

BREVIARIO DE COSMOLOGIA

*Notas de Luis A. Aguilar
Inst. de Astronomía, UNAM
aguilar@astro.unam.mx
Verano del 2000*

I. INTRODUCCION

“Existen siete ventanas en la cabeza, dos fosas nasales, dos oídos, dos ojos y una boca; de igual manera, en los cielos hay dos estrellas favorables, dos no propicias, dos luminarias, y Mercurio solitario, indeciso e indiferente. De lo anterior y muchos otros fenómenos similares de la Naturaleza, tales como los siete metales, etc., que resulta tedioso enumerar, concluimos que el número de planetas es necesariamente siete

Además, los Judíos y otras naciones antiguas, así como europeos modernos, han adoptado la división de la semana en siete días, y los han nombrado de acuerdo a dichos planetas; si ahora incrementamos el número de planetas, entonces todo el sistema es destruido

Por si esto fuese poco, los satélites son invisibles al ojo y por tanto no pueden tener influencia alguna sobre la Tierra y son completamente inútiles y por tanto no existen.”

*Francesco Sizzi (1611)
Comentario sobre el descubrimiento hecho por Galileo
de satélites alrededor de Júpiter.*

El propósito de estas notas es el de dar un panorama razonablemente completo del estado actual de la Cosmología moderna. Estas notas van dirigidas a estudiantes del último año de bachillerato que estén interesados en estas cuestiones. Siendo la Cosmología un tema muy popular, existen muchas obras dirigidas al público en general. Sin embargo son pocas las obras existentes en nuestro idioma. Mas aún, dado la dificultad del tema, la gran mayoría de estas obras se limitan a hacer una relatoría de los hechos sin dar un sentido de lo que se encuentra detrás de los resultados. Si bien esto es algo comprensible en obras dedicadas al público en general, el propósito de estas notas es el de tratar de ir mas allá de una descripción. Estas notas suponen conocimientos de álgebra y geometría. Un conocimiento somero de cálculo diferencial de una variable es deseable, mas no necesario. Los resultados requeridos del cálculo se introducen en un apéndice y deben hacer autosuficientes las presentes notas para estudiantes del nivel indicado.

II. EL UNIVERSO DE NEWTON

“Monsieur Laplace, me dicen que usted ha escrito este enorme libro sobre el sistema del Universo y que en ningún lado ha mencionado su creador.”

“No necesito de esta hipótesis”

Diálogo entre Napoleón Bonaparte y Pierre Simon Laplace, comentando sobre la publicación de la obra “Mecánica Celeste” (1799)

En este breviarario no consideraremos teorías o concepciones cosmológicas previas a la formulación del método científico moderno, que podemos decir inicia con el trabajo de *Galileo Galilei* (1564–1642) en Italia a principios del siglo XVII. Esto debido a que concepciones anteriores corresponden mas a la Mitología (como las concepciones cosmológicas de los antiguos Griegos), o son de caracter puramente especulativos (como los modelos del Universo de algunos filósofos Griegos).

En 1687 *Isaac Newton* (1642–1727) publica en Inglaterra su obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Principios Matemáticos de Filosofía Natural), que marca el inicio de la Física Moderna. En esta obra, Newton propone la forma matemática de la *fuerza de gravedad*:

*“ Planetas omnes in se muto graves esse jam ante probavimus,
ut & gravitatem in unumquemque seorsim spectatum
esse reciproce ut quadratum distantiaꝝ locorum a centro planetæ .
Et inde consequens est gravitatem in omnes proportionalem
esse materiaꝝ in iisdem”.*

*Isaac Newton,
Proposición vii, Teorema VII.
Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica;*

o en un lenguaje mas moderno, que la fuerza de atracción entre dos cuerpos es proporcional al producto de las masas de esos cuerpos e inversamente proporcional al cuadrado de las distancias entre ellos:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (1)$$

En esta ecuación las masas de los cuerpos son m_1 y m_2 , la distancia entre ellos es r y G es la llamada constante universal de gravitación que nos da la magnitud de la fuerza de gravedad y tiene un valor igual a:

$$G = (6.670 \pm 0.015) \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \quad (2)$$

donde este valor esta expresado en el sistema de unidades MKS (ver apéndice I).

