CAPÍTULO 1 Límites

1.1 Introducción a límites

Los temas estudiados en el capítulo anterior son parte de lo que se denomina *precálculo*. Proporcionan los fundamentos para el cálculo, pero no son cálculo. Ahora estamos listos para una nueva idea importante, la noción de *límite*. Ésta es la idea que distingue al cálculo de otras ramas de las matemáticas. De hecho, podríamos definir cálculo de esta manera:

El cálculo es el estudio de los límites.

Problemas que conducen al concepto de límite El concepto de **límite** es primordial para muchos problemas en física, ingeniería y ciencias sociales. Básicamente, la pregunta es ésta: ¿qué le pasa con la función $f(x)$ cuando x se acerca a alguna constante c? Existen variaciones de este tema, pero la idea básica es la misma en muchas circunstancias.

Suponga que cuando un objeto se mueve de forma constante hacia adelante conocemos su posición en cualquier momento. Denotamos la posición en el instante t por $s(t)$. ¿Qué tan rápido se está moviendo el objeto en el instante $t = 1$? Podemos utilizar la fórmula "distancias iguales a tiempos iguales" para determinar la rapidez (tasa de cambio de la posición) en cualquier intervalo de tiempo; en otras palabras

$$\text{rapidez} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

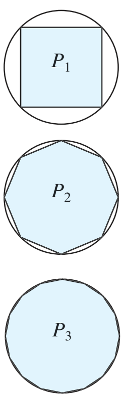


Figura 1

A esto le llamamos la rapidez "promedio" en el intervalo, ya que sin importar qué tan pequeño sea el intervalo, nunca sabemos si la rapidez es constante en este intervalo. Por ejemplo, en el intervalo [1, 2], la rapidez promedio es $\frac{s(2) - s(1)}{2 - 1}$; en el intervalo [1, 1.2], la rapidez promedio es $\frac{s(1.2) - s(1)}{1.2 - 1}$; en el intervalo [1, 1.02], la rapidez promedio es $\frac{s(1.02) - s(1)}{1.02 - 1}$, etcétera ¿Qué tan rápido viaja el objeto en el instante $t = 1$? Para dar significado a esta rapidez "instantánea" debemos hablar acerca del *límite* de la rapidez promedio en intervalos cada vez más pequeños.

Podemos determinar áreas de rectángulos y triángulos por medio de fórmulas de geometría; pero, ¿qué hay de regiones con fronteras curvas, como un círculo? Arquímedes tuvo esta idea hace más de dos mil años. Imagine polígonos regulares inscritos en un círculo, como se muestra en la figura 1. Arquímedes determinó el área de un polígono regular con n lados, y tomando el polígono cada vez con más lados fue capaz de aproximar el área de un círculo a cualquier nivel de precisión. En otras palabras, el área del círculo es el *límite* de las áreas de los polígonos inscritos cuando n (el número de lados del polígono) aumenta tanto como se quiera.

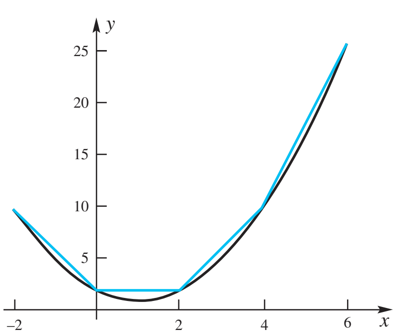


Figura 2

Considere la gráfica de la función $y = f(x)$, para $a \leq x \leq b$. Si la gráfica es una línea recta, la longitud de la curva es fácil de determinar mediante la fórmula de la distancia. Sin embargo, ¿qué sucede si la gráfica es curvada? Podemos determinar una gran cantidad de puntos a lo largo de la curva y conectarlos con segmentos de recta, como se muestra en la figura 2. Si sumamos las longitudes de estos segmentos de recta, debemos obtener una suma que es aproximadamente la longitud de la curva. De hecho, por "longitud de la curva" queremos decir el *límite* de la suma de las longitudes de estos segmentos de recta, cuando el número de éstos aumenta tanto como se desee.

Los últimos tres párrafos describen situaciones que conducen al concepto de *límite*. Existen muchos otros y los estudiaremos a lo largo del texto. Iniciamos con una explicación intuitiva de límites. La definición precisa se da en la siguiente sección.

Una noción intuitiva Considere la función definida por

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Observe que no está definida en $x = 1$, ya que en este punto $f(x)$ tiene la forma $\frac{0}{0}$, que carece de significado. Sin embargo, aún podemos preguntarnos qué le está sucediendo a $f(x)$ cuando x se aproxima a 1. Con mayor precisión, ¿cuando x se aproxima a 1, $f(x)$ se está aproximando a algún número específico? Para obtener la respuesta podemos hacer tres cosas: calcular algunos valores de $f(x)$ para x cercana a 1; mostrar estos valores en un diagrama esquemático, y bosquejar la gráfica de $y = f(x)$. Todo esto se ha hecho y los resultados se muestran en la figura 3.

x	$y = \frac{x^3-1}{x-1}$
1.25	3.813
1.1	3.310
1.01	3.030
1.001	3.003
↓	↓
1.000	?
↑	↑
0.999	2.997
0.99	2.970
0.9	2.710
0.75	2.313

Tabla
de valores

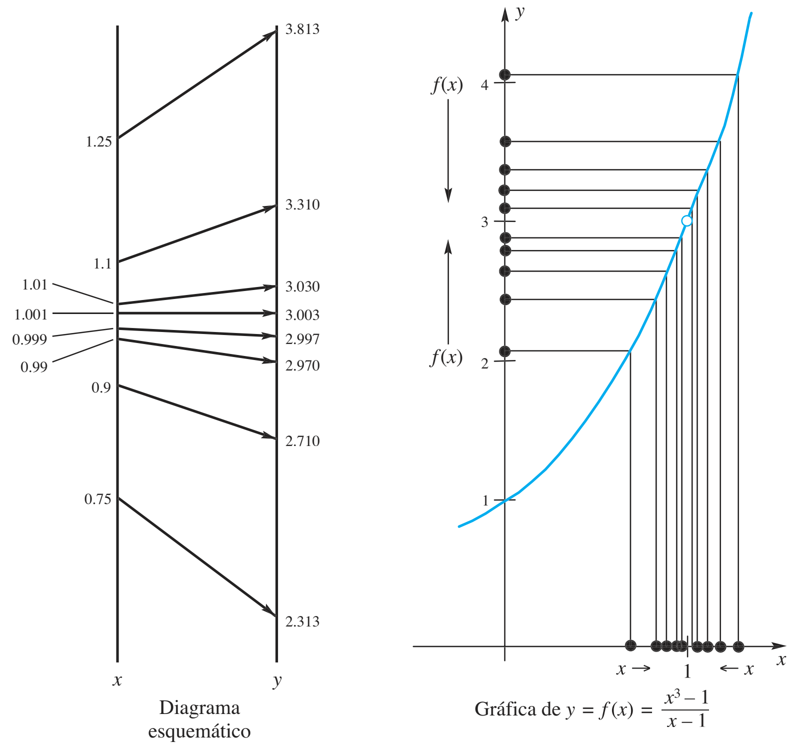


Figura 3

Toda la información que hemos reunido parece apuntar a la misma conclusión: $f(x)$ se aproxima a 3 cuando x se aproxima a 1. En símbolos matemáticos, escribimos

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

Esto se lee "el límite de $(x^3 - 1)/(x - 1)$ cuando x tiende a 1 es 3".

Como buenos algebristas (es decir, conociendo cómo se factoriza una diferencia de cubos), podemos proporcionar más y mejor evidencia,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3\end{aligned}$$

Observe que $(x - 1)/(x - 1) = 1$ siempre que $x \neq 1$. Esto justifica el segundo paso. El tercer paso parece razonable; pero posteriormente se hará una justificación rigurosa.

Para asegurarnos de que estamos en el camino correcto, necesitamos tener una clara comprensión del significado de la palabra *límite*. A continuación haremos nuestro primer intento de una definición.

Definición Significado intuitivo de límite

Decir que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ significa que cuando x está cerca pero diferente de c, entonces $f(x)$ está cerca de L.

Obsérvese que no pedimos nada *en* c. Incluso, la función no necesita estar definida en c, como no lo estaba en el ejemplo $f(x) = (x^3 - 1)/(x - 1)$ recién considerado. La noción de límite está asociada con el comportamiento de una función cuando x está *cerca* de c, pero no *en* c.

Seguramente, un lector cauto, objetará nuestro uso de la palabra *cerca*. ¿Qué significa *cerca*? ¿Qué tan cerca es cerca? Para precisar respuestas, tendrá que estudiar la siguiente sección; no obstante, algunos ejemplos más le ayudarán a aclarar la idea.

Más ejemplos Nuestro primer ejemplo es casi trivial aunque no menos importante.

EJEMPLO 1 Determine $\lim_{x \to 3} (4x - 5)$.

SOLUCIÓN Cuando x está cerca de 3, $4x - 5$ está cerca de $4 \cdot 3 - 5 = 7$. Escribimos

$$\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$$

■

EJEMPLO 2 Encuentre $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$.

SOLUCIÓN Observe que $(x^2 - x - 6)/(x - 3)$ no está definida en $x = 3$, pero todo está bien. Para tener una idea de lo que está sucediendo cuando x se aproxima a 3, podríamos emplear una calculadora para evaluar la expresión dada; por ejemplo, en 3.1, 3.01, 3.001, etcétera. Pero es mucho mejor utilizar un poco de álgebra para simplificar el problema.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x + 2)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x + 2) = 3 + 2 = 5$$

La cancelación de $x - 3$ en el segundo paso es válida ya que la definición de límite ignora el comportamiento *en* $x = 3$. Recuerde, $\dfrac{x - 3}{x - 3} = 1$ siempre que x no sea igual a 3. ■

x	$\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
1.0	0.84147
0.1	0.99833
0.01	0.99998
↓	↓
0	?
↑	↑
−0.01	0.99998
−0.1	0.99833
−1.0	0.84147

Figura 4

EJEMPLO 3 Determine $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

SOLUCIÓN Ningún truco algebraico simplificará nuestra tarea; ciertamente, no podemos cancelar las x. Una calculadora nos ayudará a tener una idea del límite. Utilice su propia calculadora (en modo de radianes) para verificar los valores en la tabla de la figura 4. La figura 5 muestra una gráfica de $y = (\operatorname{sen} x)/x$. Nuestra conclusión, aunque admitimos que es poco firme, es que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Daremos una demostración rigurosa en la sección 1.4. ■

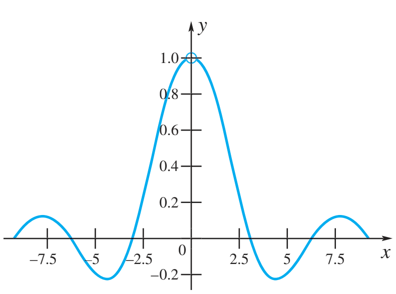


Figura 5

Algunas señales de alerta Las cosas no son tan sencillas como parecen. Las calculadoras podrían engañarnos, así como nuestra intuición. Los ejemplos que siguen sugieren algunas dificultades posibles.

x	$x^2 - \frac{\cos x}{10,000}$
± 1	0.99995
± 0.5	0.24991
± 0.1	0.00990
± 0.01	0.000000005
$\downarrow$	$\downarrow$
0	?

Figura 6

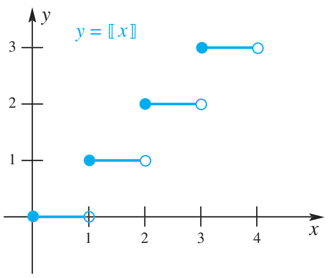


Figura 7

EJEMPLO 4 **(Su calculadora puede engañarlo).** Determine $\lim_{x\to 0}\left[x^2 - \frac{\cos x}{10,000}\right]$.

SOLUCIÓN Siguiendo el procedimiento utilizado en el ejemplo 3, construimos la tabla de valores que se muestra en la figura 6. La conclusión que sugiere es que el límite deseado es 0. Pero esto es incorrecto. Si recordamos la gráfica de $y = \cos x$, nos damos cuenta de que $\cos x$ se aproxima a 1 cuando x tiende a 0. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}\left[x^2 - \frac{\cos x}{10,000}\right] = 0^2 - \frac{1}{10,000} = -\frac{1}{10,000}$$ ■

EJEMPLO 5 **(No hay límite en un salto).** Determine $\lim_{x\to 2}[\![x]\!]$.

SOLUCIÓN Recuerde que $[\![x]\!]$ denota al entero más grande que es menor o igual a x (véase la sección 0.5). La gráfica de $y = [\![x]\!]$ se muestra en la figura 7. Para todos los números x menores a 2, pero cercanos a 2, $[\![x]\!] = 1$, pero para todos los números x mayores que 2, pero cercanos a 2, $[\![x]\!] = 2$. ¿Está $[\![x]\!]$ cerca de un solo número L cuando x está cerca de 2? No. No importa qué número propongamos para L, habrá x arbitrariamente cercanas a 2 a cada lado, donde $[\![x]\!]$ difiere de L en al menos $\frac{1}{2}$. Nuestra conclusión es que $\lim_{x\to 2}[\![x]\!]$ no existe. Si usted verifica lo anterior, verá que no hemos afirmado que todo límite que podamos escribir deba existir. ■

EJEMPLO 6 **(Demasiadas oscilaciones).** Determine $\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}(1/x)$.

SOLUCIÓN Este ejemplo plantea la interrogante más sutil acerca de límites que hayamos manifestado hasta el momento. Ya que no queremos hacer larga la historia, le pedimos que haga dos cosas. Primera, escoja una sucesión de valores para x que se aproxime a 0. Utilice su calculadora para evaluar $\operatorname{sen}(1/x)$ en estas x. A menos que corra con mucha suerte, sus valores oscilarán de manera desordenada.

x	$\operatorname{sen}\frac{1}{x}$
$2/\pi$	1
$2/(2\pi)$	0
$2/(3\pi)$	−1
$2/(4\pi)$	0
$2/(5\pi)$	1
$2/(6\pi)$	0
$2/(7\pi)$	−1
$2/(8\pi)$	0
$2/(9\pi)$	1
$2/(10\pi)$	0
$2/(11\pi)$	−1
$2/(12\pi)$	0
$\downarrow$	$\downarrow$
0	?

Figura 8

Segunda, intente construir la gráfica de $y = \operatorname{sen}(1/x)$. Nadie hará esto muy bien, pero la tabla de valores en la figura 8 da una buena pista acerca de lo que está sucediendo. En cualquier vecindad alrededor del origen, la gráfica oscila de arriba abajo entre −1 y 1 un número infinito de veces (véase la figura 9). Claramente, $\operatorname{sen}(1/x)$ no está cerca de un solo número L, cuando x está cerca de cero. Concluimos que $\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}(1/x)$ no existe. ■

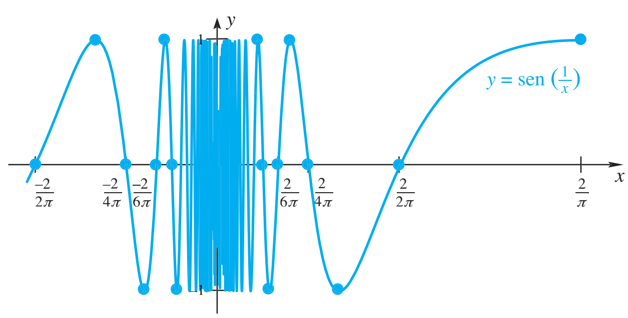


Figura 9

Límites laterales Cuando una función da un salto (como lo hace $[\![x]\!]$ en cada entero en el ejemplo 5), entonces el límite no existe en los puntos de salto. Para tales funciones, se introduce el concepto de **límites laterales**. El símbolo $x \to c^+$ significa que x se aproxima a c por la derecha, y $x \to c^-$ significa que x se aproxima a c por la izquierda.

Definición Límites por la derecha y por la izquierda

Decir que $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ significa que cuando x está cerca pero a la derecha de c, entonces $f(x)$ está cerca de L. De manera análoga, decir que $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ significa que cuando x está cerca pero a la izquierda de c, entonces $f(x)$ está cerca de L.

Por lo tanto, mientras que $\lim_{x\to 2} [\![x]\!]$ no existe, es correcto escribir (véase la gráfica en la figura 7)

$$\lim_{x\to 2^-} [\![x]\!] = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} [\![x]\!] = 2$$

Creemos que usted encontrará muy razonable el siguiente teorema.

Teorema A

$\lim_{x\to c} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$.

La figura 10 debe darle una comprensión adicional. Dos de los límites no existen, aunque todos, excepto uno de los límites unilaterales, existen.

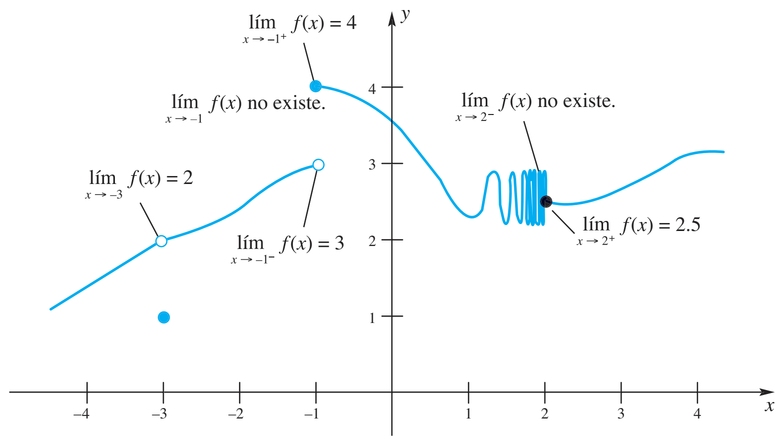


Figura 10

Revisión de conceptos

1. $\lim_{x\to c} f(x) = L$ significa que $f(x)$ está cerca de _____, cuando x está suficientemente cerca (pero es diferente) de _____.

2. Sea $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ donde $f(3)$ está indeterminada. Sin embargo, $\lim_{x\to 3} f(x) =$ _____.

3. $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ significa que $f(x)$ está cerca de _____ cuando x se aproxima a c por la _____.

4. Si $\lim_{x\to c^-} f(x) = M$ y $\lim_{x\to c^+} f(x) = M$, entonces _____.

Conjunto de problemas 1.1

En los problemas del 1 al 6 determine el límite que se indica.

1. $\lim_{x\to 3} (x - 5)$

2. $\lim_{t\to -1} (1 - 2t)$

3. $\lim_{x\to -2} (x^2 + 2x - 1)$

4. $\lim_{x\to -2} (x^2 + 2t - 1)$

5. $\lim_{t\to -1} (t^2 - 1)$

6. $\lim_{t\to -1} (t^2 - x^2)$

En los problemas del 7 al 18 determine el límite que se indica. En la mayoría de los casos, es buena idea usar primero un poco de álgebra (véase el ejemplo 2).

7. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

8. $\lim_{t\to -7} \dfrac{t^2 + 4t - 21}{t + 7}$

9. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x + 1}$

10. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^4 + 2x^3 - x^2}{x^2}$

11. $\lim_{x\to -t} \dfrac{x^2 - t^2}{x + t}$

12. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

13. $\lim_{t\to 2} \dfrac{\sqrt{(t + 4)(t - 2)^4}}{(3t - 6)^2}$

14. $\lim_{t\to 7^+} \dfrac{\sqrt{(t - 7)^3}}{t - 7}$

15. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^4 - 18x^2 + 81}{(x - 3)^2}$

16. $\lim_{u\to 1} \dfrac{(3u + 4)(2u - 2)^3}{(u - 1)^2}$

17. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(2 + h)^2 - 4}{h}$

18. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$

GC *En los problemas del 19 al 28 utilice una calculadora para encontrar el límite indicado. Utilice una calculadora gráfica para trazar la función cerca del punto límite.*

19. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2x}$

20. $\lim_{t\to 0} \dfrac{1 - \cos t}{2t}$

21. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(x - \operatorname{sen} x)^2}{x^2}$

22. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1 - \cos x)^2}{x^2}$

23. $\lim_{t\to 1} \dfrac{t^2 - 1}{\operatorname{sen}(t - 1)}$

24. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x - \operatorname{sen}(x - 3) - 3}{x - 3}$

25. $\lim_{x\to \pi} \dfrac{1 + \operatorname{sen}(x - 3\pi/2)}{x - \pi}$

26. $\lim_{t\to 0} \dfrac{1 - \cot t}{1/t}$

27. $\lim_{x\to \pi/4} \dfrac{(x - \pi/4)^2}{(\tan x - 1)^2}$

28. $\lim_{u\to \pi/2} \dfrac{2 - 2 \operatorname{sen} u}{3u}$

29. Para la función f que se grafica en la figura 11 determine el límite que se indica o el valor de la función, o establezca que el límite o el valor de la función no existe.

(a) $\lim_{x\to -3} f(x)$ (b) $f(-3)$ (c) $f(-1)$

(d) $\lim_{x\to -1} f(x)$ (e) $f(1)$ (f) $\lim_{x\to 1} f(x)$

(g) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ (h) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ (i) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$

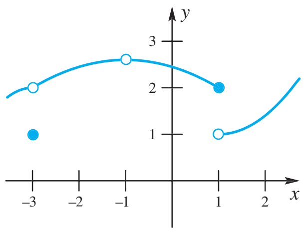


Figura 11

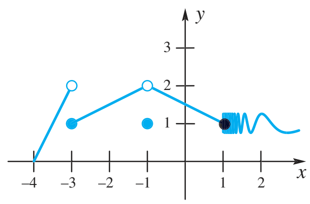


Figura 12

30. Siga las instrucciones del problema 29 para la función que se grafica en la figura 12.

31. Para la función que se grafica en la figura 13 determine el límite que se indica o el valor de la función, o bien, indique que no existe.

(a) $f(-3)$ (b) $f(3)$ (c) $\lim_{x\to -3^-} f(x)$

(d) $\lim_{x\to -3^+} f(x)$ (e) $\lim_{x\to -3} f(x)$ (f) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

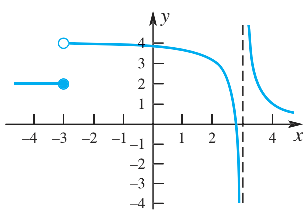


Figura 13

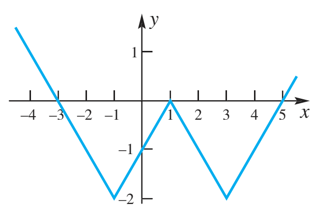


Figura 14

32. Para la función que se grafica en la figura 14 determine el límite que se indica o el valor de la función, o indique que no existe.

(a) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to -1} f(x)$

(d) $f(-1)$ (e) $\lim_{x\to 1} f(x)$ (f) $f(1)$

33. Bosqueje la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 + x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Luego determine cada uno de los siguientes o establezca que no existen.

(a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 1} f(x)$

(c) $f(1)$ (d) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

34. Bosqueje la gráfica de

$$g(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 5 - x^2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Después determine cada uno de los siguientes o establezca que no existen.

(a) $\lim_{x\to 1} g(x)$ (b) $g(1)$

(c) $\lim_{x\to 2} g(x)$ (d) $\lim_{x\to 2^+} g(x)$

35. Bosqueje la gráfica de $f(x) = x - [\![x]\!]$; luego encuentre cada uno de los siguientes o establezca que no existen.

(a) $f(0)$ (b) $\lim_{x\to 0} f(x)$

(c) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (d) $\lim_{x\to 1/2} f(x)$

36. Siga las instrucciones del problema 35 para $f(x) = x/|x|$.

37. Determine $\lim_{x\to 1}(x^2 - 1)/|x - 1|$ o establezca que no existe.

38. Evalúe $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{2}\right)/x$. *Sugerencia:* racionalice el numerador multiplicando el numerador y el denominador por $\sqrt{x+2} + \sqrt{2}$.

39. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional} \\ -x & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Determine cada valor, si es posible.

(a) $\lim_{x\to 1} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0} f(x)$

40. Bosqueje, como mejor pueda, la gráfica de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes.

(a) Su dominio es el intervalo $[0, 4]$.

(b) $f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 1$

(c) $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ (d) $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$

(e) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$ (f) $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 1$

41. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional} \\ x^4 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

¿Para qué valores de a existe $\lim_{x\to a} f(x)$?

42. La función $f(x) = x^2$ ha sido cuidadosamente graficada, pero durante la noche un visitante misterioso cambió los valores de f en un millón de lugares diferentes. ¿Esto afecta al valor de $\lim_{x\to a} f(x)$ en alguna a? Explique.

43. Determine cada uno de los siguientes límites o establezca que no existen.

(a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{x-1}$ (b) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

(c) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{x^2 - |x-1| - 1}{|x-1|}$ (d) $\lim_{x\to 1^-} \left[\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{|x-1|}\right]$

44. Determine cada uno de los siguientes límites o establezca que no existen.

(a) $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x - [\![x]\!]}$ (b) $\lim_{x\to 0^+} [\![1/x]\!]$

(c) $\lim_{x\to 0^+} x(-1)^{[\![1/x]\!]}$ (d) $\lim_{x\to 0^+} [\![x]\!](-1)^{[\![1/x]\!]}$

45. Determine cada uno de los siguientes límites o establezca que no existen.

(a) $\lim_{x\to 0^+} x[\![1/x]\!]$ (b) $\lim_{x\to 0^+} x^2[\![1/x]\!]$

(c) $\lim_{x\to 3^-} ([\![x]\!] + [\![-x]\!])$ (d) $\lim_{x\to 3^+} ([\![x]\!] + [\![-x]\!])$

46. Determine cada uno de los siguientes límites o establezca que no existen.

(a) $\lim_{x\to 3} [\![x]\!]/x$ (b) $\lim_{x\to 0^+} [\![x]\!]/x$

(c) $\lim_{x\to 1.8} [\![x]\!]$ (d) $\lim_{x\to 1.8} [\![x]\!]/x$

CAS *Muchos paquetes de software tienen programas para calcular límites, aunque usted debe ser cuidadoso porque no son infalibles. Para adquirir confianza en su programa, utilícelo para volver a calcular algunos límites en los problemas del 1 al 28. Después para cada uno de los siguientes determine el límite o establezca que no existe.*

47. $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}$ **48.** $\lim_{x\to 0^+} x^x$

49. $\lim_{x\to 0} \sqrt{|x|}$ **50.** $\lim_{x\to 0} |x|^x$

51. $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} 2x)/4x$

52. $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} 5x)/3x$

53. $\lim_{x\to 0}\cos(1/x)$

54. $\lim_{x\to 0} x\cos(1/x)$

55. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\sqrt{2x+2}-2}$

56. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen}(x^2)}$

57. $\lim_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-x-2}{|x-2|}$

58. $\lim_{x\to 1^+}\dfrac{2}{1+2^{1/(x-1)}}$

CAS **59.** Como los paquetes de software para cálculo encuentran $\lim_{x\to a} f(x)$ por medio de un muestreo de algunos valores de $f(x)$ para x cerca de a, pueden estar equivocados. Determine una función f para la que $\lim_{x\to 0} f(x)$ no exista, pero por la que su software obtenga un valor para el límite.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $L; c$ **2.** 6 **3.** L; derecha **4.** $\lim_{x\to c} f(x) = M$

1.2 Estudio riguroso (formal) de límites

En la sección anterior dimos una definición informal de *límite*. A continuación damos otra ligeramente mejor, pero todavía informal, reformulando esa definición. Decir que $\lim_{x\to c} f(x) = L$ significa que $f(x)$ puede hacerse tan cercana como se desee a L siempre que x sea suficientemente cercana, pero no igual a c. El primer ejemplo ilustra este punto.

EJEMPLO 1 Utilice la gráfica de $y = f(x) = 3x^2$ para determinar qué tan cercana debe estar x de 2 para garantizar que $f(x)$ esté a no menos de 0.05 de 12.

SOLUCIÓN Para que $f(x)$ esté a menos de 0.05 de 12, debemos tener $11.95 < f(x) < 12.05$. En la figura 1 se dibujaron las rectas $y = 11.95$ y $y = 12.05$. Si despejamos x de $y = 3x^2$, obtenemos $x = \sqrt{y/3}$. Por lo tanto, $f\left(\sqrt{11.95/3}\right) = 11.95$ y $f\left(\sqrt{12.05/3}\right) = 12.05$. La figura 1 indica que si $\sqrt{11.95/3} < x < \sqrt{12.05/3}$ entonces $f(x)$ satisface $11.95 < f(x) < 12.05$. Este intervalo para x es aproximadamente $1.99583 < x < 2.00416$. De los dos extremos de este intervalo, el más cercano a 2 es el superior, 2.00416, y se encuentra a 0.00416 de 2. Por lo tanto, si x está a menos de 0.00416 de 2, entonces $f(x)$ está a menos de 0.05 de 12. ■

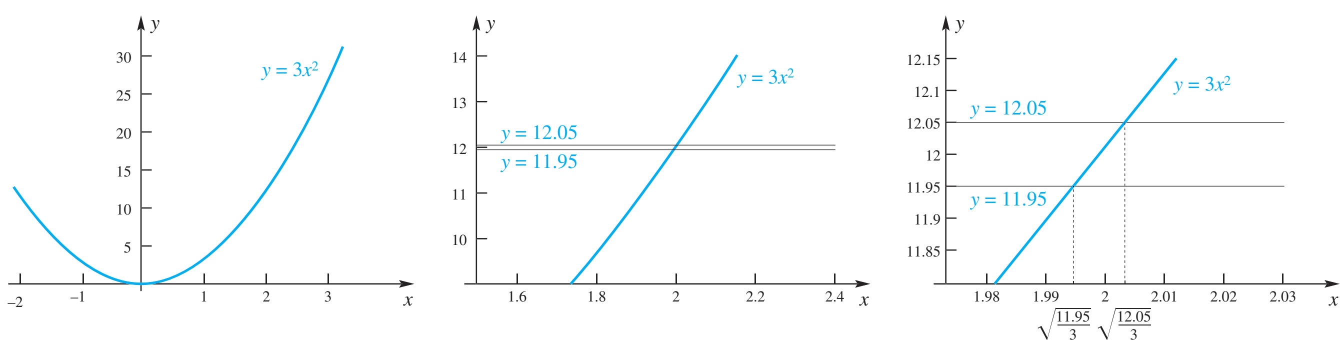


Figura 1

El valor absoluto como distancia

Considere dos puntos a y b en la recta numérica. ¿Cuál es la distancia entre ellos? Si $a < b$, entonces $b - a$ es la distancia; pero si $b < a$, entonces la distancia es $a - b$. Podemos combinar estos enunciados en uno y decir que la distancia es $|b - a|$. Esta interpretación geométrica del valor absoluto de una diferencia, como la distancia entre dos puntos en una recta numérica, es importante en la comprensión de nuestra definición del límite.

Si ahora preguntamos qué tan cerca debe estar x de 2 para garantizar que $f(x)$ esté a menos de 0.01 de 12, la solución seguiría las mismas líneas y determinaríamos que x tendría que estar en un intervalo más pequeño al que se obtuvo anteriormente. Si queremos que $f(x)$ esté a menos de 0.001 de 12, necesitaríamos un intervalo que fuese aún más angosto. En este ejemplo, parece plausible que no importa cuán cercano queramos que $f(x)$ esté de 12, podemos realizar esto tomando x suficientemente cercana a 2.

Ahora precisamos la definición de límite.

Precisando la definición Seguimos la tradición al utilizar las letras griegas ε (épsilon) y δ (delta) para representar números positivos arbitrarios (por lo regular pequeños).

Decir que $f(x)$ difiere de L en menos que ε, significa que $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, o de forma equivalente, $|f(x) - L| < \varepsilon$. Esto significa que $f(x)$ se encuentra en el intervalo abierto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, como se muestra en la gráfica de la figura 2.

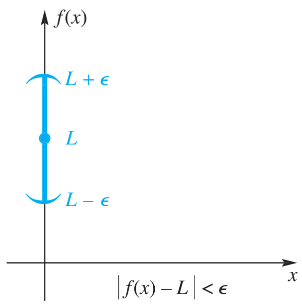


Figura 2

Ahora, decir que x está suficientemente cerca pero diferente de c es decir que, para alguna δ, x pertenece al intervalo abierto $(c - \delta, c + \delta)$, con c eliminado de éste. Tal vez la mejor forma de decir esto es escribir

$$0 < |x - c| < \delta$$

Obsérvese que $|x - c| < \delta$ describiría al intervalo $c - \delta < x < c + \delta$, mientras que $0 < |x - c|$ requiere que se excluya $x = c$. El intervalo que estamos describiendo se muestra en la figura 3.

Ahora estamos preparados para lo que algunas personas han denominado la definición más importante del cálculo.

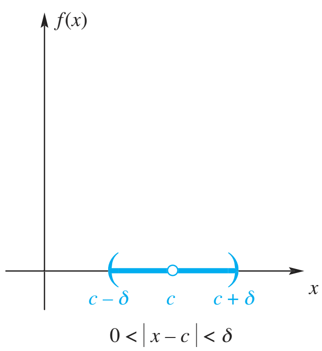


Figura 3

Definición Significado preciso de límite

Decir que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ significa que para cada $\varepsilon > 0$ dada (no importa qué tan pequeña) existe una correspondiente $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, siempre que $0 < |x - c| < \delta$; esto es,

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Las gráficas de la figura 4 pueden ayudarle a comprender esta definición.

Debemos recalcar que el número real ε se debe dar *primero*; el número δ debe producirse y por lo regular depende de ε. Supóngase que David desea demostrar a Emilia que $\lim_{x \to c} f(x) = L$. Emilia puede retar a David con cualquier ε particular que

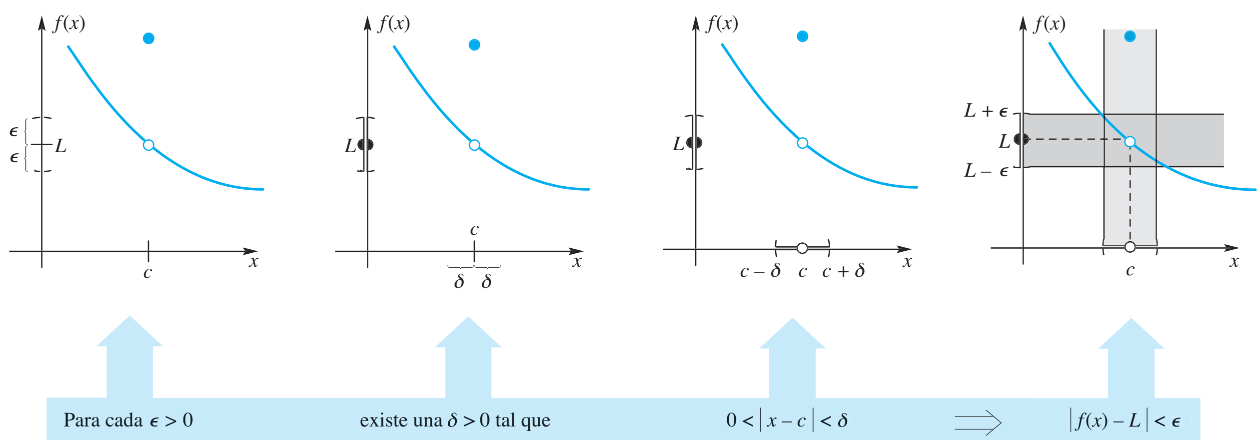


Figura 4

ella elija (por ejemplo, $\varepsilon = 0.01$) y pedir a David que obtenga una δ correspondiente. Apliquemos el razonamiento de David al límite $\lim_{x \to 3}(2x + 1)$. Por inspección, David conjeturaría que el límite es 7. Ahora, ¿podrá David determinar una δ tal que $|(2x + 1) - 7| < 0.01$ siempre que $0 < |x - 3| < \delta$? Un poco de álgebra muestra que

$$|(2x + 1) - 7| < 0.01 \Leftrightarrow 2|x - 3| < 0.01$$

$$\Leftrightarrow |x - 3| < \frac{0.01}{2}$$

Por lo tanto, la respuesta a la pregunta es ¡sí! David puede elegir $\delta = 0.01/2$ (o cualquier valor más pequeño) y esto garantizará que $|(2x + 1) - 7| < 0.01$ siempre que $0 < |x - 3| < 0.01/2$. En otras palabras, David puede hacer que $2x + 1$ esté a menos de 0.01 de 7, siempre que x esté a menos de 0.01/2 de 3.

Ahora, supóngase que Emilia reta a David de nueva cuenta, pero esta vez ella quiere que $|(2x + 1) - 7| < 0.000002$. ¿Podrá encontrar David una δ para este valor de ε? Siguiendo el razonamiento usado anteriormente,

$$\begin{aligned} |(2x+1)-7| < 0.000002 &\Leftrightarrow 2|x-3| < 0.000002 \\ &\Leftrightarrow |x-3| < \frac{0.000002}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $|(2x + 1) - 7| < 0.000002$ siempre que $|x - 3| < 0.000002/2$.

Esta clase de razonamiento, aunque podría convencer un poco, no es una prueba de que el límite sea 7. La definición dice que debe ser capaz de encontrar una δ para *toda* $\varepsilon > 0$ (no para *alguna* ε). Emilia podría retar continuamente a David, pero ambos nunca *demostrarían* que el límite es 7. David debe ser capaz de obtener una δ para *toda* ε positiva (sin importar qué tan pequeña sea).

David opta por tomar las cosas en sus manos y propone que ε sea cualquier número real positivo. Entonces sigue el mismo razonamiento como antes, pero esta vez utiliza ε en lugar de 0.000002.

$$\begin{aligned} |(2x+1)-7| < \varepsilon &\Leftrightarrow 2|x-3| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

David puede elegir $\delta = \varepsilon/2$ y se deduce que $|(2x + 1) - 7| < \varepsilon$ siempre que $|x - 3| < \varepsilon/2$. En otras palabras, puede hacer que $2x + 1$ esté a menos de ε de 7 siempre que x esté a menos de $\varepsilon/2$ de 3. Ahora David tiene los requerimientos de la definición de límite y por lo tanto ha verificado que el límite es 7, como lo sospechaba.

> **¿Dos límites distintos?**
>
> Una pregunta natural es: "¿una función puede tener dos límites distintos en c?". La respuesta intuitiva obvia es no. Si una función se aproxima cada vez más a L, cuando $x \to c$, no puede acercarse también cada vez más a un número diferente M. En el problema 23 se le pide que demuestre esto de manera rigurosa.

