mayor.

Como $c^2 = a^2 + b^2 > a^2$, tomando raíz cuadrada (c y a son positivos) vemos que $c > a$. De la misma forma $c > b$. Así que c es el número mayor.

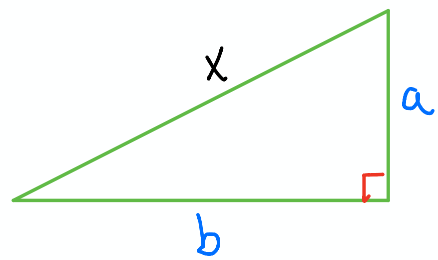
Desigualdad del $\triangle$

Veamos, entonces, que $a + b > c$: elevando al cuadrado

$$(a+b)^2 = \underline{a}^2 + 2ab + \underline{b}^2 = \underline{c}^2 + 2ab > c^2.$$

Así que existe un triángulo con lados a, b, c. Ahora resta probar que es rectángulo.

Mira el triángulo rectángulo cuyos catetos midan a y b. Llama x a la longitud de su hipotenusa.



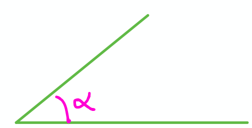
Como el triángulo es rectángulo (ya probamos la Parte 1 del T. de Pitágoras) sabemos que

$$c^2 = a^2 + b^2 = x^2.$$

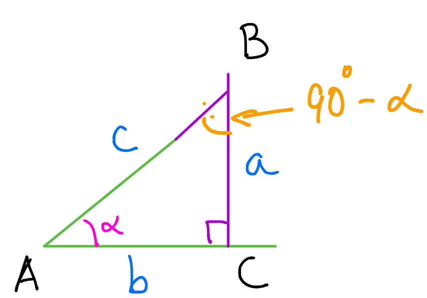
Pero entonces $x^2 = c^2$ y, por ser números positivos, $x = c$. Pero ahora, por el criterio LLL los triángulos $\{a, b, c\}$ y $\{a, b, x\}$ son congruentes, así que el ángulo C es recto. $\square$

Razones trigonométricas en un triángulo

Comienza con un ángulo agudo α



Complétalo (como quieras) a un triángulo rectángulo

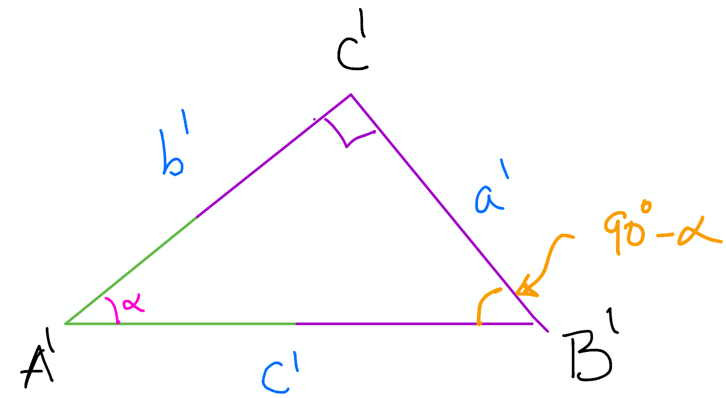


Definición: el seno de α, $\operatorname{sen}\alpha$, es el número

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c}}$$

Esto es, $\operatorname{sen}\alpha$ es la razón del cateto opuesto a α y la hipotenusa.

Ojo: pudimos haber "metido" α de manera distinta en un triángulo rectángulo. Por ejemplo



y entonces $\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{a'}{c'}$

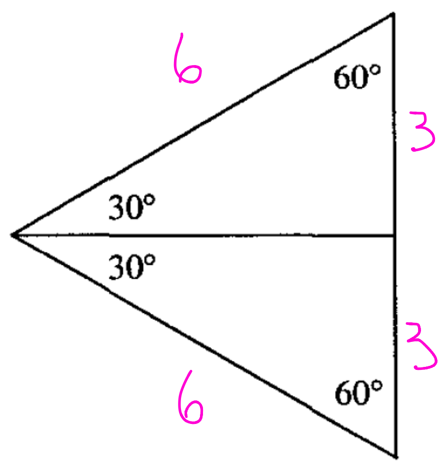
Pero el resultado no cambiará.