La publicación de los Principia representa el punto de partida de la Cosmología moderna, ya que como veremos mas adelante, aunque es la más débil de las 4 fuerzas que se cree existen en el Universo, como la gravedad es siempre atractiva* y además afecta a todo lo que existe en el Universo, la contribución de todas estas partes se suma y hace que la fuerza de gravedad sea la fuerza dominante a nivel estelar, galáctico y cosmológico; de hecho es la fuerza de gravedad la que moldea y da su curvatura global al Universo.

Hay dos teoremas que Newton demostró y que facilitan el cálculo de la fuerza de gravedad debida a distribuciones esféricas de masa. Dado que usaremos estos resultados mas adelante, los presentamos aqui:

Primer Teorema de Newton: *Un cascarón esférico de masa no ejerce fuerza de gravedad sobre objetos en su interior.*

Segundo Teorema de Newton: *Un cascarón esférico de masa ejerce una fuerza de gravedad sobre objetos en su exterior, igual a la fuerza que produciría una masa puntual situada en su centro geométrico.*

Estos resultados son ilustrados en las figura (1).

* Existe una circunstancia muy particular en el que puede ser repulsiva, sin embargo esto sólo ocurrió en una etapa llamada Universo Inflacionario que veremos mas adelante.

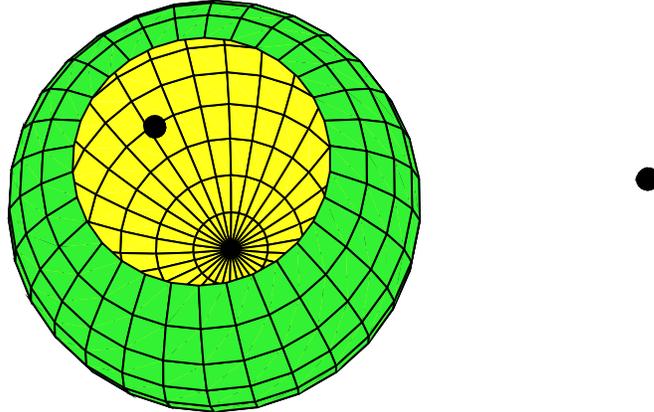


Figura 1. En esta figura se muestra un cascarón esférico con un objeto en su interior y otro en su exterior. De acuerdo al Teorema 1 de Newton, el objeto en el interior no siente fuerza alguna. De acuerdo al Teorema 2 de Newton, el objeto en el exterior siente una fuerza como si todo el cascarón estuviese concentrado en un punto situado en el centro geométrico del cascarón. En la figura hemos quitado una parte del cascarón esférico para poder ver su interior. Los teoremas de Newton sólo son válidos cuando el cascarón esta completo.

La demostración de estos dos teoremas se muestra en el apéndice II.

Estos dos teoremas nos permiten calcular la fuerza debida a cualquier objeto esférico, aún cuando no este hueco, su densidad varíe con el radio y el punto en el que nos interesa calcular la fuerza este dentro del objeto esférico. Esto es debido a que cualquier objeto esférico puede dividirse en cascarones esféricos. De acuerdo al Teorema 1 de Newton, todos los cascarones externos al punto donde nos interesa calcular la fuerza no ejercen fuerza alguna. Por otro lado, todos los cascarones internos pueden sustituirse por un solo punto masa situado en el centro y cuya masa es igual a la de todos los cascarones internos. Esto se ilustra en la figura 2.

El trabajo de Newton representa un paso fundamental en la consolidación de la ciencia moderna y complementa la transición iniciada por Galileo: Galileo mostró que la luna, lejos de ser un cuerpo celeste de naturaleza completamente ajena a la Tierra, tenía montañas y valles, y por tanto similar a nuestro planeta. Newton mostró que la misma ley de gravedad que describe el comportamiento de objetos en la Tierra, como una manzana que cae de un manzano, describe también el movimiento de los planetas. Así pues, los objetos que pueblan los cielos, lejos de ser objetos celestes de una naturaleza especial y sujetos a leyes de comportamiento ajenas a nuestra experiencia común, resultan ser objetos en cierto modo comunes y sujetos a las mismas leyes físicas de nuestra experiencia cotidiana. Este paso fundamental hace que por vez primera, sea posible tratar de entender el universo en el que vivimos por medio del método científico, sin necesidad de la especulación o la mitología.