Algunas demostraciones de límites En cada uno de los siguientes ejemplos empezamos con lo que denominamos un análisis preliminar. Lo incluimos para que nuestra elección de δ, en cada prueba, no parezca sugerir una increíble perspicacia de nuestra parte. Muestra la clase de trabajo que usted necesita hacer en borrador para determinar la ruta correcta a lo largo de la prueba. Una vez que usted sienta que comprende un ejemplo, véalo otra vez, pero oculte el análisis preliminar y note qué elegante, aunque misteriosa, parece ser la prueba.

EJEMPLO 2 Demuestre que $\lim_{x \to 4} (3x - 7) = 5$.

ANÁLISIS PRELIMINAR Sea ε cualquier número positivo. Debemos producir una $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-4| < \delta \Rightarrow |(3x-7)-5| < \varepsilon$$

Considere la desigualdad de la derecha

$$\begin{aligned} |(3x-7)-5| < \varepsilon &\Leftrightarrow |3x-12| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |3(x-4)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |3||(x-4)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x-4| < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Ahora vemos cómo elegir δ; esto es, $\delta = \varepsilon/3$. Por supuesto, cualquier δ más pequeña funcionaría.

DEMOSTRACIÓN FORMAL Sea $\varepsilon > 0$ dada. Seleccione $\delta = \varepsilon/3$. Entonces $0 < |x - 4| < \delta$ implica que

$$|(3x-7)-5| = |3x-12| = |3(x-4)| = 3|x-4| < 3\delta = \varepsilon$$

Si usted lee esta cadena de igualdades y una desigualdad, de izquierda a derecha, y utiliza las propiedades transitivas de = y <, usted ve que

$$|(3x-7)-5| < \varepsilon$$

Ahora David conoce una regla para elegir el valor de δ dada en el reto de Emilia. Si Emilia hubiera retado a David con $\varepsilon = 0.01$, entonces David respondería con $\delta = 0.01/3$. Si Emilia dijese $\varepsilon = 0.000003$, entonces David diría $\delta = 0.000001$. Si él diese un valor más pequeño para δ, también estaría bien.

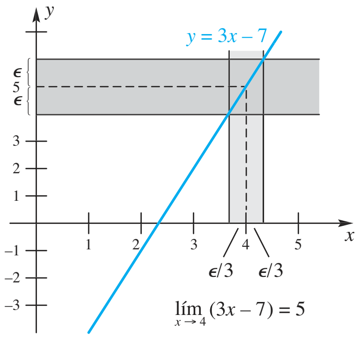


Figura 5

Por supuesto, si considera la gráfica de $y = 3x - 7$ (una recta con pendiente 3, como en la figura 5), sabe que para forzar a que $3x - 7$ esté cerca de 5 tendría que hacer a x aún más próximo a 4 (más cercano por un factor de un tercio). ■

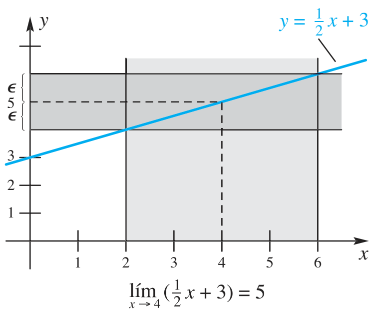


Figura 6

Mire la figura 6 y convénzase de que $\delta = 2\varepsilon$ sería una elección apropiada para δ en la demostración de que $\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 5$.

EJEMPLO 3 Demuestre que $\lim_{x\to 2}\dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5$.

ANÁLISIS PRELIMINAR Estamos buscando una δ tal que

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow \left|\frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5\right| < \varepsilon$$

Ahora, para $x \neq 2$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5\right| < \varepsilon &\Leftrightarrow \left|\frac{(2x + 1)(x - 2)}{x - 2} - 5\right| < \varepsilon\\ &\Leftrightarrow \quad |(2x + 1) - 5| < \varepsilon\\ &\Leftrightarrow \quad |2(x - 2)| < \varepsilon\\ &\Leftrightarrow \quad |2||x - 2| < \varepsilon\\ &\Leftrightarrow \quad |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Esto indica que $\delta = \varepsilon/2$ funcionará (véase la figura 7)

DEMOSTRACIÓN FORMAL Sea $\varepsilon > 0$ dada. Elegimos $\delta = \varepsilon/2$. Entonces $0 < |x - 2| < \delta$ implica que

$$\begin{aligned}\left|\frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5\right| &= \left|\frac{(2x + 1)(x - 2)}{x - 2} - 5\right| = |2x + 1 - 5|\\ &= |2(x - 2)| = 2|x - 2| < 2\delta = \varepsilon\end{aligned}$$

La cancelación del factor $x - 2$ es válida porque $0 < |x - 2|$ implica que $x \neq 2$, y $\dfrac{x - 2}{x - 2} = 1$ siempre que $x \neq 2$. ■

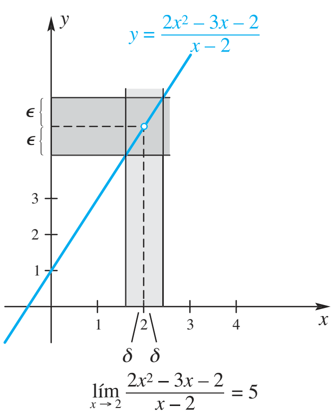


Figura 7

EJEMPLO 4 Demuestre que $\lim_{x\to c}(mx + b) = mc + b$.

ANÁLISIS PRELIMINAR Queremos encontrar una δ tal que

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |(mx + b) - (mc + b)| < \varepsilon$$

Ahora

$$|(mx + b) - (mc + b)| = |mx - mc| = |m(x - c)| = |m||x - c|$$

Parece que $\delta = \varepsilon/|m|$ funciona, con tal que $m \neq 0$. (Observe que m podría ser positiva o negativa, así que necesitamos conservar las barras de valor absoluto. Del capítulo 0 recuerde que $|ab| = |a||b|$).

DEMOSTRACIÓN FORMAL Sea $\varepsilon > 0$ dada. Elegimos $\delta = \varepsilon/|m|$. Entonces $0 < |x - c| < \delta$ implica que

$$|(mx + b) - (mc + b)| = |mx - mc| = |m||x - c| < |m|\delta = \varepsilon$$

Y en caso de que $m = 0$, cualquier δ funcionará bien ya que

$$|(0x + b) - (0c + b)| = |0| = 0$$

Esto último es menor que ε para toda x. ■

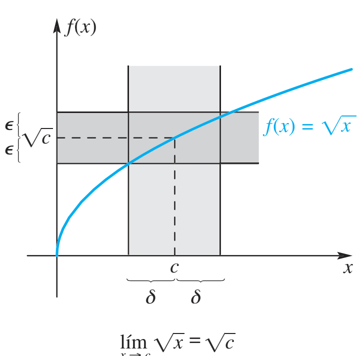


Figura 8

EJEMPLO 5 Demuestre que si $c > 0$ entonces $\lim_{x\to c}\sqrt{x} = \sqrt{c}$.

ANÁLISIS PRELIMINAR Con respecto a la figura 8, debemos determinar una δ tal que

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{c}| < \varepsilon$$

Ahora

$$\begin{aligned} |\sqrt{x} - \sqrt{c}| &= \left| \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{c})(\sqrt{x} + \sqrt{c})}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \right| = \left| \frac{x - c}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \right| \\ &= \frac{|x - c|}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \leq \frac{|x - c|}{\sqrt{c}} \end{aligned}$$

Para hacer lo último menor que ε se requiere que tengamos $|x - c| < \varepsilon\sqrt{c}$.

Demostración formal Sea $\varepsilon > 0$ dada. Elegimos a $\delta = \varepsilon\sqrt{c}$. Entonces $0 < |x - c| < \delta$ implica que

$$\begin{aligned} |\sqrt{x} - \sqrt{c}| &= \left| \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{c})(\sqrt{x} + \sqrt{c})}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \right| = \left| \frac{x - c}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \right| \\ &= \frac{|x - c|}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \leq \frac{|x - c|}{\sqrt{c}} < \frac{\delta}{\sqrt{c}} = \varepsilon \end{aligned}$$

Aquí hay un punto técnico. Empezamos con $c > 0$, pero podría suceder que c esté muy cercano a 0 sobre el eje x. Deberíamos insistir en que $\delta \leq c$, para que entonces $|x - c| < \delta$ implique que $x > 0$, de modo que $\sqrt{x}$ esté definida. Así, para un rigor absoluto, elegimos δ como el más pequeño entre c y $\varepsilon\sqrt{c}$. ■

Nuestra demostración en el ejemplo 5 depende de la *racionalización del numerador*, un truco que con frecuencia es útil en cálculo.

EJEMPLO 6 Demuestre que $\lim_{x \to 3} (x^2 + x - 5) = 7$.

Análisis preliminar Nuestra tarea es encontrar una δ tal que

$$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |(x^2 + x - 5) - 7| < \varepsilon$$

Ahora

$$|(x^2 + x - 5) - 7| = |x^2 + x - 12| = |x + 4||x - 3|$$

El factor $|x - 3|$ puede hacerse tan pequeño como queramos y sabemos que $|x + 4|$ estará alrededor de 7. Por lo tanto, buscamos una cota superior para $|x + 4|$. Para hacer esto, primero convenimos en hacer $\delta \leq 1$. Entonces $|x - 3| < \delta$ implica que

$$\begin{aligned} |x + 4| &= |x - 3 + 7| \\ &\leq |x - 3| + |7| \qquad \text{(desigualdad del triángulo)} \\ &< 1 + 7 = 8 \end{aligned}$$

(La figura 9 ofrece una demostración alternativa de este hecho). Si también requerimos que $\delta \leq \varepsilon/8$, entonces el producto $|x + 4||x - 3|$ será menor que ε.

$$\begin{aligned} |x-3| < 1 &\Rightarrow 2 < x < 4 \\ &\Rightarrow 6 < x+4 < 8 \\ &\Rightarrow |x+4| < 8 \end{aligned}$$

Figura 9

Demostración formal Sea $\varepsilon > 0$ dada. Elegimos a $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/8\}$; esto es, elegimos a δ como el más pequeño entre 1 y $\varepsilon/8$. Entonces $0 < |x - 3| < \delta$ implica que

$$|(x^2 + x - 5) - 7| = |x^2 + x - 12| = |x + 4||x - 3| < 8 \cdot \frac{\varepsilon}{8} = \varepsilon$$ ■

EJEMPLO 7 Demuestre que $\lim_{x \to c} x^2 = c^2$.

Demostración Reproducimos la demostración en el ejemplo 6. Sea $\varepsilon > 0$ dada. Elegimos como $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/(1 + 2|c|)\}$. Entonces $0 < |x - c| < \delta$ implica que

$$\begin{aligned} |x^2 - c^2| &= |x + c||x - c| = |x - c + 2c||x - c| \\ &\leq (|x - c| + 2|c|)|x - c| \qquad \text{(Desigualdad del triángulo)} \\ &< (1 + 2|c|)|x - c| < \frac{(1 + 2|c|) \cdot \varepsilon}{1 + 2|c|} = \varepsilon \end{aligned}$$ ■

Aunque parezca increíblemente perspicaz, en el ejemplo 7 no sacamos a δ "de la manga". Simplemente, esta vez no le mostramos el análisis preliminar.

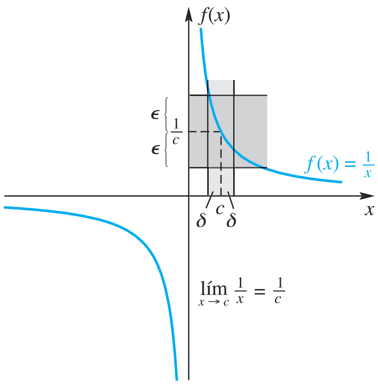


Figura 10

EJEMPLO 8 Demuestre que $\lim_{x\to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$, $c \neq 0$.

ANÁLISIS PRELIMINAR Estudie la figura 10. Debemos determinar una δ tal que

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| < \varepsilon$$

Ahora

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| = \left|\frac{c-x}{xc}\right| = \frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{|c|}\cdot|x-c|$$

El factor $1/|x|$ es problemático, en especial si x está cerca de cero. Podemos acotar este factor si podemos mantener a x alejado de 0. Con ese fin, observe que

$$|c| = |c - x + x| \leq |c - x| + |x|$$

de modo que

$$|x| \geq |c| - |x - c|$$

Por lo tanto, si elegimos $\delta \leq |c|/2$, tenemos éxito en hacer $|x| \geq |c|/2$. Por último, si también pedimos que $\delta \leq \varepsilon c^2/2$, entonces

$$\frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{|c|}\cdot|x-c| < \frac{1}{|c|/2}\cdot\frac{1}{|c|}\cdot\frac{\varepsilon c^2}{2} = \varepsilon$$

DEMOSTRACIÓN FORMAL Sea $\varepsilon > 0$ dada. Elegimos $\delta = \text{mín}\{|c|/2, \varepsilon c^2/2\}$. Entonces $0 < |x - c| < \delta$ implica que

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| = \left|\frac{c-x}{xc}\right| = \frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{|c|}\cdot|x-c| < \frac{1}{|c|/2}\cdot\frac{1}{|c|}\cdot\frac{\varepsilon c^2}{2} = \varepsilon$$ ■

Límites unilaterales No se necesita mucha imaginación para dar las definiciones ε–δ del límite por la derecha y del límite por la izquierda.

Definición **Límite por la derecha**

Decir que $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe una correspondiente $\delta > 0$, tal que

$$0 < x - c < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Al lector le dejamos la definición ε–δ para el límite por la izquierda. (Véase el problema 5).

El concepto ε–δ presentado en esta sección es probablemente el tema más intrincado y elusivo en un curso de cálculo. Le podría tomar algún tiempo entender este concepto, pero vale la pena. El cálculo es el estudio de límites, de modo que una clara comprensión del concepto de límite es una meta valiosa.

Por lo regular, el descubrimiento del cálculo se atribuye a Isaac Newton (1642–1727) y a Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716), quienes trabajaron de manera independiente a finales de 1600. Aunque Newton y Leibniz, junto con sus sucesores, descubrieron muchas propiedades del cálculo y se encontró que tiene muchas aplicaciones en las ciencias físicas, no fue sino hasta el siglo XIX que se propuso una definición precisa de un límite. Augustin Louis Cauchy (1789–1857), un ingeniero y matemático francés, dio esta definición: "Si los valores sucesivos atribuidos a la misma variable que se aproxima indefinidamente a un valor fijo, tal que ellos finalmente difieren de él por tan poco como uno quiera, este último es llamado el límite de todos los demás." Incluso Cauchy, un maestro del rigor, fue un poco vago en su definición de límite. ¿Qué significa "valores sucesivos"? ¿Qué significa "finalmente difieren"? La frase "finalmente difieren de él por tan poco como uno quiera" contiene la semilla de la definición ε–δ, pues indica que la diferencia entre $f(x)$ y su límite L puede hacerse más pequeña que cualquier número dado, el número que fue etiquetado como ε. El matemático alemán Karl Weierstrass (1815–1897) fue el primero en reunir la definición que es equivalente a nuestra definición $\varepsilon-\delta$ de límite.

Revisión de conceptos

1. La desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$ es equivalente a _____ $< f(x) <$ _____.

2. El significado preciso de $\lim_{x \to a} f(x) = L$ es éste: dado cualquier número positivo ε existe un correspondiente número positivo δ, tal que ______ implica ______.

3. Para asegurar que $|3x - 3| < \varepsilon$, requeriríamos que $|x - 1| <$ _____.

4. $\lim_{x \to a} (mx + b) =$ _____.

Conjunto de problemas 1.2

En los problemas del 1 al 6 dé la definición $\varepsilon-\delta$ apropiada para cada proposición.

1. $\lim_{t \to a} f(t) = M$

2. $\lim_{u \to b} g(u) = L$

3. $\lim_{z \to d} h(z) = P$

4. $\lim_{y \to e} \phi(y) = B$

5. $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$

6. $\lim_{t \to a^+} g(t) = D$

En los problemas del 7 al 10 trace la función $f(x)$ *en el intervalo* [1.5, 2.5]. *Haga un acercamiento a la gráfica de cada función para determinar qué tan cercano debe estar* x *de 2 para que* $f(x)$ *esté a menos de 0.002 de 4. Su respuesta debe ser de la forma "si* x *está a menos de _____ de 2, entonces* $f(x)$ *está a menos de 0.002 de 4".*

7. $f(x) = 2x$

8. $f(x) = x^2$

9. $f(x) = \sqrt{8x}$

10. $f(x) = \dfrac{8}{x}$

En los problemas del 11 al 22 proporcione una prueba $\varepsilon-\delta$ para cada límite dado.

11. $\lim_{x \to 0} (2x - 1) = -1$

12. $\lim_{x \to -21} (3x - 1) = -64$

13. $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} = 10$

14. $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{2x^2 - x}{x}\right) = -1$

15. $\lim_{x \to 5} \dfrac{2x^2 - 11x + 5}{x - 5} = 9$

16. $\lim_{x \to 1} \sqrt{2x} = \sqrt{2}$

17. $\lim_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{2x - 1}}{\sqrt{x - 3}} = \sqrt{7}$

18. $\lim_{x \to 1} \dfrac{14x^2 - 20x + 6}{x - 1} = 8$

19. $\lim_{x \to 1} \dfrac{10x^3 - 26x^2 + 22x - 6}{(x - 1)^2} = 4$

20. $\lim_{x \to 1} (2x^2 + 1) = 3$

21. $\lim_{x \to -1} (x^2 - 2x - 1) = 2$

22. $\lim_{x \to 0} x^4 = 0$

23. Demuestre que si $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y $\lim_{x \to c} f(x) = M$, entonces $L = M$.

24. Sean F y G funciones tales que $0 \le F(x) \le G(x)$ para toda x cercana a c, excepto posiblemente en c. Demuestre que si $\lim_{x \to c} G(x) = 0$, entonces $\lim_{x \to c} F(x) = 0$.

25. Demuestre que $\lim_{x \to 0} x^4 \operatorname{sen}^2(1/x) = 0$. *Sugerencia:* utilice los problemas 22 y 24.

26. Demuestre que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

27. Considerando los límites por la derecha y por la izquierda, demuestre que $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

28. Demuestre que si $|f(x)| < B$ para $|x - a| < 1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ entonces $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.

29. Suponga que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y que $f(a)$ existe (aunque podría ser diferente de L). Demuestre que f está acotada en algún intervalo que contiene a a; esto es, demuestre que existen un intervalo (c, d) con $c < a < d$ y una constante M, tal que $|f(x)| \le M$ para toda x en (c, d).

30. Demuestre que si $f(x) \le g(x)$ para toda x en algún intervalo alrededor de a, al cual se le quite a, y si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces $L \le M$.

31. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son equivalentes a la definición de límite?

(a) Para algún $\varepsilon > 0$ y toda $\delta > 0$, $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

(b) Para toda $\delta > 0$, existe una correspondiente $\varepsilon > 0$ tal que

$$0 < |x - c| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \delta$$

(c) Para todo entero positivo N existe un entero correspondiente positivo M, tal que $0 < |x - c| < 1/M \Rightarrow |f(x) - L| < 1/N$.

(d) Para toda $\varepsilon > 0$, existe una correspondiente $\delta > 0$ tal que $0 < |x - c| < \delta$ y $|f(x) - L| < \varepsilon$ para alguna x.