Los dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ serán similares: ambos tienen exactamente los mismos ángulos (¿por qué?). Así que existe un número $k > 0$ tal que

$$a = k\,a'$$
$$b = k\,b'$$
$$c = k\,c'$$

Y entonces $\boxed{\dfrac{a}{c} = \dfrac{\cancel{k}a'}{\cancel{k}c'} = \dfrac{a'}{c'}}$

Ejemplo: calcula $\operatorname{sen} 30^\circ$



Recuerda que los Δ's rectángulos con un ángulo de 30° se obtienen como "la mitad" de un Δ equilátero.

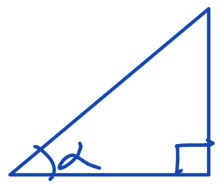
Digamos que escoges el Δ equilátero de lado 6

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

¿Puede suceder que $\operatorname{sen}\alpha > 1$?

No.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} < 1$$

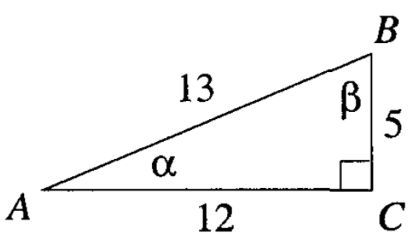


porque los catetos siempre son más cortos que la hipotenusa.

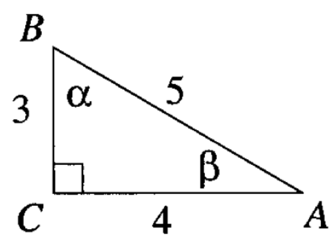
Ejercicio: calcula sen 45°

1. In each diagram below, what is the value of $\sin \alpha$?

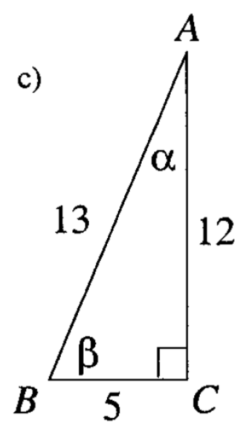
a)



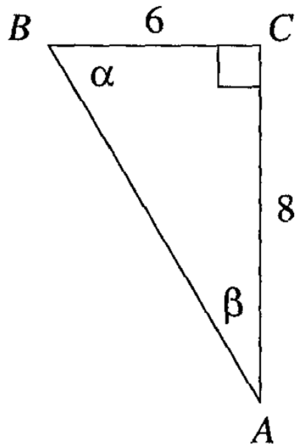
b)



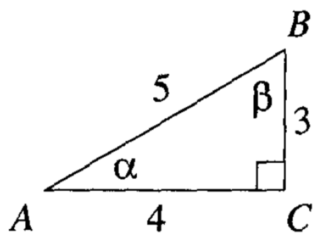
c)



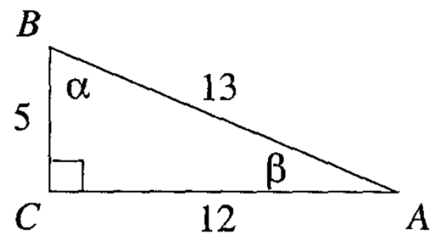
d)



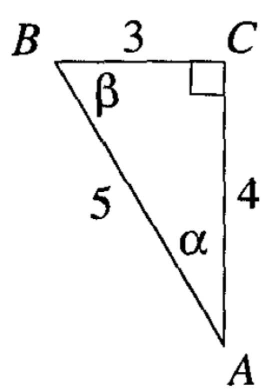
e)



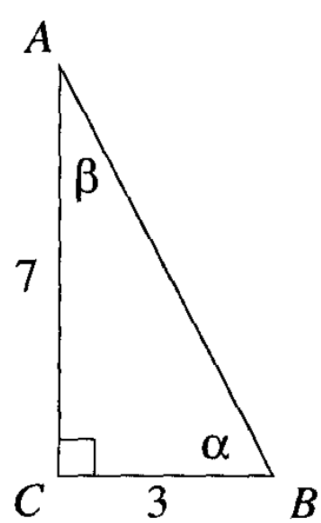
f)



g)



h)



2. In each of the diagrams above, find $\sin \beta$.

3. In the following list, cross off each number which is less than the sine of 60°. Then check your work with a calculator.

0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9

.01 .04 .09 .16 .25 .36 .49 .64 .81

$\text{Sen}\, 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx .87\ldots$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} = .75$