El trabajo de Newton dió lugar a una descripción muy precisa del movimiento de los planetas en el Sistema Solar y permitió incluso, el descubrimiento de planetas no vistos aún, en base a las perturbaciones que provocan en el movimiento de planetas conocidos. Tal fué el caso del descubrimiento de Neptuno en el siglo XIX, cuya posición fué predicha por Urbain Jean Le Verrier en Francia y por John Couch Adams en Inglaterra.

El entendimiento del Universo mas allá del Sistema Solar preocupó desde un principio a Newton. La idea de un Universo estacionario era muy poderosa. Newton creía en un Universo así, sin embargo, se dió cuenta de que lograr un estado estacionario en un Universo dominado por una fuerza que es siempre atractiva requería de circunstancias especiales. Newton razonó que un Universo de extensión infinita, pero donde la masa ocupa una porción finita de éste, no podía ser estacionario. Aplicando los teoremas que hemos visto

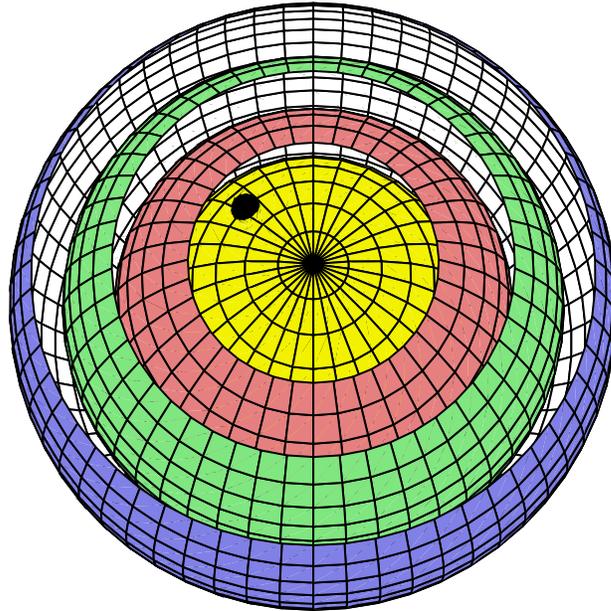


Figura 2. Cálculo de la fuerza que ejerce un objeto esférico sobre un punto interior a él. Imaginamos el objeto esférico dividido en cascarones esféricos. En la figura se muestran algunos cascarones externos, los cuales han sido cortados para poder ver el punto sobre el que nos interesa calcular la fuerza (disco negro). Por el Teorema 1 de Newton todos estos cascarones no ejercen fuerza alguna. Los cascarones internos (aquí sólo se muestra el más externo) pueden ser sustituidos por un punto de masa igual al de todos los cascarones interiores y situado en el centro geométrico de éstos.

es fácil ver que toda porción finita de masa atraería a todos sus componentes hacia su centro produciendo así un Universo en contracción.

En una carta a Richard Bentley, Newton escribió (1692):

“...; pero si la materia estuviese distribuida de manera uniforme por todo el espacio infinito, no podría concentrarse en una masa. Parte de ella se concentraría en una masa y otra parte en una masa diferente; de manera tal que tendríamos un infinito de grandes masas, dispersas a gran distancia unas de otras por todo el espacio infinito. De esta manera podría ser que el Sol y las estrellas fijas se hayan formado, suponiendo que la materia fuese de naturaleza lucífera”.

*Isaac Newton,
Diciembre 10 de 1692;*

Newton concluyó que sólo un Universo infinito donde las estrellas y demás objetos materiales ocupan también un volumen infinito era el único Universo que permitiría un estado estacionario: Al no haber un centro definido, la materia se colapsaría en dirección de múltiples centros mas no como un todo. Newton asoció estos centros de atracción con las estrellas. También aquí podemos observar la creencia todavía común en esa época, en el sentido de que el Sol y las estrellas estaban compuestas de una sustancia “lucífera”, diferente a la que compone los objetos en la Tierra.