32. En lenguaje $\varepsilon-\delta$ qué significa decir $\lim_{x \to c} f(x) \ne L$.

GC **33.** Suponga que deseamos dar una demostración con $\varepsilon-\delta$ de que

$$\lim_{x \to 3} \frac{x + 6}{x^4 - 4x^3 + x^2 + x + 6} = -1$$

Empezamos por escribir $\dfrac{x + 6}{x^4 - 4x^3 + x^2 + x + 6} + 1$ en la forma $(x - 3)g(x)$.

(a) Determine $g(x)$.

(b) ¿Podríamos elegir $\delta = \min(1, \varepsilon/n)$ para alguna n? Explique.

(c) Si elegimos $\delta = \min\left(\frac{1}{4}, \varepsilon/m\right)$, ¿cuál es el entero más pequeño m que podríamos utilizar?

Respuestas a la revisión de conceptos **1.** $L - \varepsilon$; $L + \varepsilon$ **2.** $0 < |x - a| < \delta$; $|f(x) - L| < \varepsilon$ **3.** $\varepsilon/3$ **4.** $ma + b$

1.3 Teoremas de límites

La mayoría de los lectores coincidirá en que demostrar la existencia y obtener los valores de los límites mediante la definición ε–δ de la sección anterior consume tiempo y es difícil. Por esto son bienvenidos los teoremas de esta sección. Nuestro primer teorema es el principal. Con él podemos manejar la mayoría de los problemas de límites con los que nos enfrentaremos durante bastante tiempo.

Límites laterales

Aunque el teorema A se establece en términos de límites por los dos lados, sigue cumpliéndose tanto para límites por la izquierda como para límites por la derecha.

Teorema A **Teorema principal de los límites**

Sean n un entero positivo, k una constante y f y g funciones que tengan límites en c. Entonces

1. $\lim\limits_{x\to c} k = k$;
2. $\lim\limits_{x\to c} x = c$;
3. $\lim\limits_{x\to c} kf(x) = k \lim\limits_{x\to c} f(x)$;
4. $\lim\limits_{x\to c} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x)$;
5. $\lim\limits_{x\to c} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) - \lim\limits_{x\to c} g(x)$;
6. $\lim\limits_{x\to c} [f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to c} g(x)$;
7. $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$, siempre que $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$;
8. $\lim\limits_{x\to c} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]^n$;
9. $\lim\limits_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$, siempre que $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$ cuando n sea par.

Estos importantes resultados se recuerdan mejor si se aprenden en palabras. Por ejemplo, la afirmación 4 se traduce como: *el límite de una suma es la suma de los límites*.

Por supuesto, el teorema A necesita demostrarse. Posponemos esa tarea hasta el final de la sección, pues preferimos mostrar primero cómo se utiliza este teorema con varias partes.

Aplicaciones del teorema principal de los límites En los ejemplos siguientes, los números dentro de un círculo se refieren al número de la afirmación del teorema A. Cada igualdad está justificada por la afirmación indicada.

EJEMPLO 1 Determine $\lim\limits_{x\to 3} 2x^4$.

$$\lim_{x\to 3} 2x^4 \overset{3}{=} 2\lim_{x\to 3} x^4 \overset{8}{=} 2\left[\lim_{x\to 3} x\right]^4 \overset{2}{=} 2[3]^4 = 162$$

■

EJEMPLO 2 Encuentre $\lim\limits_{x\to 4}(3x^2 - 2x)$.

SOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 4}(3x^2 - 2x) \overset{5}{=} \lim_{x\to 4} 3x^2 - \lim_{x\to 4} 2x \overset{3}{=} 3\lim_{x\to 4} x^2 - 2\lim_{x\to 4} x$$

$$\overset{8}{=} 3\left(\lim_{x\to 4} x\right)^2 - 2\lim_{x\to 4} x \overset{2}{=} 3(4)^2 - 2(4) = 40$$

■

EJEMPLO 3 Determine $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x^2+9}}{x}$.

SOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x^2+9}}{x} \overset{7}{=} \frac{\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x^2+9}}{\lim\limits_{x\to 4} x} \overset{9,2}{=} \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 4} (x^2+9)}}{4} \overset{4}{=} \frac{1}{4}\sqrt{\lim_{x\to 4} x^2 + \lim_{x\to 4} 9}$$

$$\overset{8,1}{=} \frac{1}{4}\sqrt{\left[\lim_{x\to 4} x\right]^2 + 9} \overset{2}{=} \frac{1}{4}\sqrt{4^2+9} = \frac{5}{4}$$

■

EJEMPLO 4 Si $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 4$ y $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = 8$, encuentre

$$\lim_{x\to 3}\left[f^2(x)\cdot\sqrt[3]{g(x)}\right]$$

SOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 3}\left[f^2(x)\cdot\sqrt[3]{g(x)}\right] \overset{6}{=} \lim_{x\to 3} f^2(x)\cdot\lim_{x\to 3}\sqrt[3]{g(x)}$$

$$\overset{8,9}{=} \left[\lim_{x\to 3} f(x)\right]^2 \cdot \sqrt[3]{\lim_{x\to 3} g(x)}$$

$$= [4]^2\cdot\sqrt[3]{8} = 32$$

■

Recuerde que una función polinomial f tiene la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mientras que una función racional f es el cociente de dos funciones polinomiales, esto es,

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

Teorema B **Teorema de sustitución**

Si f es una función polinomial o una función racional, entonces

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

con tal que $f(c)$ esté definida. En el caso de una función racional, esto significa que el valor del denominador en c no sea cero.

Evaluación de un límite por "sustitución"

Cuando aplicamos el teorema B, teorema de sustitución, decimos que evaluamos el límite por *sustitución*. No todos los límites pueden evaluarse por sustitución; considere $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$. El teorema de sustitución no se aplica aquí, ya que el denominador es cero cuando x = 1, pero el límite sí existe.

La demostración del teorema B se obtiene con base en aplicaciones repetidas del teorema A. Observe que el teorema B nos permite encontrar límites de funciones polinomiales y racionales con la simple sustitución de c por x en toda la expresión, siempre y cuando el denominador de la función racional no sea cero en c.

EJEMPLO 5 Encuentre $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8}$.

SOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 2} \frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8} = \frac{7(2)^5 - 10(2)^4 - 13(2) + 6}{3(2)^2 - 6(2) - 8} = -\frac{11}{2}$$ ■

EJEMPLO 6 Determine $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 3x + 7}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 3x + 7}{(x - 1)^2}$.

SOLUCIÓN No se aplican ni el teorema B ni la afirmación 7 del teorema A, ya que el límite del denominador es cero. Sin embargo, como el límite del numerador es 11, vemos que cuando x se aproxima a 1 estamos dividiendo un número cercano a 11 entre un número positivo cercano a cero. El resultado es un número positivo grande. De hecho, el número resultante puede hacerlo tan grande como quiera tomando a x suficientemente cercana a 1. Decimos que el límite no existe. (Más adelante, en este capítulo —véase la sección 1.5— nos permitiremos decir que el límite es $+\infty$). ■

En muchos casos no se puede aplicar el teorema B, ya que la sustitución de c provoca que el denominador se haga igual a 0. En casos como éste, en ocasiones sucede que la función se puede simplificar mediante la factorización. Por ejemplo, podemos escribir

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6} = \frac{(x - 2)(x + 5)}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{x + 5}{x + 3}$$

Debemos ser cuidadosos en este último paso. La fracción $(x + 5)/(x + 3)$ es igual a la del lado izquierdo del signo de igualdad sólo si x no es igual a 2. Si $x = 2$, el lado izquierdo está indeterminado (ya que el denominador es 0), mientras que el lado derecho es igual a $(2 + 5)/(2 + 3) = 7/5$. Esto plantea la pregunta acerca de si los límites

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2} \frac{x + 5}{x + 3}$$

son iguales. La respuesta se encuentra en el siguiente teorema.

Teorema C

Si $f(x) = g(x)$ para toda x en un intervalo abierto que contenga a c, excepto posiblemente en el mismo número c, y si existe $\lim_{x \to c} g(x)$ entonces $\lim_{x \to c} f(x)$ existe y $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x)$.

EJEMPLO 7 Determine $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

SOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} + 1\right)}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \to 1}\left(\sqrt{x} + 1\right) = \sqrt{1} + 1 = 2$$ ■

EJEMPLO 8 Determine $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6}$.

SOLUCIÓN No se aplica el teorema B porque el denominador es 0 cuando $x = 2$. Al sustituir $x = 2$ en el numerador también obtenemos 0, por lo que el cociente toma una forma carente de significado 0/0 en $x = 2$. Cuando esto suceda deberemos buscar alguna simplificación algebraica, como la factorización.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 5)}{(x - 2)(x + 3)} = \lim_{x \to 2} \frac{x + 5}{x + 3} = \frac{7}{5}$$

¿Opcional?

En un primer curso de cálculo, ¿cuántos teoremas deben demostrarse? Los profesores de matemáticas han discutido largo y tendido en torno a esto y acerca del balance correcto entre:

- lógica e intuición
- demostración y explicación
- teoría y aplicación

Un gran científico de hace mucho tiempo dio un sabio consejo.

"Quien ama la práctica sin teoría es como el marinero que se embarca sin timón ni brújula y nunca sabe a dónde ir".

Leonardo da Vinci

El paso de la segunda a la última igualdad se justifica por medio del teorema C, ya que

$$\frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x+5}{x+3}$$

para toda x, salvo para $x = 2$. Una vez que aplicamos el teorema C, podemos evaluar el límite por medio de sustitución (es decir, mediante la aplicación del teorema B). ■

Demostración del teorema A (opcional) No debe sorprenderse demasiado cuando le decimos que las demostraciones de algunas partes del teorema A son muy complicadas. Como consecuencia de esto, aquí sólo demostramos las primeras cinco partes y dejamos las otras al apéndice (sección A.2, teorema A). Para que se dé cuenta, podría intentar con los problemas 35 y 36.

Demostraciones de las afirmaciones 1 y 2 Estas afirmaciones resultan de $\lim_{x\to c}(mx+b) = mc+b$ (véase el ejemplo 4 de la sección 1.2) utilizando primero $m = 0$ y luego $m = 1, b = 0$. ■

Demostración de la afirmación 3 Si $k = 0$, el resultado es trivial, así que suponemos que $k \neq 0$. Sea $\varepsilon > 0$ dada. Por hipótesis, $\lim_{x\to c} f(x)$ existe; llamemos L a su valor. Por definición de límite existe un número δ, tal que

$$0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{|k|}$$

Es seguro que algunos reclamarían que pongamos $\varepsilon/|k|$ en lugar de ε al final de la desigualdad anterior. Bueno, ¿acaso $\varepsilon/|k|$ no es un número positivo? Sí. ¿Acaso la definición de límite no requiere que para cualquier número positivo exista una correspondiente δ? Sí.

Ahora, para una δ así determinada (nuevamente por medio de un análisis preliminar que no hemos mostrado aquí), aseguramos que $0 < |x-c| < \delta$ implica que

$$|kf(x) - kL| = |k||f(x) - L| < |k|\frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$$

Esto muestra que

$$\lim_{x\to c} kf(x) = kL = k\lim_{x\to c} f(x)$$ ■

Demostración de la afirmación 4 Respecto a la figura 1. Sea $\lim_{x\to c} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c} g(x) = M$. Si ε es cualquier número positivo, entonces $\varepsilon/2$ es positivo. Como $\lim_{x\to c} f(x) = L$, existe un número positivo δ_1 tal que

$$0 < |x-c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Como $\lim_{x\to c} g(x) = M$, existe un número positivo δ_2, tal que

$$0 < |x-c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Elegimos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$; esto es, elegimos δ como la más pequeña de δ_1 y δ_2. Entonces $0 < |x-c| < \delta$ implica que

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L+M)| &= |[f(x) - L] + [g(x) - M]| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

En esta cadena, la primera desigualdad es la desigualdad del triángulo (véase la sección 0.2); la segunda resulta de la elección de δ. Acabamos de demostrar que

$$0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - (L+M)| < \varepsilon$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to c}[f(x) + g(x)] = L + M = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$$ ■

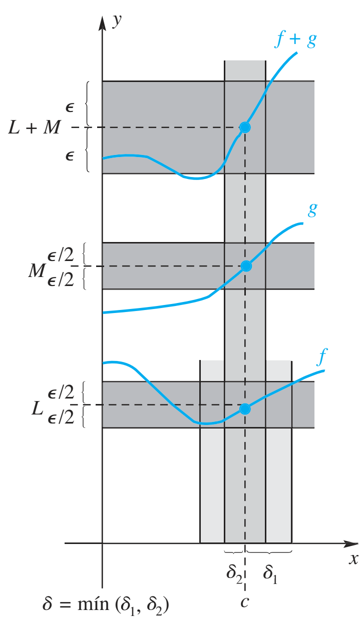


Figura 1

Demostración de la afirmación 5

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)] &= \lim_{x\to c}[f(x)+(-1)g(x)]\\ &= \lim_{x\to c}f(x)+\lim_{x\to c}(-1)g(x)\\ &= \lim_{x\to c}f(x)+(-1)\lim_{x\to c}g(x)\\ &= \lim_{x\to c}f(x)-\lim_{x\to c}g(x)\end{aligned}$$ ■

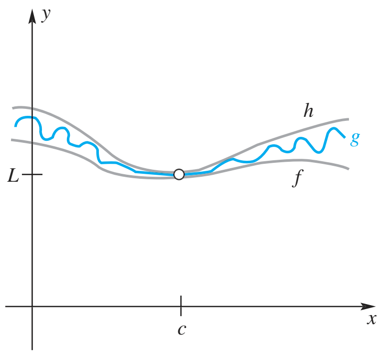


Figura 2

El teorema del emparedado Probablemente ha oído decir a alguien: “me encuentro entre la espada y la pared”. Esto es lo que le sucede a g en el siguiente teorema (véase la figura 2).

Teorema D Teorema del emparedado

Sean f, g y h funciones que satisfacen $f(x) \le g(x) \le h(x)$ para toda x cercana a c, excepto posiblemente en c. Si $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$, entonces $\lim_{x\to c} g(x) = L$.

Demostración (Opcional) Sea $\varepsilon > 0$ dada. Elegimos δ_1 tal que

$$0 < |x-c| < \delta_1 \Rightarrow L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$$

y δ_2 tal que

$$0 < |x-c| < \delta_2 \Rightarrow L-\varepsilon < h(x) < L+\varepsilon$$

Elegimos δ_3, de modo que

$$0 < |x-c| < \delta_3 \Rightarrow f(x) \le g(x) \le h(x)$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Entonces

$$0 < |x-c| < \delta \Rightarrow L-\varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < L+\varepsilon$$

Concluimos que $\lim_{x\to c} g(x) = L$. ■

EJEMPLO 9 Suponga que hemos demostrado que $1 - x^2/6 \le (\text{sen } x)/x \le 1$ para toda x cercana pero distinta de cero. ¿Qué podemos concluir acerca de $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x}$?

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 1 - x^2/6$, $g(x) = (\text{sen } x)/x$, y $h(x) = 1$. Se sigue que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = \lim_{x\to 0} h(x)$ y de este modo, por el teorema D,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x} = 1$$ ■

Revisión de conceptos

1. Si $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$, entonces $\lim_{x\to 3}(x^2+3)f(x) =$ _____.
2. Si $\lim_{x\to 2} g(x) = -2$, entonces $\lim_{x\to 2}\sqrt{g^2(x)+12} =$ _____.
3. Si $\lim_{x\to c} f(x) = 4$ y $\lim_{x\to c} g(x) = -2$, entonces $\lim_{x\to c}\frac{f^2(x)}{g(x)} =$ _____ y $\lim_{x\to c}\left[g(x)\sqrt{f(x)}+5x\right] =$ _____.
4. Si $\lim_{x\to c} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c} g(x) = L$, entonces $\lim_{x\to c}[f(x)-L]g(x) =$ _____.

Conjunto de problemas 1.3

En los problemas del 1 al 12 utilice el teorema A para encontrar cada uno de los límites. Justifique cada paso apelando a cada una de las afirmaciones numeradas, como en los ejemplos del 1 al 4.

1. $\lim_{x\to 1}(2x+1)$
2. $\lim_{x\to -1}(3x^2-1)$
3. $\lim_{x\to 0}[(2x+1)(x-3)]$
4. $\lim_{x\to\sqrt{2}}[(2x^2+1)(7x^2+13)]$
5. $\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{5-3x}$
6. $\lim_{x\to -3}\frac{4x^3+1}{7-2x^2}$

7. $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{3x - 5}$ **8.** $\lim\limits_{x\to -3} \sqrt{5x^2 + 2x}$

9. $\lim\limits_{t\to -2} (2t^3 + 15)^{13}$ **10.** $\lim\limits_{w\to -2} \sqrt{-3w^3 + 7w^2}$

11. $\lim\limits_{y\to 2} \left(\dfrac{4y^3 + 8y}{y + 4}\right)^{1/3}$

12. $\lim\limits_{w\to 5} (2w^4 - 9w^3 + 19)^{-1/2}$

En los problemas del 13 al 24 encuentre el límite indicado o establezca que no existe. En muchos casos, necesitará usar un poco de álgebra antes de intentar evaluar el límite.

13. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$ **14.** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

15. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$ **16.** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 + x}{x^2 + 1}$

17. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^3 + 4x^2 - 19x + 14}$

18. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + 7x + 10}{x + 2}$

19. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$ **20.** $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2 - 14x - 51}{x^2 - 4x - 21}$

21. $\lim\limits_{u\to -2} \dfrac{u^2 - ux + 2u - 2x}{u^2 - u - 6}$ **22.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + ux - x - u}{x^2 + 2x - 3}$

23. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{2x^2 - 6x\pi + 4\pi^2}{x^2 - \pi^2}$

24. $\lim\limits_{w\to -2} \dfrac{(w + 2)(w^2 - w - 6)}{w^2 + 4w + 4}$

En los problemas del 25 al 30 encuentre los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 3$ *y* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -1$ *(véase el ejemplo 4).*

25. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$ **26.** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{2f(x) - 3g(x)}{f(x) + g(x)}$

27. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[3]{g(x)}\,[f(x) + 3]$ **28.** $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - 3]^4$

29. $\lim\limits_{t\to a} \left[|f(t)| + |3g(t)|\right]$ **30.** $\lim\limits_{u\to a} [f(u) + 3g(u)]^3$

En los problemas del 31 al 34 encuentre $\lim\limits_{x\to 2} [f(x) - f(2)]/(x - 2)$ *para cada función f dada.*

31. $f(x) = 3x^2$ **32.** $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

33. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **34.** $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$

35. Demuestre la afirmación 6 del teorema A. *Sugerencia:*

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LM| \\ &= |g(x)[f(x) - L] + L[g(x) - M]| \\ &\le |g(x)||f(x) - L| + |L||g(x) - M| \end{aligned}$$

Ahora demuestre que si $\lim\limits_{x\to c} g(x) = M$, entonces existe un número δ_1, tal que

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |g(x)| < |M| + 1$$

36. Demuestre la afirmación 7 del teorema A; primero dé una demostración ε–δ de que $\lim\limits_{x\to c} [1/g(x)] = 1/\left[\lim\limits_{x\to c} g(x)\right]$ y luego aplique la afirmación 6.