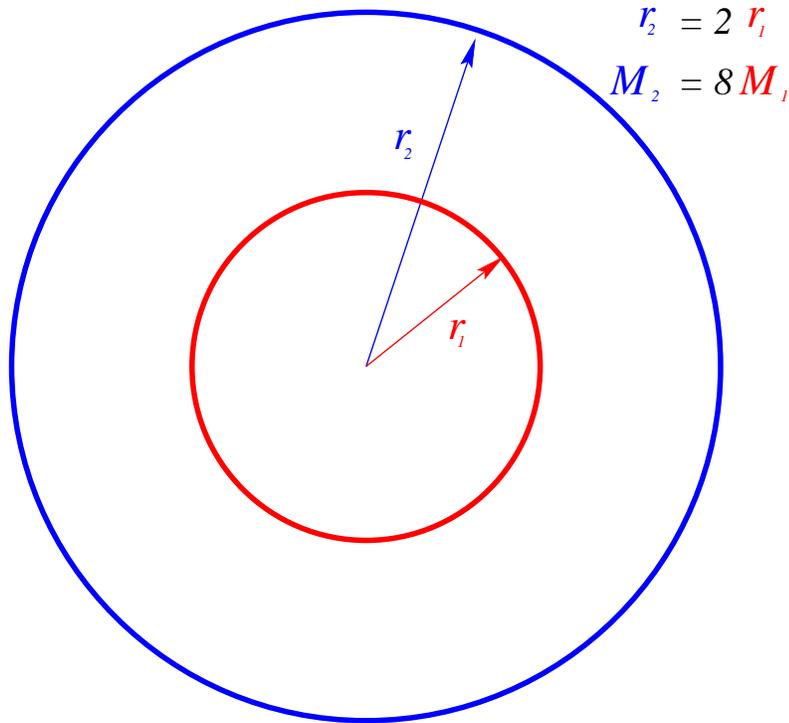


Figura 3.

En retrospectiva, esta visión de Newton de un Universo dominado por la fuerza de gravedad y que se mantiene estático, no es posible, aún en el caso de una extensión sin frontera y limitándonos a las leyes de la Mecánica de Newton. Para ver como es esto posible, imaginemos que dividimos el Universo de Newton en una serie de cascarones esféricos. Centremos nuestra atención en dos regiones concéntricas, una de radio r_1 y otra del doble de radio $r_2 = 2 \times r_1$ (figura 3). Dado que la segunda región tiene el doble de tamaño, su volumen es ocho veces mayor (recordemos que el volumen de una esfera depende del cubo del radio), y dado que el Universo de Newton es homogéneo, la segunda esfera tendrá 8 veces más masa ($M_2 = 8 \times M_1$).

Usando los teoremas de Newton, vemos que puntos situados en el borde de estas regiones no son afectados por la masa exterior a ellas, y solo importa la fuerza ejercida por la masa interior a estas regiones, pudiendo considerar esta fuerza igual a la que ejerce un punto de masa igual a toda la masa contenida en la región y situada en el centro de la misma. Como la fuerza de gravedad ejercida por un punto masa depende de la magnitud de la masa y el inverso del cuadrado de la distancia al mismo ($F_{1,2} \propto M_{1,2}/r_{1,2}^2$) y tomando en cuenta el hecho de que r_2 es dos veces mayor que r_1 mientras que M_2 es ocho veces mayor que M_1 , llegamos a la conclusión que la fuerza, y por tanto la aceleración que existe sobre un punto en la superficie de la segunda esfera, es dos veces mayor que la que existe sobre un punto en la superficie de la primera esfera. Dado que la distancia que el punto sobre la superficie de la segunda esfera tiene que recorrer para llegar al centro es también el doble de la distancia que debe recorrer el punto sobre la primera esfera, llegamos a la conclusión que ambos puntos llegarán al centro común en el mismo tiempo. Repitiendo este argumento para cualquier región esférica es claro que el Universo entero de Newton se colapsará sobre sí mismo todo al mismo tiempo en un tiempo finito. Lo que es un poco difícil de entender es que este colapso se puede efectuar sin que exista un centro de colapso definido, siendo cada punto dentro del Universo de Newton un punto de atracción.

Así pues, bajo las leyes de la mecánica de Newton, un universo estático y eterno no es posible, contrariamente a lo que Newton y todo mundo pensaba. El Universo de Newton es producto de las leyes de la Mecánica Clásica; al terminar el siglo XIX e iniciar el siglo XX, este mundo clásico se encontraba asediado por un número cada vez mayor de fenómenos que no podía explicar. El tiempo de hacer una revisión mayor de este mundo clásico había llegado.

III. EL UNIVERSO DE EINSTEIN

*“Cuando has eliminado todo lo imposible,
lo que queda, sin importar lo improbable que parezca,
debe ser la verdad”.*

*Arthur Conan Doyle,
“Las Aventuras de Sherlock Holmes” (1884).*

Las grandes revoluciones en la ciencia parten muchas veces de llevar a sus últimas consecuencias investigaciones que parten de preguntas aparentemente triviales. Tal fué el caso de la revolución iniciada por Albert Einstein (1879–1955). En 1905 Einstein publicó un artículo titulado “Sobre la Electrodinámica de Cuerpos en Movimiento” en el que introduce la llamada *Teoría Especial de Relatividad*. Diez años más tarde, publica en varios artículos el trabajo en el que introduce la *Teoría General de Relatividad*. En el primer trabajo la noción de un tiempo absoluto desaparece, en el segundo se interpreta la fuerza de gravedad como una curvatura del espacio. Estos dos trabajos rompen con el mundo clásico de Newton y nos llevan a un sistema de ecuaciones con el que es posible describir la evolución del Universo entero.

III.1 El Mundo de la Relatividad Especial.

*“En realidad existen cuatro dimensiones,
tres de las cuales llamamos Espacio, y la cuarta, Tiempo.*

*Hay sin embargo, una tendencia a hacer una distinción no realista
entre la primeras tres dimensiones y la última,
porque sucede que nuestra conciencia se mueve inexorablemente en un sentido
a lo largo de esta última, desde el principio hasta el final de nuestras vidas.”*

*H. G. Wells,
La Máquina del Tiempo.*

En el mundo de Newton, la fuerza de gravedad ejerce su influencia de manera instantánea, sin importar la distancia a la que se encuentren los objetos sobre los que se ejerce la misma. La acción a distancia de la gravedad, sin un agente físico aparente que transmita esta fuerza, preocupó mucho a Newton. De hecho, al publicar su trabajo, Newton es cuidadoso de decir:

*“Hasta ahora no he podido descubrir la causa de las propiedades de la gravedad
a partir de fenómenos observados o experimentos, y no propongo hipótesis alguna ..
Para nosotros es suficiente que la gravedad existe, y actúa de acuerdo a las leyes
que hemos mostrado, y que describe ampliamente los movimientos de todos los cuerpos
celestes y de nuestro océano.”*

*Libro III,
Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica;*

Es claro que Newton pensaba que su trabajo nos da una descripción, mas no necesariamente una explicación, sobre la manera de actuar de la fuerza de gravedad.

Durante los siguientes dos siglos existió un gran debate entre los físicos sobre la manera en que podría explicarse esta aparente “acción a distancia”. A principios del siglo XIX el físico inglés Michael Faraday

introdujo el concepto de “líneas de fuerza” para describir el efecto a distancia del campo magnético. Según Faraday, el espacio aún vacío, está lleno de líneas de fuerza producidas por un imán y que transmiten de algún modo el efecto magnético del imán. Este concepto fué pronto generalizado a la fuerza eléctrica y descrito como un “*campo de fuerza*”. Para Faraday estas líneas de fuerza eran reales y como ejemplo mostraba lo que sucede cuando acercamos un imán a una superficie en la que se ha esparcido limadura de hierro (figura 4). Sin embargo, para la mayor parte de sus contemporáneos, el concepto de campo de fuerzas era un mero truco que facilitaba el cálculo de los efectos a distancia de las fuerzas eléctrica y magnética.

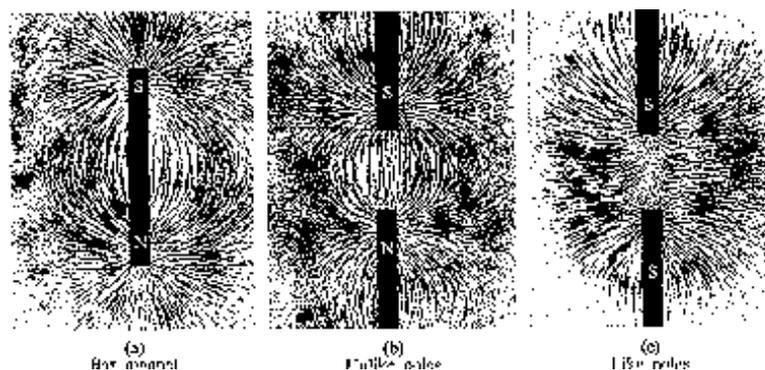


Figura 4. Ilustración de líneas de fuerza por medio de la influencia de imanes sobre limadura de hierro.