37. Demuestre que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to c} [f(x) - L] = 0$.

38. Demuestre que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to c} |f(x)| = 0$.

39. Demuestre que $\lim\limits_{x\to c} |x| = |c|$.

40. Encuentre ejemplos para demostrar que si

(a) $\lim\limits_{x\to c} \left[f(x) + g(x)\right]$ existe, esto no implica que exista $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ o $\lim\limits_{x\to c} g(x)$;

(b) $\lim\limits_{x\to c} \left[f(x) \cdot g(x)\right]$ existe, esto no implica que exista $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ o $\lim\limits_{x\to c} g(x)$.

En los problemas del 41 al 48 encuentre cada uno de los límites unilaterales o establezca que no existen.

41. $\lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{\sqrt{3 + x}}{x}$ **42.** $\lim\limits_{x\to -\pi^+} \dfrac{\sqrt{\pi^3 + x^3}}{x}$

43. $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 9}}$ **44.** $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{1 + x}}{4 + 4x}$

45. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x^2 + 1)[\![x]\!]}{(3x - 1)^2}$ **46.** $\lim\limits_{x\to 3^-} (x - [\![x]\!])$

47. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|}$ **48.** $\lim\limits_{x\to 3^+} [\![x^2 + 2x]\!]$

49. Suponga que $f(x)g(x) = 1$ para toda x y que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Demuestre que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no existe.

50. Sea R el rectángulo que une los puntos medios de los lados del cuadrilátero Q, el cual tiene vértices $(\pm x, 0)$ y $(0, \pm 1)$. Calcule

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\text{perímetro de } R}{\text{perímetro de } Q}$$

51. Sea $y = \sqrt{x}$ y considere los puntos M, N, O y P con coordenadas $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$ y (x, y) en la gráfica de $y = \sqrt{x}$, respectivamente. Calcule:

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\text{perímetro de } \Delta NOP}{\text{perímetro de } \Delta MOP}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\text{área de } \Delta NOP}{\text{área de } \Delta MOP}$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** 48 **2.** 4 **3.** -8; $-4 + 5c$ **4.** 0

1.4 Límites que involucran funciones trigonométricas

El teorema B de la sección anterior dice que los límites de funciones polinomiales siempre pueden encontrarse por sustitución y los límites de funciones racionales pueden encontrarse por sustitución, siempre y cuando el denominador no sea cero en el punto límite. Esta regla de sustitución se aplica también a las funciones trigonométricas. Este resultado se establece a continuación.

Teorema A Límites de funciones trigonométricas

Para todo número real c en el dominio de la función,

1. $\lim_{t\to c} \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} c$
2. $\lim_{t\to c} \cos t = \cos c$
3. $\lim_{t\to c} \tan t = \tan c$
4. $\lim_{t\to c} \cot t = \cot c$
5. $\lim_{t\to c} \sec t = \sec c$
6. $\lim_{t\to c} \csc t = \csc c$

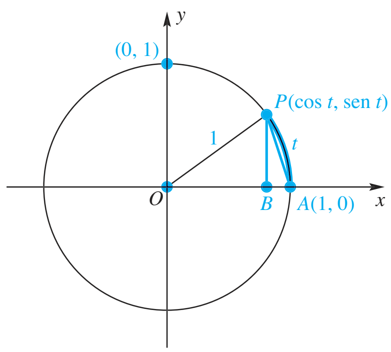


Figura 1

Demostración de la afirmación 1 Primero establecemos el caso especial en el que $c = 0$. Supóngase que $t > 0$ y que los puntos A, B y P están definidos como en la figura 1. Entonces

$$0 < |BP| < |AP| < \operatorname{arc}(AP)$$

Pero $|BP| = \operatorname{sen} t$ y $\operatorname{arco}(AP) = t$, de modo que

$$0 < \operatorname{sen} t < t$$

Si $t < 0$, entonces $t < \operatorname{sen} t < 0$. Así que podemos aplicar el teorema del emparedado (teorema 1.3D) y concluir que $\lim_{t\to 0} \operatorname{sen} t = 0$. Para completar la demostración, también necesitaremos el resultado de que $\lim_{t\to 0} \cos t = 1$. Ésta se deduce aplicando una identidad trigonométrica y el teorema 1.3A:

$$\lim_{t\to 0} \cos t = \lim_{t\to 0} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{1 - \left(\lim_{t\to 0} \operatorname{sen} t\right)^2} = \sqrt{1 - 0^2} = 1$$

Ahora, para demostrar que $\lim_{t\to c} \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} c$, primero hacemos $h = t - c$ de modo que $h \to 0$ cuando $t \to c$. Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{t\to c} \operatorname{sen} t &= \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(c + h)\\ &= \lim_{h\to 0} (\operatorname{sen} c \cos h + \cos c \operatorname{sen} h) \quad \text{(Identidad de la suma de ángulos)}\\ &= (\operatorname{sen} c)\left(\lim_{h\to 0} \cos h\right) + (\cos c)\left(\lim_{h\to 0} \operatorname{sen} h\right)\\ &= (\operatorname{sen} c)(1) + (\cos c)(0) = \operatorname{sen} c\end{aligned}$$

■

Demostración de la afirmación 2 Otra vez utilizamos la identidad junto con el teorema 1.3A. Si $\cos c > 0$, entonces para t cercano a c tenemos $\cos t = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}$. Por lo tanto,

$$\lim_{t\to c} \cos t = \lim_{t\to c} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{1 - \left(\lim_{t\to c} \operatorname{sen} t\right)^2} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 c} = \cos c$$

Por otra parte, si $\cos c < 0$, entonces para t cercano a c tenemos $\cos t = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}$.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to c} \cos t &= \lim_{t\to c}\left(-\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}\right) = -\sqrt{1 - \left(\lim_{t\to c} \operatorname{sen} t\right)^2} = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 c}\\ &= -\sqrt{\cos^2 c} = -|\cos c| = \cos c\end{aligned}$$

El caso $c = 0$ se trabajó en la demostración de la afirmación 1. ■

Las demostraciones de las demás afirmaciones se dejan como ejercicios. (Véanse los problemas 21 y 22). El teorema A puede utilizarse junto con el teorema 1.3A para evaluar otros límites.

EJEMPLO 1 Encuentre $\lim_{t\to 0} \frac{t^2 \cos t}{t + 1}$.

SOLUCIÓN

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2 \cos t}{t + 1} = \left(\lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t + 1}\right)\left(\lim_{t\to 0} \cos t\right) = 0 \cdot 1 = 0$$

■

Dos límites importantes que no pueden evaluarse por sustitución son

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \quad \text{y} \quad \lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos t}{t}$$

En la sección 1.1 encontramos el primero de estos límites, en donde conjeturamos que el límite era 1. Ahora demostramos que en verdad 1 es el límite.

Teorema B **Límites trigonométricos especiales**

1. $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$ 2. $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} = 0$

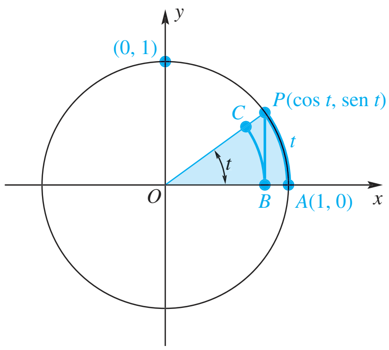


Figura 2

Demostración de la afirmación 1 En la demostración del teorema A de esta sección mostramos que

$$\lim_{t\to 0} \cos t = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to 0} \operatorname{sen} t = 0$$

Para $-\pi/2 \le t \le \pi/2, t \ne 0$ (recuerde, no importa qué suceda *en* $t = 0$), dibuje el segmento de recta vertical BP y el arco circular BC, como se muestra en la figura 2. (Si $t < 0$, entonces considere la región sombreada reflejada con respecto al eje x.) De la figura 2 se hace evidente que

$$\text{área(sector } OBC) \le \text{área}(\Delta OBP) \le \text{área(sector } OAP)$$

El área de un triángulo es un medio del producto de su base por la altura, y el área de un sector circular con ángulo central t y radio r es $\frac{1}{2}r^2|t|$ (véase el problema 42 de la sección 0.7). Al aplicar estos resultados a las tres regiones dadas

$$\frac{1}{2}(\cos t)^2|t| \le \frac{1}{2}\cos t\,|\operatorname{sen} t| \le \frac{1}{2}1^2|t|$$

que, después de multiplicar por 2 y dividir entre el número positivo $|t|\cos t$, se obtiene

$$\cos t \le \frac{|\operatorname{sen} t|}{|t|} \le \frac{1}{\cos t}$$

Como la expresión $(\operatorname{sen} t)/t$ es positiva para $-\pi/2 \le t \le \pi/2, t \ne 0$, tenemos $|\operatorname{sen} t|/|t| = (\operatorname{sen} t)/t$. Por lo tanto,

$$\cos t \le \frac{\operatorname{sen} t}{t} \le \frac{1}{\cos t}$$

Como estamos buscando el límite de la función de en medio y conocemos el límite de cada una de las funciones "exteriores", esta doble desigualdad pide que apliquemos el teorema del emparedado. Cuando lo aplicamos, obtenemos

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1 \qquad \blacksquare$$

Demostración de la afirmación 2 El segundo límite se deduce con facilidad a partir del primero. Sólo multiplique el numerador y el denominador por $(1 + \cos t)$; esto da

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t}\cdot\frac{1+\cos t}{1+\cos t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos^2 t}{t(1+\cos t)}\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t(1+\cos t)}\\ &= \left(\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)\frac{\lim_{t\to 0} \operatorname{sen} t}{\lim_{t\to 0}(1+\cos t)} = 1\cdot\frac{0}{2} = 0 \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Haremos uso explícito de estos dos límites en el capítulo 2. En este momento podemos usarlos para evaluar otros límites.

EJEMPLO 2 Encuentre cada límite,

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$ (b) $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{\operatorname{sen} t}$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{\tan x}$

SOLUCIÓN

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = \lim_{x\to 0} 3\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}$

Aquí, el argumento de la función seno es $3x$, no sólo x, como lo requiere el teorema B. Sea $y = 3x$. Entonces $y \to 0$ si y sólo si $x \to 0$, de modo que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = 3$$

(b)
$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\operatorname{sen} t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1-\cos t}{t}}{\frac{\operatorname{sen} t}{t}} = \frac{\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}}{\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}} = \frac{0}{1} = 0$$

(c)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 4x}{\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{4\operatorname{sen} 4x}{4x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{x\cos x}}$$

$$= \frac{4\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 4x}{4x}}{\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)} = \frac{4}{1\cdot 1} = 4 \qquad \blacksquare$$

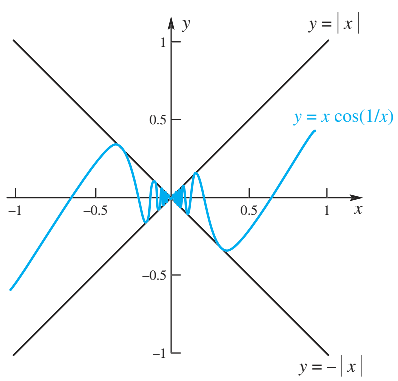


Figura 3

EJEMPLO 3 Haga un bosquejo de las gráficas de $u(x) = |x|$, $l(x) = -|x|$ y $f(x) = x\cos(1/x)$. Utilice estas gráficas junto con el teorema del emparedado (teorema D de la sección 1.3) para determinar $\lim_{x\to 0} f(x)$.

SOLUCIÓN Observe que $\cos(1/x)$ siempre está entre -1 y 1 y $f(x) = x\cos(1/x)$. Por lo tanto, $x\cos(1/x)$ siempre estará entre $-x$ y x, si x es positiva y entre x y $-x$, si x es negativa. En otras palabras, la gráfica de $y = x\cos(1/x)$ está entre las gráficas de $y = |x|$ y $y = -|x|$, como se muestra en la figura 3. Sabemos que $\lim_{x\to 0}|x| = \lim_{x\to 0}(-|x|) = 0$ (véase el problema 27 de la sección 1.2) y como la gráfica de $y = f(x) = x\cos(1/x)$ está "emparedada" entre las gráficas de $u(x) = |x|$ y $l(x) = -|x|$, ambas tienden a cero cuando $x \to 0$ y podemos aplicar el teorema del emparedado para concluir que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. $\blacksquare$

Revisión de conceptos

1. $\lim_{t\to 0}\operatorname{sen} t =$ _____.

2. $\lim_{t\to \pi/4}\tan t =$ _____.

3. El límite $\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}$ no puede evaluarse por sustitución porque ________.

4. $\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t} =$ _____.

Conjunto de problemas 1.4

En los problemas del 1 al 14 evalúe cada límite.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x + 1}$

2. $\lim\limits_{\theta\to \pi/2} \theta \cos \theta$

3. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cos^2 t}{1 + \operatorname{sen} t}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x \tan x}{\operatorname{sen} x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2x}$

6. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3\theta}{2\theta}$

7. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3\theta}{\tan \theta}$

8. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\tan 5\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}$

9. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\cot (\pi\theta) \operatorname{sen} \theta}{2 \sec \theta}$

10. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 3t}{2t}$

11. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\tan^2 3t}{2t}$

12. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\tan 2t}{\operatorname{sen} 2t - 1}$

13. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3t + 4t}{t \sec t}$

14. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\theta^2}$

En los problemas del 15 al 19 trace las funciones $u(x)$, $l(x)$ y $f(x)$. Después utilice estas gráficas junto con el teorema del emparedado para determinar $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

15. $u(x) = |x|, l(x) = -|x|, f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$

16. $u(x) = |x|, l(x) = -|x|, f(x) = x \operatorname{sen}(1/x^2)$

17. $u(x) = |x|, l(x) = -|x|, f(x) = (1 - \cos^2 x)/x$

18. $u(x) = 1, l(x) = 1 - x^2, f(x) = \cos^2 x$

19. $u(x) = 2, l(x) = 2 - x^2, f(x) = 1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

20. Demuestre que $\lim\limits_{t\to c} \cos t = \cos c$ utilizando un argumento similar al que se empleó en la demostración de que $\lim\limits_{t\to c} \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} c$.

21. Demuestre las afirmaciones 3 y 4 del teorema A mediante el teorema 1.3A.

22. Demuestre las afirmaciones 5 y 6 del teorema 1.3A.

23. Con base en área$(OBP) \le$ área(sector OAP) $\le$ área(OBP) + área$(ABPQ)$ en la figura 4, demuestre que

$$\cos t \le \frac{t}{\operatorname{sen} t} \le 2 - \cos t$$

y así obtenga otra demostración de que $\lim\limits_{t\to 0^+} (\operatorname{sen} t)/t = 1$.

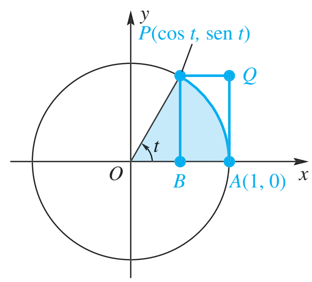


Figura 4

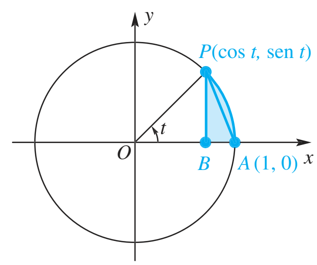


Figura 5

24. En la figura 5, sea D el área del triángulo ABP y E el área de la región sombreada.

(a) Haga una conjetura acerca del valor de $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{D}{E}$ observando la figura.

(b) Encuentre una fórmula para D/E en términos de t.

C (c) Utilice una calculadora para obtener una estimación precisa de $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{D}{E}$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** 0 **2.** 1 **3.** el denominador es cero cuando $t = 0$ **4.** 1

1.5 Límites al infinito; límites infinitos

Con frecuencia, los problemas y paradojas más profundos de las matemáticas están entrelazados con el uso del concepto de infinito. Incluso, el progreso matemático, en parte, puede medirse en términos de la comprensión del concepto de infinito. Ya hemos utilizado los símbolos ∞ y $-\infty$ en nuestra notación para ciertos intervalos. Así, $(3, \infty)$ es nuestra forma para denotar al conjunto de todos los números reales mayores que 3. Observe que nunca nos hemos referido a ∞ como un número. Por ejemplo, nunca lo hemos sumado ni dividido entre algún número. Utilizaremos los símbolos ∞ y $-\infty$ de una manera nueva en esta sección, pero éstos aún no representan números.

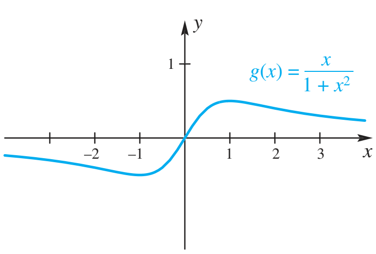


Figura 1

Límites al infinito Considere la función $g(x) = x/(1 + x^2)$ cuya gráfica se muestra en la figura 1. Hacemos esta pregunta: ¿qué le sucede a $g(x)$ cuando x se hace cada vez más grande? En símbolos, preguntamos por el valor de $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$.

Cuando escribimos $x \to \infty$, *no* queremos dar a entender que en un lugar muy, muy alejado a la derecha del eje x exista un número —más grande que todos los demás— al cual se aproxima x. En lugar de eso utilizamos $x \to \infty$ como una forma breve de decir que x se hace cada vez más grande sin cota.

En la tabla de la figura 2 hemos listado valores de $g(x) = x/(1 + x^2)$ para diversos valores de x. Parece que $g(x)$ se hace cada vez más pequeño conforme x se hace cada vez más grande. Escribimos

x	$\dfrac{x}{1+x^2}$
10	0.099
100	0.010
1000	0.001
10000	0.0001
↓	↓
∞	?

Figura 2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=0$$

Al experimentar con números negativos cada vez más lejanos del cero nos conduciría a escribir

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1+x^2}=0$$

Definiciones rigurosas de límites cuando $x\to\pm\infty$ En analogía con nuestra definición $\varepsilon-\delta$ para límites ordinarios, hacemos la siguiente definición.

Definición **Límite cuando $x\to\infty$**

Sea f definida en $[c,\infty)$ para algún número c. Decimos que $\lim_{x\to\infty}f(x)=L$, si para cada $\varepsilon>0$ existe un correspondiente número M, tal que

$$x>M\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$$

Notará que M puede depender de ε. En general, entre más pequeña sea ε, más grande tendrá que ser M. La gráfica en la figura 3 puede ayudarle a comprender lo que estamos diciendo.

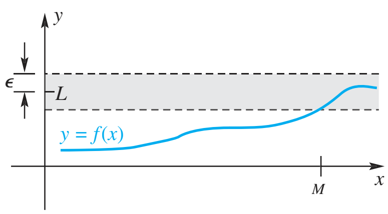


Figura 3

Definición **Límite cuando $x\to-\infty$**

Sea f definida en $(-\infty,c]$ para algún número c. Decimos que $\lim_{x\to-\infty}f(x)=L$ si para cada $\varepsilon>0$ existe un correspondiente número M, tal que

$$x<M\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$$

EJEMPLO 1 Demuestre que si k es un entero positivo, entonces

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^k}=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^k}=0$$

SOLUCIÓN Sea $\varepsilon>0$ dada. Después de un análisis preliminar (como en la sección 1.2), elegimos $M=\sqrt[k]{1/\varepsilon}$. Entonces $x>M$ implica que

$$\left|\frac{1}{x^k}-0\right|=\frac{1}{x^k}<\frac{1}{M^k}=\varepsilon$$

La demostración de la segunda proposición es similar. ■

Habiendo dado las definiciones de esta nueva clase de límites, debemos enfrentarnos a la pregunta de si el teorema principal de límites (teorema 1.3A) se cumple para ellos. La respuesta es sí, y la demostración es similar a la de las proposiciones originales. Observe cómo utilizamos este teorema en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 2 Demuestre que $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=0$.