En 1864, el físico escocés James Clerk Maxwell (1831–1879) presenta un sistema de ecuaciones que lleva su nombre y que describen a los fenómenos eléctricos y magnéticos como manifestaciones de una misma fuerza electromagnética. Un punto crucial de estas ecuaciones es que, en el vacío, pueden escribirse como una ecuación de onda en el que la transmisión de las llamadas “ondas electromagnéticas” ocurre a una velocidad constante que coincide con la velocidad de la luz. Esto dió lugar a una gran controversia al final del siglo XIX, ¿qué exactamente eran estas ondas electromagnéticas?, ¿en qué medio se transmitían? y más importante para nosotros aquí, ¿por qué siempre se transmiten a una velocidad constante cuyo valor no parece depender del movimiento de quien mide la propagación de estas ondas?

La respuesta a la primera pregunta aparece con el trabajo del físico alemán Heinrich Hertz (1857–1894) quién fué el primero en generar y detectar lo que ahora llamamos ondas de radio. Pronto los físicos reconocieron que la luz visible son también ondas electromagnéticas. Hoy en día sabemos que tanto los rayos γ producidos por sustancias radioactivas, como los rayos X empleados en la medicina, los rayos ultravioleta, responsables de quemaduras cuando nos exponemos mucho tiempo al sol, así como la luz infrarroja y las microondas, son todas también ondas electromagnéticas.

La cuestión del medio de propagación de las ondas electromagnéticas dió lugar a la aparición de la teoría del éter. Se pensaba que el éter era una substancia que permeaba todo el universo y cuya presencia no podía detectarse de manera directa. Siendo el éter el medio que oscilaba al pasar una onda electromagnética. Sin embargo todos los experimentos que fueron diseñados para encontrar de alguna manera evidencia de su existencia resultaron infructuosos.

Uno de estos experimentos, el realizado por los físicos norteamericanos Albert Michelson (1852–1931) y E. Morley merece un poco de atención. Michelson y Morley partieron del hecho aparentemente trivial, de que la velocidad de propagación que medimos de algo (que puede ser una onda), depende de la velocidad relativa entre nosotros y el medio en el que se propaga ese algo. En la figura 5 vemos un ejemplo concreto: se tiene una ola que se propaga sobre la superficie del mar a una cierta velocidad y dos barcos que se mueven con otra velocidad y en direcciones opuestas. Es claro que los marineros medirán una velocidad diferente para la misma ola dependiendo del barco en que estén. Es más, si la velocidad del barco que se mueve en dirección de la ola es igual a la de ésta, los marineros en este barco verán a la ola estacionaria. En su experimento, Michelson y Morley realizaron comparaciones muy precisas de la velocidad de transmisión de

la luz en direcciones distintas. En este experimento el mar sería el éter, la ola sería un rayo de luz y el barco sería la Tierra que se mueve a través del éter en su movimiento por la Galaxia. Al comparar la velocidad de la luz en varias direcciones ellos esperaban medir una pequeña diferencia, tal como sucede con los marineros en el ejemplo anterior. Por mas que intentaron, nunca pudieron encontrar diferencia alguna.

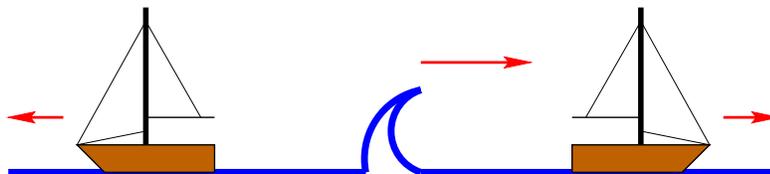


Figura 5. La velocidad de una ola medida desde un barco, depende no sólo de la velocidad de la ola con respecto al mar, sino de la velocidad del barco con respecto al mar. Desde el barco de la izquierda se medirá una velocidad mayor que desde el barco de la derecha, que se mueve en el mismo sentido que la ola.

La conclusión inescapable es que las ondas electromagnéticas se propagan con una velocidad constante ($c = 2.997294 \times 10^8 \text{ m/s}$), ¡independientemente del movimiento del observador! (en el ejemplo de los barcos es como si marineros en ambos barcos midieran la misma velocidad de la ola). Esto en contradicción a lo que nos dice nuestra experiencia cotidiana, pero de acuerdo con las ecuaciones de Maxwell, en las que la velocidad de la luz aparece como una constante universal.

Einstein reflexionó sobre el significado de esta conclusión y pensó que si la influencia de la fuerza electromagnética no es instantánea, tampoco lo debía ser el de cualquier otra fuerza, incluida la gravedad. Einstein introdujo también un principio que consideraba muy razonable: las leyes de la Física debían ser las mismas para todos en el Universo. Este llamado *Principio de Relatividad* es la opción mas sencilla para un Universo sujeto a leyes físicas: si estas leyes dependieran del observador, no sería posible describir al universo en base a un conjunto de leyes universales, sino que sería necesario construir una física diferente para cada observador. Partiendo de este principio, Einstein llegó a la conclusión de que la única manera de cumplir el principio de relatividad es que la velocidad de propagación de toda fuerza sea constante y tener el mismo valor para todos los observadores.

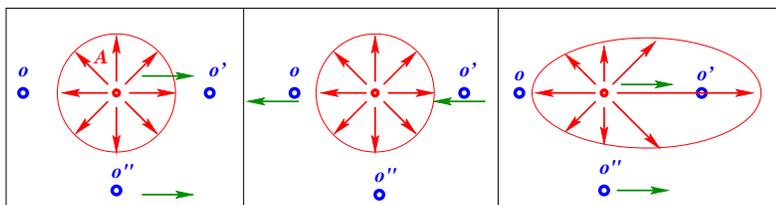


Figura 6. En el cuadro de la izquierda se presenta la situación descrita en el texto: una explosión ocurre en el punto A y es escuchada poco después por tres personas. Las personas O y O' se encuentran en reposo mientras que O'' se mueve junto con la explosión de izquierda a derecha. En el cuadro intermedio se ilustra la situación percibida por O'' : el sonido de la explosión se expande de manera simétrica con respecto al punto A . El cuadro de la derecha es la descripción de los observadores O y O' : para ellos el sonido de la explosión se ha propagado de manera elipsoidal.

Esta conclusión se ilustra en figura 6. En el recuadro de la derecha se muestra la siguiente situación: una explosión ocurre en el punto A y la llegada del sonido producido por la explosión es reportada por las personas O y O' situadas a la misma distancia, pero en direcciones opuestas del punto de la explosión. Una tercera persona O'' , se mueve junto con la explosión, misma que ha ocurrido a partir de una fuente que se

mueve de izquierda a derecha. Para la persona que se mueve junto con la explosión es claro que la onda sonora se propaga de manera simétrica con respecto al punto de la explosión, como aparece en el recuadro medio. Para O y O'' , la onda se propaga de manera asimétrica ya que O percibe una onda sonora que se propaga en su dirección a una velocidad inferior a la que registra O' , ya que en el primer caso la velocidad del punto O se le resta a la velocidad de propagación del sonido mientras que en el segundo caso se suma.

Aunque este ejemplo es claro y acorde a nuestra intuición física, Einstein concluyó que era contrario al principio de relatividad tratándose de la propagación de una fuerza. En este caso llegaríamos a la conclusión de que la forma de propagación de la fuerza (propagación simétrica *vs* asimétrica), dependería del estado relativo de movimiento entre fuente y observador, haciendo que la ley de fuerza dependiese de este movimiento.

Einstein se dió cuenta de que, o sacrificaba la simplicidad de una física única y válida para todos los observadores, o de que el sentido común no es aplicable al experimento de la figura 6 cuando se trata de la propagación de fuerzas, y que necesariamente la velocidad de propagación debía ser constante para *todos* los observadores, como demandan las ecuaciones de Maxwell y acorde con los resultados del experimento de Michelson y Morley. Una vez que Einstein renunció a la lógica del experimento descrito y se puso a considerar la manera en que sería posible lograr que todos los observadores midieran la misma velocidad de la luz llegó a unas conclusiones aparentemente descabelladas, pero que son la base de la Teoría especial de la Relatividad, teoría que ha sido corroborada por un gran número de experimentos.