SOLUCIÓN Aquí utilizamos un truco común: dividir el numerador y el denominador entre la potencia más alta de x que aparece en el denominador, esto es, x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x}{x^2}}{\dfrac{1+x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x^2}+1}$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}}{\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}+\lim_{x\to\infty}1}=\frac{0}{0+1}=0$$ ■

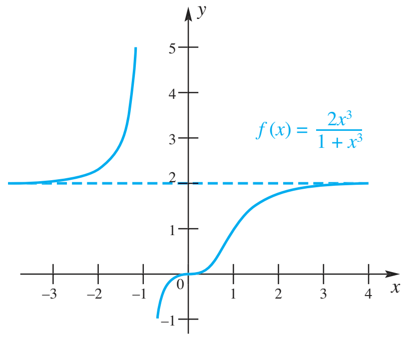


Figura 4

EJEMPLO 3 Encuentre $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3}{1 + x^3}$.

SOLUCIÓN La gráfica de $f(x) = 2x^3/(1 + x^3)$ se muestra en la figura 4. Para encontrar el límite, divida el numerador y el denominador entre x^3.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{1 + x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{1/x^3 + 1} = \frac{2}{0 + 1} = 2 \qquad \blacksquare$$

Límites de sucesiones El dominio para algunas funciones es el conjunto de los números naturales $\{1, 2, 3, \ldots\}$. En esta situación, por lo regular escribimos a_n en lugar de $a(n)$ para denotar al n-ésimo término de la sucesión, o $\{a_n\}$ para denotar a toda la sucesión. Por ejemplo, podríamos definir la sucesión por medio de $a_n = n/(n + 1)$. Considere lo que sucede cuando n se hace grande. Unos cuantos cálculos muestran que

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2}{3}, \quad a_3 = \frac{3}{4}, \quad a_4 = \frac{4}{5}, \quad \ldots, \quad a_{100} = \frac{100}{101}, \quad \ldots$$

Pareciera que estos valores se aproximan a 1, de modo que sería razonable decir que para esta sucesión $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. La siguiente definición proporciona significado a esta idea del límite de una sucesión.

Definición **Límite de una sucesión**

Sea a_n definida para todos los números naturales mayores o iguales que algún número c. Decimos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente número natural M, tal que

$$n > M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

Observe que esta definición es casi idéntica a la definición de $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. La única diferencia es que ahora pedimos que el argumento de la función sea un número natural. Como podríamos esperar, el teorema principal de los límites (teorema 1.3A) se cumple para las sucesiones.

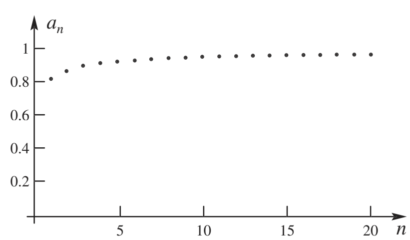


Figura 5

EJEMPLO 4 Determine $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n + 1}{n + 2}}$.

SOLUCIÓN La figura 5 muestra una gráfica de $a_n = \sqrt{\dfrac{n + 1}{n + 2}}$. Al aplicar el teorema 1.3A se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n + 1}{n + 2}} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n + 1}{n + 2}\right)^{1/2} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 1/n}{1 + 2/n}\right)^{1/2} = \left(\frac{1 + 0}{1 + 0}\right)^{1/2} = 1 \qquad \blacksquare$$

Necesitaremos el concepto de límite de una sucesión en la sección 3.7 y en el capítulo 4.

Límites infinitos Considere la gráfica de $f(x) = 1/(x - 2)$ que se muestra en la figura 6. Cuando x se acerca a 2 por la izquierda, la función parece que disminuye sin cota. De forma análoga, cuando x se aproxima a 2 por la derecha, la función parece que aumenta sin cota. Por lo tanto, no tiene sentido hablar acerca de $\lim\limits_{x\to2} 1/(x - 2)$, pero creemos que es razonable escribir

$$\lim_{x\to2^-} \frac{1}{x - 2} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to2^+} \frac{1}{x - 2} = \infty$$

Aquí está la definición precisa.

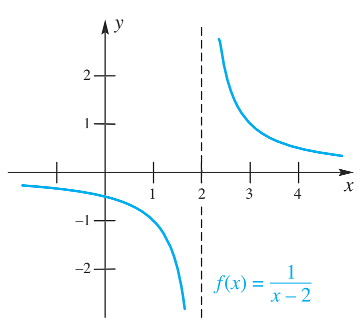


Figura 6

Definición **Límite infinito**

Decimos que $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \infty$, si para cada número positivo M corresponde una $\delta > 0$ tal que

$$0 < x - c < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

En otras palabras, $f(x)$ puede hacerse tan grande como deseemos (mayor que cualquier M que elijamos) tomando x lo suficientemente cerca, pero a la derecha de c. Existen definiciones correspondientes para

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = \infty \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x\to \infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

(Véase los problemas 51 y 52).

EJEMPLO 5 Encuentre $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2}$ y $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2}$.

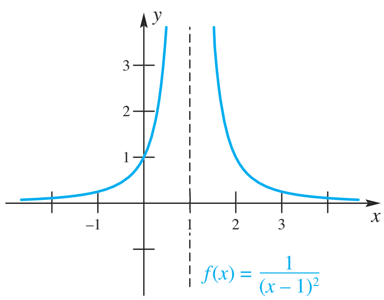


Figura 7

SOLUCIÓN La gráfica de $f(x) = 1/(x-1)^2$ se muestra en la figura 7. Cuando $x \to 1^+$, el denominador permanece positivo pero tiende a cero, mientras que el numerador es 1 para toda x. Así, la razón $1/(x-1)^2$ puede hacerse arbitrariamente grande restringiendo la cercanía de x respecto de 1, pero a la derecha de él. De manera análoga, cuando $x \to 1-$, el denominador es positivo y puede hacerse arbitrariamente cercano a cero. Así, $1/(x-1)^2$ puede hacerse arbitrariamente grande restringiendo a que x esté cerca de 1, pero a la izquierda de él. Por lo tanto, concluimos que

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

Ya que ambos límites son ∞, también podríamos escribir

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

■

EJEMPLO 6 Encuentre $\lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{x^2-5x+6}$.

SOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{(x-3)(x-2)}$$

Cuando $x \to 2^+$ vemos que $x + 1 \to 3$, $x - 3 \to -1$ y $x - 2 \to 0^+$; por lo tanto, el numerador se aproxima a 3, pero el denominador es negativo y tiende a cero. Concluimos que

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{(x-3)(x-2)} = -\infty$$

■

Relación con las asíntotas Las asíntotas se estudiaron brevemente en la sección 0.5, pero ahora podemos decir más acerca de ellas. La recta $x = c$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de $y = f(x)$, si cualquiera de las siguientes cuatro proposiciones es verdadera.

1. $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$
2. $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$
3. $\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty$
4. $\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$

Así, en la figura 6 la recta $x = 2$ es una asíntota vertical. Del mismo modo, en el ejemplo 6 las rectas $x = 2$ y $x = 3$, aunque no se muestran gráficamente, son asíntotas verticales.

De una forma similar, la recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de $y = f(x)$ si se cumple

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = b \quad \text{o} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = b$$

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal en las figuras 6 y 7.

EJEMPLO 7 Encuentre las asíntotas horizontales y verticales de la gráfica de $y = f(x)$, si

$$f(x) = \frac{2x}{x-1}$$

¿Existen los límites infinitos?

En las secciones anteriores pedimos que un límite sea igual a un número real. Por ejemplo, dijimos que $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2}$ no existe porque $1/(x-2)$ no se aproxima a un número real cuando x se aproxima a 2 por la derecha. Muchos matemáticos sostienen que este límite no existe, a pesar de que escribimos $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$; decir que el límite es ∞ es describir la forma particular en que el límite no existe. Aquí utilizaremos la frase "existe en el sentido infinito" para describir tales límites.

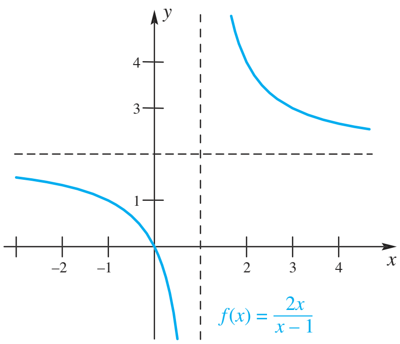


Figura 8

SOLUCIÓN Con frecuencia tenemos una asíntota vertical en un punto en donde el denominador es cero, y en este caso así es, ya que

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x-1} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty$$

Por otra parte,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1-1/x} = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$

y así $y = 2$ es una asíntota horizontal. La gráfica de $y = 2x/(x-1)$ se muestra en la figura 8. ■

Revisión de conceptos

1. Decir que $x \to \infty$ significa que _____; decir que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ significa que _____. Dé sus respuestas en lenguaje informal.

2. Decir que $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$ significa que _____; decir que $\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$ significa que _____. Dé sus respuestas en lenguaje informal.

3. Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = 6$, entonces la recta _____ es una asíntota _____ de la gráfica de $y = f(x)$.

4. Si $\lim_{x\to 6^+} f(x) = \infty$, entonces la recta _______ es una asíntota _______ de la gráfica de $y = f(x)$.

Conjunto de problemas 1.5

En los problemas del 1 al 42 determine los límites.

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-5}$

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{5-x^3}$

3. $\lim_{t\to-\infty} \frac{t^2}{7-t^2}$

4. $\lim_{t\to-\infty} \frac{t}{t-5}$

5. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x-5)(3-x)}$

6. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-8x+15}$

7. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^3-100x^2}$

8. $\lim_{\theta\to-\infty} \frac{\pi\theta^5}{\theta^5-5\theta^4}$

9. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3-x^2}{\pi x^3-5x^2}$

10. $\lim_{\theta\to\infty} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\theta^2-5}$

11. $\lim_{x\to\infty} \frac{3\sqrt{x^3}+3x}{\sqrt{2x^3}}$

12. $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{\pi x^3+3x}{\sqrt{2}x^3+7x}}$

13. $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1+8x^2}{x^2+4}}$

14. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+x+3}{(x-1)(x+1)}}$

15. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1}$

16. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$

17. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1}$

18. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1}$

19. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}$. *Sugerencia:* divida el numerador y el denominador entre x. Observe que, para $x > 0$, $\sqrt{x^2+3}/x = \sqrt{(x^2+3)/x^2}$.

20. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x+1}}{x+4}$

21. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{2x^2+3} - \sqrt{2x^2-5}\right)$. *Sugerencia:* multiplique y divida por $\sqrt{2x^2+3} + \sqrt{2x^2-5}$.

22. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - x\right)$

23. $\lim_{y\to-\infty} \frac{9y^3+1}{y^2-2y+2}$. *Sugerencia:* divida el numerador y el denominador entre y^2.

24. $\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n}$, donde $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ y n es un número natural.

25. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

26. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^3+2n+1}}$

27. $\lim_{x\to 4^+} \frac{x}{x-4}$

28. $\lim_{t\to -3^+} \frac{t^2-9}{t+3}$

29. $\lim_{t\to 3^-} \frac{t^2}{9-t^2}$

30. $\lim_{x\to \sqrt[3]{5}^+} \frac{x^2}{5-x^3}$

31. $\lim_{x\to 5^-} \frac{x^2}{(x-5)(3-x)}$

32. $\lim_{\theta\to \pi^+} \frac{\theta^2}{\operatorname{sen}\theta}$

33. $\lim_{x\to 3^-} \frac{x^3}{x-3}$

34. $\lim_{\theta\to (\pi/2)^+} \frac{\pi\theta}{\cos\theta}$

35. $\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-x-6}{x-3}$

36. $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+2x-8}{x^2-4}$

37. $\lim_{x\to 0^+} \frac{[\![x]\!]}{x}$

38. $\lim_{x\to 0^-} \frac{[\![x]\!]}{x}$

39. $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$ **40.** $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$

41. $\lim_{x\to 0^-} \frac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}$ **42.** $\lim_{x\to \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

GC *En los problemas del 43 al 48 encuentre las asíntotas horizontales y verticales para las gráficas de las funciones indicadas. Después dibuje sus gráficas.*

43. $f(x) = \frac{3}{x+1}$ **44.** $f(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$

45. $F(x) = \frac{2x}{x-3}$ **46.** $F(x) = \frac{3}{9-x^2}$

47. $g(x) = \frac{14}{2x^2+7}$ **48.** $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}$

49. La recta $y = ax + b$ se denomina **asíntota oblicua** a la gráfica de $\lim_{x\to\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ o $\lim_{x\to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$. Encuentre la asíntota oblicua para

$$f(x) = \frac{2x^4 + 3x^3 - 2x - 4}{x^3 - 1}$$

Sugerencia: Comience por dividir el denominador entre el numerador.

50. Encuentre la asíntota oblicua para

$$f(x) = \frac{3x^3 + 4x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$$

51. Utilizando los símbolos M y δ, dé definiciones precisas de cada expresión.

(a) $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$ (b) $\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty$

52. Utilizando los símbolos M y N, dé definiciones precisas de cada expresión.

(a) $\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$

53. Dé una demostración rigurosa de que si $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = B$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) + g(x)] = A + B$$

54. Hemos dado el significado de $\lim_{x\to A} f(x)$ para $A = a, a-, a^+, -\infty, \infty$. Además, en cada caso, este límite puede ser L (finito), $-\infty, \infty$ o es posible que no exista. Construya una tabla que ilustre cada uno de los 20 casos posibles.

55. Encuentre cada uno de los siguientes límites o indique que no existe, incluso, en el sentido infinito.

(a) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$ (b) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

(c) $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ (d) $\lim_{x\to\infty} x^{3/2} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

(e) $\lim_{x\to\infty} x^{-1/2} \operatorname{sen} x$ (f) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{x}\right)$

(g) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ (h) $\lim_{x\to\infty} \left[\operatorname{sen}\left(x + \frac{1}{x}\right) - \operatorname{sen} x\right]$

56. La Teoría Especial de la Relatividad de Einstein dice que la masa $m(v)$ de un objeto está relacionada con su velocidad v por medio de

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Aquí, m_0 es la masa en reposo y c es la velocidad de la luz. ¿Qué es $\lim_{v\to c^-} m(v)$?

GC *Utilice una computadora o una calculadora gráfica para encontrar los límites en los problemas del 57 al 64. Empiece por la gráfica de la función en una ventana adecuada.*

57. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + x + 1}{2x^2 - 1}$ **58.** $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{\frac{2x^2 - 3x}{5x^2 + 1}}$

59. $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 3x} - \sqrt{2x^2 - 5}\right)$

60. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{3x^2+1}}$ **61.** $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10}$

62. $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$ **63.** $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$

64. $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x}$

CAS *Encuentre los límites unilaterales en los problemas del 65 al 71. Comience por graficar la función en una ventana adecuada. Su computadora puede indicar que alguno de estos límites no existen, pero si es así, usted debe ser capaz de interpretar la respuesta como ∞ o –∞.*

65. $\lim_{x\to 3^-} \frac{\operatorname{sen}|x-3|}{x-3}$ **66.** $\lim_{x\to 3^-} \frac{\operatorname{sen}|x-3|}{\tan(x-3)}$

67. $\lim_{x\to 3^-} \frac{\cos(x-3)}{x-3}$ **68.** $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{x - \pi/2}$

69. $\lim_{x\to 0^+} \left(1 + \sqrt{x}\right)^{1/\sqrt{x}}$ **70.** $\lim_{x\to 0^+} \left(1 + \sqrt{x}\right)^{1/x}$

71. $\lim_{x\to 0^+} \left(1 + \sqrt{x}\right)^{x}$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** x aumenta sin cota; $f(x)$ se aproxima a L cuando x aumenta sin cota. **2.** $f(x)$ aumenta sin cota cuando x se aproxima a c por la derecha; $f(x)$ disminuye sin cota cuando x tiende a c por la izquierda. **3.** $y = 6$; horizontal **4.** $x = 6$; vertical.

1.6 Continuidad de funciones

En matemáticas y ciencias utilizamos la palabra *continuo* para describir un proceso que sigue sin cambios abruptos. De hecho, nuestra experiencia nos lleva a suponer que esto es una característica esencial de muchos procesos naturales. Es esta noción, con respecto a funciones, la que ahora queremos precisar. En las tres gráficas que se muestran en la figura 1, sólo la tercera exhibe continuidad en c. En las primeras dos gráficas, $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe, o bien existe pero no es igual a $f(c)$. Sólo en la tercera gráfica $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Una máquina discontinua

Un buen ejemplo de una máquina de discontinuidades es la máquina de servicio postal, que (en 2005, en Estados Unidos) cobraba \$0.37 por una carta de 1 onza, pero \$0.60 por una carta de un poco más de una onza.

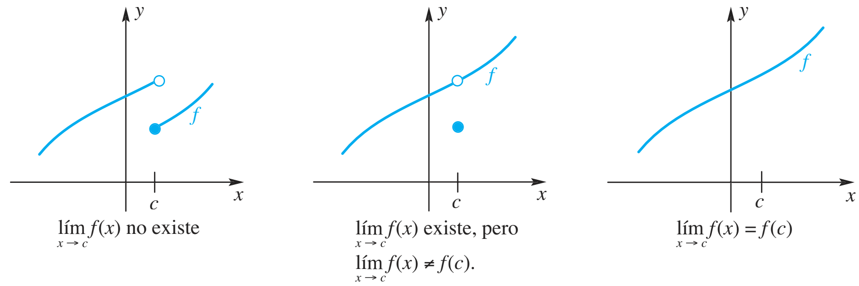


Figura 1

He aquí la definición formal.

Definición Continuidad en un punto

Sea f definida en un intervalo abierto que contiene a c. Decimos que f es **continua** en c si

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

Con esta definición queremos decir que necesitamos tres cosas:

1. que $\lim_{x\to c} f(x)$ existe,
2. que $f(c)$ existe (es decir, c está en el dominio de f) y
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Si cualquiera de estas tres no se cumple, entonces f es **discontinua** en c. Así, las funciones representadas por la primera y segunda gráficas de la figura 1 son discontinuas en c. Sin embargo, no parecen ser discontinuas en otros puntos de sus dominios.

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, $x \neq 2$. ¿Cómo debe definirse f en $x = 2$ para hacer que sea continua allí?

SOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

Por lo tanto, definimos $f(2) = 4$. La gráfica de la función resultante se muestra en la figura 2. De hecho, vemos que $f(x) = x + 2$ para toda x. ■

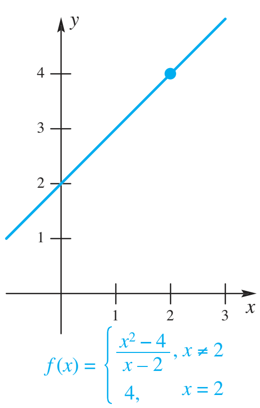


Figura 2

Un punto de discontinuidad c se denomina **removible**, si la función puede definirse o redefinirse en c, de modo que se haga continua la función. De otra forma, un punto de discontinuidad se denomina **no removible**. La función f del ejemplo 1 tiene una discontinuidad removible en 2, ya que podríamos definir $f(2) = 4$ y la función sería continua allí.

Continuidad de funciones conocidas La mayoría de las funciones con las que nos enfrentaremos en este texto son (1) continuas en todas partes o (2) continuas en todas partes, excepto en algunos puntos. En particular, el teorema 1.3B implica el siguiente resultado.

Teorema A **Continuidad de funciones polinomiales y racionales**

Una función polinomial es continua en todo número real c. Una función racional es continua en todo número real c en su dominio; es decir, en todas partes, excepto en donde su denominador es cero.

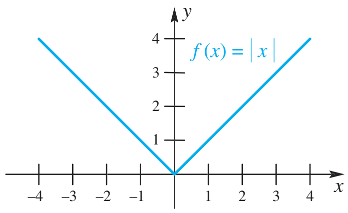


Figura 3

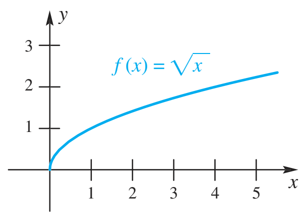


Figura 4

Recuerde la función valor absoluto $f(x) = |x|$; su gráfica se muestra en la figura 3. Para $x < 0, f(x) = -x$, es una función polinomial; para $x > 0, f(x) = x$, es otra función polinomial. Así, por el teorema A, $|x|$ es continua en todos los números diferentes de cero. Pero

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0 = |0|$$

(véase el problema 27 de la sección 1.2). Por lo tanto, $|x|$ también es continua en cero por lo que es continua en todas partes.

Por medio del teorema principal sobre límites (teorema 1.3A)

$$\lim_{x \to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} x} = \sqrt[n]{c}$$

siempre que $c > 0$, cuando n es par. Esto significa que $f(x) = \sqrt[n]{x}$ es continua en cada punto donde tiene sentido hablar acerca de continuidad. En particular, $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en cada número real $c > 0$ (véase la figura 4). Resumimos.

Teorema B Continuidad de las funciones valor absoluto y raíz *n*-ésima

La función valor absoluto es continua en todo número real c. Si n es impar, la función raíz n-ésima es continua en todo número real c; si n es par, la función raíz n-ésima es continua en todo número real positivo.

Continuidad en operaciones con funciones ¿Las operaciones ordinarias entre funciones preservan la continuidad? Sí, de acuerdo con el teorema siguiente. En éste, f y g son funciones, k es una constante y n es un entero positivo.

Teorema C Continuidad en operaciones con funciones

Si f y g son continuas en c, entonces también lo son $kf, f + g, f - g, f \cdot g, f/g$ (con tal que $g(c) \neq 0$), f^n, $\sqrt[n]{f}$ (siempre que $f(c) > 0$, si n es par).

Demostración Todos estos resultados son consecuencias fáciles de los correspondientes hechos para límites del teorema 1.3A. Por ejemplo, ese teorema, combinado con el hecho de que f y g son continuas en c, produce

$$\lim_{x \to c} f(x)g(x) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x) = f(c)g(c)$$

Esto es precisamente lo que significa decir que $f \cdot g$ es continua en c. ■

EJEMPLO 2 ¿En qué números $F(x) = (3|x| - x^2)/\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)$ es continua?

SOLUCIÓN No necesitamos considerar números no positivos, ya que F no está definida en tales números. Para cualquier número positivo, todas las funciones $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $|x|$, y x^2 son continuas (teoremas A y B). Se deduce, con base en el teorema C, que $3|x|$, $3|x| - x^2$, $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$, y por último,

$$\frac{(3|x| - x^2)}{\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)}$$

son continuas en cada número positivo. ■

La continuidad de funciones trigonométricas se deduce del teorema 1.4A.

Teorema D Continuidad de funciones trigonométricas

Las funciones seno y coseno son continuas en todo número real c. Las funciones tan x, cot x, sec x y csc x son continuas en todo número real c en sus dominios.

Demostración El teorema 1.4A dice que para todo número real c en el dominio de la función $\lim_{x \to c} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} c$, $\lim_{x \to c} \cos x = \cos c$, y así sucesivamente para las seis funciones trigonométricas. Éstas son exactamente las condiciones requeridas para que estas funciones sean continuas en cada número real en sus respectivos dominios. ■

EJEMPLO 3 Determine todos los puntos de discontinuidad de $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x(1-x)}$, $x \neq 0, 1$. Clasifique cada punto de discontinuidad como removible o no removible.

SOLUCIÓN Mediante el teorema D, el numerador es continuo en todo número real. El denominador también es continuo en todo número real, pero cuando $x = 0$ o $x = 1$, el denominador es 0. Por lo tanto, con base en el teorema C, f es continua en todo número real, excepto $x = 0$ y $x = 1$. Como

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x(1-x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{(1-x)} = (1)(1) = 1$$

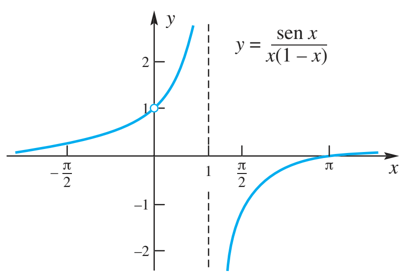


Figura 5

podríamos definir $f(0) = 1$ y, allí, la función sería continua. Por lo que $x = 0$ es una discontinuidad removible. Además, como

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x(1-x)} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x(1-x)} = \infty$$

no existe forma de definir $f(1)$ para hacer que f sea continua en $x = 1$. Por lo tanto, $x = 1$ es una discontinuidad no removible. Una gráfica de $y = f(x)$ se muestra en la figura 5. ■

Existe otra operación con funciones, la composición, que será muy importante en el trabajo posterior. También preserva la continuidad.

Teorema E **Teorema del límite de composición de funciones**

Si $\lim_{x \to c} g(x) = L$ y si f es continua en L, entonces

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right) = f(L)$$

En particular, si g es continua en c y f es continua en $g(c)$, entonces la composición $f \circ g$ es continua en c.

Demostración del teorema E (opcional)

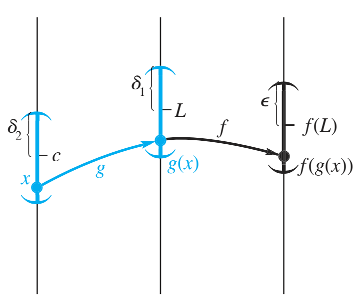


Figura 6

Demostración Sea $\varepsilon > 0$ dada. Como f es continua en L existe una $d_1 > 0$ correspondiente, tal que

$$|t - L| < \delta_1 \Rightarrow |f(t) - f(L)| < \varepsilon$$

y así (véase la figura 6)

$$|g(x) - L| < \delta_1 \Rightarrow |f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon$$

Pero ya que $\lim_{x \to c} g(x) = L$, para una $\delta_1 > 0$ dada existe una correspondiente $\delta_2 > 0$, tal que

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L| < \delta_1$$

Cuando reunimos estos dos hechos, tenemos

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon$$

Esto demuestra que

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(L)$$

La segunda proposición en el teorema E se deduce de la observación de que si g es continua en c entonces $L = g(c)$. ■

EJEMPLO 4 Demuestre que $h(x) = |x^2 - 3x + 6|$ es continua en todo número real.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = |x|$ y $g(x) = x^2 - 3x + 6$. Ambas son continuas en cada número real y, por lo tanto, su composición

$$h(x) = f(g(x)) = |x^2 - 3x + 6|$$

también lo es. ■

EJEMPLO 5 Demuestre que

$$h(x) = \operatorname{sen} \frac{x^4 - 3x + 1}{x^2 - x - 6}$$

es continua excepto en 3 y –2.

SOLUCIÓN $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$. Así, la función racional

$$g(x) = \frac{x^4 - 3x + 1}{x^2 - x - 6}$$

es continua excepto en 3 y –2 (teorema A). Del teorema D sabemos que la función seno es continua en todo número real. Así, con base en el teorema E concluimos que, como $h(x) = \operatorname{sen}(g(x))$, h también es continua excepto en 3 y –2. ■

Continuidad en un intervalo Hasta el momento hemos estudiado continuidad en un punto. Ahora, deseamos analizar la continuidad en un intervalo. La continuidad en un intervalo tiene que significar continuidad en cada punto de ese intervalo. Esto es exactamente lo que significa para un intervalo *abierto*.

Cuando consideramos un intervalo cerrado $[a, b]$, nos enfrentamos a un problema. Podría ser que f incluso no esté definida a la izquierda de a (por ejemplo, esto ocurre para $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 0$), así que hablando estrictamente, $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe. Elegimos darle la vuelta a este problema diciendo que f es continua en $[a, b]$ si es continua en cada punto de (a, b) y si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$. Resumimos esto en una definición formal.

Definición Continuidad en un intervalo

La función f es **continua por la derecha** en a si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y **continua por la izquierda** en b si $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Decimos que f es **continua en un intervalo abierto** si es continua en cada punto de ese intervalo. Es **continua en el intervalo cerrado** $[a, b]$ si es continua en (a, b), continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.

Por ejemplo, es correcto decir que $f(x) = 1/x$ es continua en $(0, 1)$ y que $g(x) = \sqrt{x}$ es continua en $[0, 1]$.

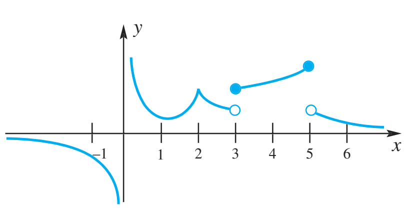


Figura 7

EJEMPLO 6 Mediante la definición anterior describa las propiedades de la continuidad de la función cuya gráfica está dibujada en la figura 7.

SOLUCIÓN La función parece que es continua en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$ y $(5, \infty)$ y también en el intervalo cerrado $[3, 5]$ ■

EJEMPLO 7 ¿Cuál es el intervalo más grande sobre el cual la función definida por $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ es continua?

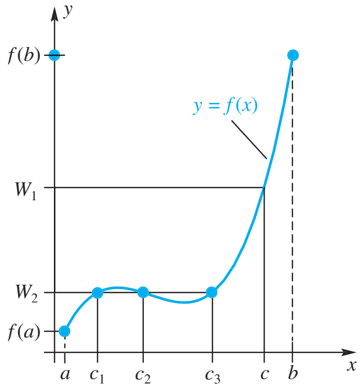


Figura 8

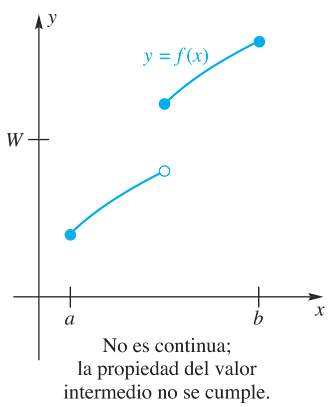


Figura 9

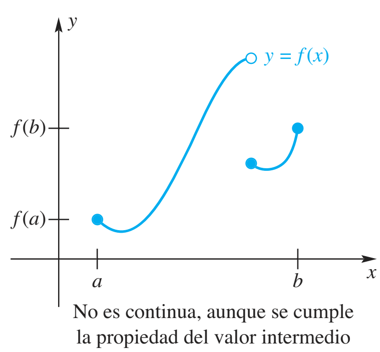


Figura 10

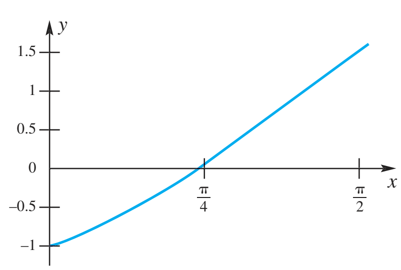


Figura 11

SOLUCIÓN El dominio de g es el intervalo $[-2, 2]$. Si c pertenece al intervalo abierto $(-2, 2)$, entonces, por el teorema E, g es continua en c; de aquí que g es continua en $(-2, 2)$. Los límites laterales son

$$\lim_{x\to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - \left(\lim_{x\to -2^+} x\right)^2}\sqrt{4 - 4} = 0 = g(-2)$$

y

$$\lim_{x\to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - \left(\lim_{x\to 2^-} x\right)^2} = \sqrt{4 - 4} = 0 = g(2)$$

Esto implica que g es continua por la derecha en -2 y continua por la izquierda en 2. Así, g es continua en su dominio, el intervalo cerrado $[-2, 2]$. ■

De manera intuitiva, que f sea continua en $[a, b]$ significa que la gráfica de f en $[a, b]$ no debe tener saltos, de modo que debemos ser capaces de "dibujar" la gráfica de f desde el punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$ sin levantar nuestro lápiz del papel. Así, la función f debe tomar todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$. Esta propiedad se establece de manera más precisa en el teorema F.

Teorema F **Teorema del valor intermedio**

Sea f una función definida en $[a, b]$ y sea W un número entre $f(a)$ y $f(b)$. Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe al menos un número c entre a y b, tal que $f(c) = W$.

La figura 8 muestra la gráfica de una función $f(x)$ que es continua en $[a, b]$. El teorema del valor intermedio dice que para toda W en $(f(a), f(b))$ debe existir una c en $[a, b]$, tal que $f(c) = W$. En otras palabras, f toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$. La continuidad es necesaria para este teorema, pues de otra forma es posible encontrar una función f y un número W entre $f(a)$ y $f(b)$, tal que no exista una c en $[a, b]$ que satisfaga $f(c) = W$. La figura 9 muestra un ejemplo de tal función.

Parece claro que la continuidad es suficiente, aunque una demostración formal de este resultado es difícil. Dejamos la demostración para obras más avanzadas.

El inverso de este teorema, el cual no es cierto en general, dice que si f toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces f es continua. Las figuras 8 y 10 muestran funciones que toman todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$, pero la función en la figura 10 no es continua en $[a, b]$. Sólo porque una función tenga la propiedad del valor intermedio no significa que deba ser continua.

El teorema del valor intermedio puede usarse para decirnos algo acerca de las soluciones de ecuaciones, como lo muestra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 8 Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que la ecuación $x - \cos x = 0$ tiene una solución entre $x = 0$ y $x = \pi/2$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = x - \cos x$, y sea $W = 0$. Entonces $f(0) = 0 - \cos 0 = -1$ y $f(\pi/2) = \pi/2 - \cos \pi/2 = \pi/2$. Como f es continua en $[0, \pi/2]$ y puesto que $W = 0$ está entre $f(0)$ y $f(\pi/2)$, el teorema del valor intermedio implica la existencia de una c en el intervalo $(0, \pi/2)$ con la propiedad de que $f(c) = 0$. Tal c es una solución para la ecuación $x - \cos x = 0$. La figura 11 sugiere que existe exactamente una de tales c.

Podemos ir un paso más adelante. El punto medio del intervalo $[0, \pi/2]$ es el punto $x = \pi/4$. Cuando evaluamos $f(\pi/4)$ obtenemos

$$f(\pi/4) = \frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.0782914$$

que es mayor a cero. Así, $f(0) < 0$ y $f(\pi/4) > 0$, de tal manera que otra aplicación del teorema del valor intermedio nos dice que existe una c entre 0 y $\pi/4$, tal que $f(c) = 0$. Hemos reducido el intervalo que contiene a la c deseada de $[0, \pi/2]$ a $[0, \pi/4]$. Nada nos impide seleccionar el punto medio de $[0, \pi/4]$ y evaluar f en ese punto, y por ello reducir aún más el intervalo que contiene a c. Este proceso puede continuar de manera indefinida hasta que encontremos que c está en un intervalo suficientemente pequeño. Este método para obtener una solución se denomina *método de bisección*, y los estudiaremos en la sección 3.7. ■

El teorema del valor intermedio también puede conducir a algunos resultados sorprendentes.

EJEMPLO 9 Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que en un anillo circular siempre existen dos puntos opuestos con la misma temperatura.

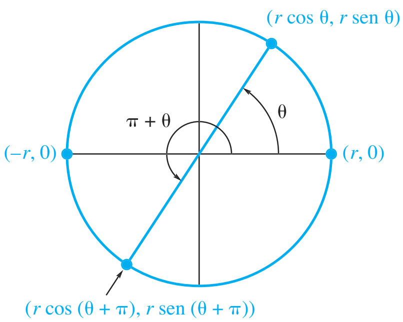


Figura 12

SOLUCIÓN Elija coordenadas para este problema de modo que el centro del anillo sea el origen, y sea r el radio del anillo. (Véase la figura 12). Defina $T(x, y)$ como la temperatura en el punto (x, y). Considere un diámetro del círculo que forma un ángulo θ con el eje x y defina $f(\theta)$ como la diferencia de las temperaturas entre los puntos que forman ángulos de θ y $\theta + \pi$, esto es,

$$f(\theta) = T(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) - T(r\cos(\theta+\pi), r\,\mathrm{sen}(\theta+\pi))$$

Con esta definición

$$f(0) = T(r, 0) - T(-r, 0)$$
$$f(\pi) = T(-r, 0) - T(r, 0) = -\left[T(r, 0) - T(-r, 0)\right] = -f(0)$$

Así, $f(0)$ y $f(\pi)$ son cero, o una es positiva y la otra es negativa. Si ambas son cero, entonces hemos encontrado los dos puntos requeridos. De otra forma, podemos aplicar el teorema del valor intermedio. Suponiendo que la temperatura varía de manera continua, concluimos que existe c entre 0 y π, tal que $f(c) = 0$. Así, para los dos puntos con ángulos c y $c + \pi$, las temperaturas son iguales. ■

Revisión de conceptos

1. Una función f es continua en c si _______ $= f(c)$.

2. La función $f(x) = [\![x]\!]$ es discontinua en _______.

3. Se dice que una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, si es continua en cada punto de (a, b) y si _______ y _______.

4. El teorema del valor intermedio dice que si una función f es continua en $[a, b]$ y W es un número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un número c entre _______ y _______ tal que _______.

Conjunto de problemas 1.6

En los problemas del 1 al 15 establezca si la función indicada es continua en 3. Si no es continua, diga por qué.

1. $f(x) = (x-3)(x-4)$

2. $g(x) = x^2 - 9$

3. $h(x) = \dfrac{3}{x-3}$

4. $g(t) = \sqrt{t-4}$

5. $h(t) = \dfrac{|t-3|}{t-3}$

6. $h(t) = \dfrac{|\sqrt{(t-3)^4}|}{t-3}$

7. $f(t) = |t|$

8. $g(t) = |t-2|$

9. $h(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$

10. $f(x) = \dfrac{21-7x}{x-3}$

11. $r(t) = \begin{cases} \dfrac{t^3-27}{t-3} & \text{si } t \neq 3 \\ 27 & \text{si } t = 3 \end{cases}$

12. $r(t) = \begin{cases} \dfrac{t^3-27}{t-3} & \text{si } t \neq 3 \\ 23 & \text{si } t = 3 \end{cases}$

13. $f(t) = \begin{cases} t-3 & \text{si } t \leq 3 \\ 3-t & \text{si } t > 3 \end{cases}$

14. $f(t) = \begin{cases} t^2-9 & \text{si } t \leq 3 \\ (3-t)^2 & \text{si } t > 3 \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} -3x+7 & \text{si } x \leq 3 \\ -2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

16. Con base en la gráfica de g (véase la figura 13), indique los valores en donde g es discontinua. Para cada uno de estos valores establezca si g es continua por la derecha, por la izquierda o ninguna.

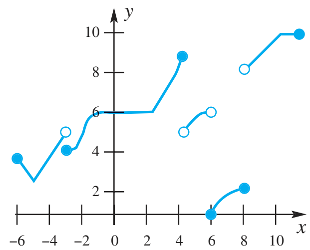


Figura 13

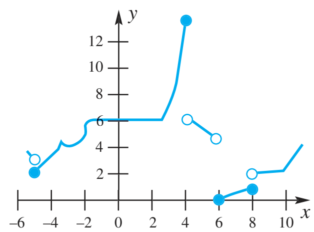


Figura 14

17. A partir de la gráfica de h dada en la figura 14, indique los intervalos en los que h es continua.

En los problemas del 18 al 23 la función dada no está definida en cierto punto. ¿Cómo debe definirse para hacerla continua en ese punto? (Véase el ejemplo 1).

18. $f(x) = \dfrac{x^2 - 49}{x - 7}$ **19.** $f(x) = \dfrac{2x^2 - 18}{3 - x}$

20. $g(\theta) = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$ **21.** $H(t) = \dfrac{\sqrt{t} - 1}{t - 1}$

22. $\phi(x) = \dfrac{x^4 + 2x^2 - 3}{x + 1}$ **23.** $F(x) = \operatorname{sen}\dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

En los problemas del 24 al 35, ¿en qué puntos, si los hay, las funciones son discontinuas?

24. $f(x) = \dfrac{3x + 7}{(x - 30)(x - \pi)}$

25. $f(x) = \dfrac{33 - x^2}{x\pi + 3x - 3\pi - x^2}$

26. $h(\theta) = |\operatorname{sen}\theta + \cos\theta|$ **27.** $r(\theta) = \tan\theta$

28. $f(u) = \dfrac{2u + 7}{\sqrt{u + 5}}$ **29.** $g(u) = \dfrac{u^2 + |u - 1|}{\sqrt[3]{u + 1}}$

30. $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 + x^2}}$ **31.** $G(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

32. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

33. $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ -x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

34. $f(t) = [\![t]\!]$ **35.** $g(t) = [\![t + \tfrac{1}{2}]\!]$

36. Dibuje la gráfica de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes.

(a) Su dominio es $[-2, 2]$.

(b) $f(-2) = f(-1) = f(1) = f(2) = 1$.

(c) Es discontinua en -1 y 1.

(d) Es continua por la derecha en -1 y continua por la izquierda en 1.

37. Haga el bosquejo de la gráfica de una función que tenga dominio $[0, 2]$ y sea continua en $[0, 2)$, pero no en $[0, 2]$.

38. Bosqueje la gráfica de una función que tenga dominio $[0, 6]$ y sea continua en $[0, 2]$ y en $(2, 6]$, pero que no sea continua en $[0, 6]$.

39. Haga el bosquejo de la gráfica de una función que tenga dominio $[0, 6]$ y sea continua en $(0, 6)$ pero no en $[0, 6]$.

40. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional} \\ -x & \text{si } x \text{ si es irracional} \end{cases}$$

Dibuje la gráfica de esta función lo mejor que pueda y decida en dónde es continua.

En los problemas del 41 al 48 determine si la función es continua en el punto dado c. Si la función no es continua, determine si la discontinuidad es removible o no removible.

41. $f(x) = \operatorname{sen} x$; $c = 0$ **42.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 100}{x - 10}$; $c = 10$

43. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$; $c = 0$ **44.** $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$; $c = 0$

45. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ **46.** $F(x) = x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$; $c = 0$

47. $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$; $c = 0$ **48.** $f(x) = \dfrac{4 - x}{2 - \sqrt{x}}$; $c = 4$

49. Una compañía de teléfonos celulares cobra \$0.12 por hacer una llamada más \$0.08 por minuto o fracción (por ejemplo, una llamada telefónica que dure 2 minutos y 5 segundos cuesta \$0.12 + 3 × \$0.08). Haga el bosquejo de una gráfica del costo de una llamada como función de la duración t de la llamada. Analice la continuidad de esta función.

50. Una compañía que renta automóviles cobra \$20 por día, con 200 millas incluidas. Por cada 100 millas adicionales, o cualquier fracción de éstas, la compañía cobra \$18. Haga el bosquejo de una gráfica del costo por la renta de un automóvil durante un día como función de las millas recorridas. Analice la continuidad de esta función.

51. Una compañía de taxis cobra \$2.50 durante el primer cuarto de milla y \$0.20 por cada $\frac{1}{8}$ de milla adicional. Haga un bosquejo del costo de un viaje en taxi como función del número de millas recorridas. Analice la continuidad de esta función.

52. Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que $x^3 + 3x - 2 = 0$ tiene una solución real entre 0 y 1.

53. Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que $(\cos t)t^3 + 6\operatorname{sen}^5 t - 3 = 0$ tiene una solución real entre 0 y 2π.

GC **54.** Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $[0, 5]$. Haga un bosquejo de la gráfica de $y = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$ en $[0, 5]$. En realidad, ¿cuántas soluciones tiene esta ecuación?

GC **55.** Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que $\sqrt{x} - \cos x = 0$ tiene una solución entre 0 y $\pi/2$. Haga un acercamiento de la gráfica de $y = \sqrt{x} - \cos x$ para determinar un intervalo que tenga longitud 0.1 y que contenga esta solución.

56. Demuestre que la ecuación $x^5 + 4x^3 - 7x + 14 = 0$ tiene al menos una solución real.

57. Pruebe que f es continua en c si y sólo si $\lim_{t \to 0} f(c + t) = f(c)$.

58. Demuestre que si f es continua en c y $f(c) > 0$, existe un intervalo $(c - \delta, c + \delta)$, tal que $f(x) > 0$ en este intervalo.

59. Demuestre que si f es continua en $[0, 1]$ y ahí satisface $0 \le f(x) \le 1$, entonces f tiene un *punto fijo*; esto es, existe un número c en $[0, 1]$, tal que $f(c) = c$. *Sugerencia:* aplique el teorema del valor intermedio a $g(x) = x - f(x)$.

60. Encuentre los valores de a y b de modo que la siguiente función sea continua en todas partes.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 3x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

61. Una liga estirada cubre el intervalo [0, 1]. Los extremos se sueltan y la liga se contrae de modo que cubre el intervalo $[a, b]$ con $a \geq 0$ y $b \leq 1$. Demuestre que esto resulta en un punto de la liga (en realidad exactamente un punto) que estará en donde estaba originalmente. Véase el problema 59.

62. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$. Entonces $f(-2) = -\dfrac{1}{3}$ y $f(2) = 1$. ¿El teorema del valor intermedio implica la existencia de un número c entre -2 y 2, tal que $f(c) = 0$? Explique.

63. Iniciando a las 4 a. m., un excursionista escala lentamente hacia la cima de una montaña, a donde llega al mediodía. Al día siguiente, regresa a por la misma ruta, iniciando a las 5 a. m.; a las 11 de la mañana llega al pie de la montaña. Demuestre que en algún punto a lo largo de la ruta su reloj mostraba la misma hora en ambos días.

64. Sea D una región acotada, pero arbitraria en el primer cuadrante. Dado un ángulo θ, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, D puede ser circunscrita por medio de un rectángulo cuya base forme un ángulo θ con el eje x, como se muestra en la figura 15. Demuestre que para algún ángulo este rectángulo es un cuadrado. (Esto significa que *cualquier* región acotada puede ser encerrada dentro de un *cuadrado*).

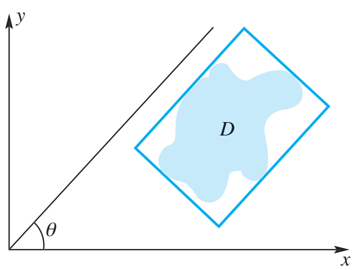


Figura 15

65. La fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre un objeto que tiene masa m y que se encuentra a una distancia r del centro de la Tierra es

$$g(r) = \begin{cases} \dfrac{GMmr}{R^3}, & \text{si } r < R \\[2mm] \dfrac{GMm}{r^2}, & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

Aquí, G es la constante gravitacional, M es la masa de la Tierra y R es el radio de la Tierra. ¿Es g una función continua de r?

66. Suponga que f es continua en $[a, b]$ y nunca es cero allí. ¿Es posible que f cambie de signo en $[a, b]$? Explique.

67. Sea $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para toda x y y, y suponga que f es continua en $x = 0$.

(a) Demuestre que f es continua en todas partes.

(b) Demuestre que existe una constante m, tal que $f(t) = mt$ para toda t (véase el problema 43 de la sección 0.5).

68. Pruebe que si $f(x)$ es una función continua en un intervalo, entonces también lo es la función $|f(x)| = \sqrt{(f(x))^2}$.

69. Demuestre que si $g(x) = |f(x)|$ es continua, no necesariamente es cierto que $f(x)$ sea continua.

70. Sea $f(x) = 0$, si x es irracional, y sea $f(x) = 1/q$, si x es el número racional p/q en su mínima expresión $(q > 0)$.

(a) Dibuje, lo mejor que pueda, la gráfica de f en $(0, 1)$.

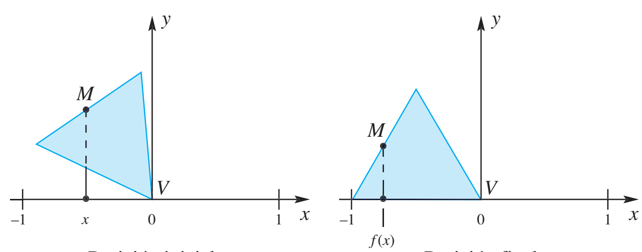
(b) Demuestre que f es continua en cada número irracional en $(0, 1)$, pero es discontinua en cada número racional en $(0, 1)$.

71. Un bloque delgado en forma de triángulo equilátero con lado de longitud 1 unidad tiene su cara en la vertical del plano xy con un vértice en el origen. Bajo la influencia de la gravedad, girará alrededor de V hasta que un lado golpee el piso, en el eje x (véase la figura 16). Denótese con x la abscisa inicial del punto medio M, del lado opuesto a V, y sea $f(x)$ la abscisa final de este punto. Suponga que el bloque queda en equilibrio cuando M está directamente arriba de V.

(a) Determine el dominio y rango de f.

(b) En el dominio de f, ¿en dónde es discontinua?

(c) Identifique cualesquiera puntos fijos de f (véase el problema 59).



Posición inicial Posición final

Figura 16

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\lim_{x \to c} f(x)$ **2.** Todos los enteros **3.** $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$; $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ **4.** a; b; $f(c) = W$

1.7 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

A cada una de las siguientes aseveraciones responda con verdadero o falso. Justifique sus respuestas.

1. Si $f(c) = L$, entonces $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

2. Si $\lim_{x \to c} f(x) = L$, entonces $f(c) = L$.

3. Si $\lim_{x \to c} f(x)$ existe, entonces $f(c)$ existe.

4. Si $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, entonces para toda $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$, tal que $0 < |x| < \delta$ implica $|f(x)| < \varepsilon$.

5. Si $f(c)$ no está definida, entonces $\lim_{x \to c} f(x)$ no existe.

6. Las coordenadas del agujero en la gráfica de $y = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$ son $(5, 10)$.

7. Si $\pi(x)$ es un polinomio, entonces $\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$.

8. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ no existe.

9. Para todo número real c, $\lim_{x \to c} \tan x = \tan c$.

10. $\tan x$ es continua en todo punto de su dominio.

11. La función $f(x) = 2\ \text{sen}^2 x - \cos x$ es continua en todos los números reales.

12. Si f es continua en c, entonces $f(c)$ existe.

13. Si f es continua en el intervalo $(1, 3)$, entonces f es continua en 2.

14. Si f es continua en $[0, 4]$, entonces $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe.

15. Si f es una función continua tal que $A \le f(x) \le B$ para toda x, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe y satisface $A \le \lim_{x\to\infty} f(x) \le B$.

16. Si f es continua en (a, b), entonces $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ para toda c en (a, b).

17. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\text{sen}\, x}{x} = 1$

18. Si la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal de la gráfica de $y = f(x)$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$.

19. La gráfica de $y = \tan x$ tiene muchas asíntotas horizontales.

20. La gráfica de $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ tiene dos asíntotas verticales.

21. $\lim_{t\to 1^+} \dfrac{2t}{t - 1} = \infty$.

22. Si $\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x)$, entonces f es continua en $x = c$.

23. Si $\lim_{x\to c} f(x) = f\left(\lim_{x\to c} x\right)$, entonces f es continua en $x = c$.

24. La función $f(x) = [\![x/2]\!]$ es continua en $x = 2.3$.

25. Si $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) > 0$, entonces $f(x) < 1.001 f(2)$ para toda x en algún intervalo que contenga a 2.

26. Si $\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)]$ existe, entonces existen $\lim_{x\to c} f(x)$ y $\lim_{x\to c} g(x)$.

27. Si $0 \le f(x) \le 3x^2 + 2x^4$ para toda x, entonces $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

28. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} f(x) = M$, entonces $L = M$.

29. Si $f(x) \ne g(x)$ para toda x, entonces $\lim_{x\to c} f(x) \ne \lim_{x\to c} g(x)$.

30. Si $f(x) < 10$ para toda x y $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe, entonces $\lim_{x\to 2} f(x) < 10$.

31. Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$, entonces $\lim_{x\to a} |f(x)| = |b|$.

32. Si f es continua y positiva en $[a, b]$, entonces $1/f$ debe tomar todos los valores entre $1/f(a)$ y $1/f(b)$.

Problemas de examen

En los problemas del 1 al 22 encuentre los límites indicados o establezca que no existen.

1. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x - 2}{x + 2}$

2. $\lim_{u\to 1} \dfrac{u^2 - 1}{u + 1}$

3. $\lim_{u\to 1} \dfrac{u^2 - 1}{u - 1}$

4. $\lim_{u\to 1} \dfrac{u + 1}{u^2 - 1}$

5. $\lim_{x\to 2} \dfrac{1 - 2/x}{x^2 - 4}$

6. $\lim_{z\to 2} \dfrac{z^2 - 4}{z^2 + z - 6}$

7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{\text{sen}\, 2x}$

8. $\lim_{y\to 1} \dfrac{y^3 - 1}{y^2 - 1}$

9. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$

10. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x}$

11. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$

12. $\lim_{x\to 1/2^+} [\![4x]\!]$

13. $\lim_{t\to 2^-} ([\![t]\!] - t)$

14. $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$

15. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, 5x}{3x}$

16. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{3x}$

17. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x - 1}{x + 2}$

18. $\lim_{t\to\infty} \dfrac{\text{sen}\, t}{t}$

19. $\lim_{t\to 2} \dfrac{t + 2}{(t - 2)^2}$

20. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x}{x}$

21. $\lim_{x\to \pi/4^-} \tan 2x$

22. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1 + \text{sen}\, x}{x}$

23. Por medio de argumentos ε-δ demuestre que $\lim_{x\to 3} (2x + 1) = 7$.

24. Sea $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

Determine cada valor.

(a) $f(1)$ (b) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

(c) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ (d) $\lim_{x\to -1} f(x)$

25. Con respecto a f del problema 24. (a) ¿Cuáles son los valores de x en los cuales f es discontinua? (b) ¿Cómo se debe definir f en $x = -1$ para hacer que sea continua allí?

26. Proporcione la definición ε–δ en cada caso.

(a) $\lim_{u\to a} g(u) = M$ (b) $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

27. Si $\lim_{x\to 3} f(x) = 3$ y $\lim_{x\to 3} g(x) = -2$ y si g es continua en $x = 3$, encuentre cada valor.

(a) $\lim_{x\to 3} [2f(x) - 4g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 3} g(x) \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

(c) $g(3)$ (d) $\lim_{x\to 3} g(f(x))$

(e) $\lim_{x\to 3} \sqrt{f^2(x) - 8g(x)}$ (f) $\lim_{x\to 3} \dfrac{|g(x) - g(3)|}{f(x)}$

28. Dibuje la gráfica de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes.

(a) Su dominio es $[0, 6]$.

(b) $f(0) = f(2) = f(4) = f(6) = 2$.

(c) f es continua, excepto en $x = 2$.

(d) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to 5^+} f(x) = 3$.

29. Sea $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \le 0 \\ ax + b & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

Determine a y b de modo que f sea continua en todas partes.

30. Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que la ecuación $x^5 - 4x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene al menos una solución entre $x = 2$ y $x = 3$.

En los problemas del 31 al 36 determina las ecuaciones de todas las asíntotas horizontales y verticales para la función dada.

31. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

32. $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

33. $F(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

34. $G(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

35. $h(x) = \tan 2x$

36. $H(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{x^2}$

PROBLEMAS DE REPASO E INTRODUCCIÓN

1. Sea $f(x) = x^2$. Determine y simplifique cada uno de lo siguiente.

(a) $f(2)$

(b) $f(2.1)$

(c) $f(2.1) - f(2)$

(d) $\dfrac{f(2.1) - f(2)}{2.1 - 2}$

(e) $f(a + h)$

(f) $f(a + h) - f(a)$

(g) $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a}$

(h) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a}$

2. Repita las partes desde (a) hasta (h) del problema 1 para la función $f(x) = 1/x$.

3. Repita las partes desde (a) hasta (h) del problema 1 para la función $f(x) = \sqrt{x}$.

4. Repita las partes desde (a) hasta (h) del problema 1 para la función $f(x) = x^3 + 1$.

5. Escriba los primeros dos términos en el desarrollo de los binomios siguientes:

(a) $(a + b)^3$

(b) $(a + b)^4$

(c) $(a + b)^5$

6. Con base en sus resultados del problema 5 haga una conjetura acerca de los primeros dos términos en el desarrollo de $(a + b)^n$ para una n arbitraria.

7. Utilice una identidad trigonométrica para escribir $\operatorname{sen}(x + h)$ en términos de $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} h$, $\cos x$ y $\cos h$.

8. Utilice una identidad trigonométrica para escribir $\cos(x + h)$ en términos de $\cos x$, $\cos h$, $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{sen} h$.

9. Una rueda con centro en el origen y radio de 10 centímetros gira en sentido contrario a las manecillas del reloj con una rapidez de 4 revoluciones por segundo. Un punto P en el borde de la rueda se encuentra en la posición $(10, 0)$ en el instante $t = 0$.

(a) ¿Cuáles son las coordenadas de P en los instantes $t = 1, 2, 3$?

(b) ¿En qué primer instante el punto P regresará a la posición inicial $(10, 0)$?

10. Suponga que una pompa de jabón conserva su forma esférica cuando se expande. En el instante $t = 0$ la burbuja de jabón tiene radio de 2 centímetros. En el instante $t = 1$, el radio aumentó a 2.5 centímetros. En este intervalo de 1 segundo, ¿cuánto cambió el volumen?

11. Un aeroplano despega de un aeropuerto al mediodía y vuela con rumbo norte a 300 millas por hora. Otro avión parte del mismo aeropuerto una hora después y vuela con rumbo este a 400 millas por hora.

(a) ¿Cuáles son las posiciones de los aeroplanos a las 2:00 P. M.?

(b) ¿Cuál es la distancia que separa a los dos aeroplanos a las 2:00 P. M.?

(c) ¿Cuál es la distancia entre los aeroplanos a las 2:15 P. M.?