Para entender algunas de las consecuencias de la universalidad de la velocidad de la luz, debemos recordar que la manera de medir la velocidad de algo, es midiendo el tiempo en el que ese algo recorre una distancia dada. La velocidad es simplemente el cociente de la distancia recorrida entre el tiempo empleado. En el mundo de Newton, el espacio constituye un marco de referencia absoluto que puede usar cualquier observador para describir un movimiento dado. De similar manera, el tiempo fluye de manera uniforme para todos. Son estas nociones de un espacio y un tiempo absolutos los que nos llevan a las conclusiones de la figura 6. El genio de Einstein radica en haberse dado cuenta de que la única manera en que podía hacer que observadores distintos pudiesen medir el mismo valor para la velocidad de la luz, era si las dos propiedades físicas necesarias para la determinación de velocidades: el espacio y el tiempo, son relativas y dependen del observador. Esto rompe completamente con el mundo Newtoniano y va en contra de nuestro sentido común: ¡las mediciones espaciales y la velocidad a la que fluye el tiempo dependen del observador! Por absurdo que esto pueda parecer, debemos recordar que insistir en lo que nos dice el sentido común trae consigo una consecuencia nefasta: Las leyes de la física dependerían del observador. Ante esta elección: invarianza de la física *vs* invarianza de las mediciones espacio-temporales, Einstein no dudó en elegir la primera opción. Una vez libre de las ataduras del sentido común, Einstein pudo derivar todas las consecuencias y desarrollar así la Teoría Especial de la Relatividad.

Para finalizar, mencionaremos otra consecuencia de la Teoría Especial de la Relatividad que no desarrollaremos aquí, pero que es de fundamental importancia para describir el Universo: En el mundo de Einstein, la masa y la energía, dos cantidades fundamentales y diferentes en el mundo de Newton, resultan ser equivalentes, siendo la constante de conversión la velocidad de la luz al cuadrado. Esta es la famosa ecuación: $E = mc^2$ de Einstein. El hecho radical que representa esta ecuación es que la energía, al igual que la materia, estará sujeta a la acción de la gravedad.

III.1 El Mundo de la Relatividad General.

*“Un peso dado se mueve una cierta distancia en un cierto tiempo;
un peso que es mayor se mueve la misma distancia en un tiempo menor,
siendo este tiempo inversamente proporcional al peso.”*

Aristóteles

Algo que omitimos señalar en nuestra discusión de la sección anterior, es que el principio de relatividad es válido sólo para una familia de observadores llamados *marcos de referencia inerciales* y que tienen la propiedad de sólo diferir entre sí a través de un movimiento rectilíneo uniforme. Así pues, la Teoría especial de la Relatividad no es aplicable en un marco de referencia acelerado, como por ejemplo el de un observador que cae libremente bajo la acción de la gravedad. Durante la década posterior a la publicación de la Teoría Especial de Relatividad, Einstein se dedicó a extender su trabajo a marcos de referencia acelerados. Esto lo llevó a considerar la fuerza de Gravedad.

Einstein parte de un hecho tan trivial que poca gente lo nota aún hoy en día: todos los objetos caen a la misma velocidad cuando están sujetos a la fuerza de gravedad. Aristóteles creía que la velocidad de caída dependía de la masa del objeto: objetos más pesados caerían más rápido. Existe la historia de que Galileo subió a la torre inclinada de Pisa para dejar caer objetos de masa distinta y notar que, contrariamente a la creencia aristotélica, todos caían de igual manera. Aunque esta es una historia no comprobada, es claro que Galileo estaba familiarizado con este resultado.



Figura 7. Cuando el tráfico fluye por una carretera, la velocidad de los vehículos depende en general de las características del vehículo.



Figura 8. Cuando todos los vehículos circulan a la misma velocidad, por ejemplo en un embotellamiento, lo más probable es que la causa esté en la carretera y no en los vehículos.

Investiguemos en detalle las consecuencias de este hecho aparentemente trivial por medio de una analogía. En la figura 7 se presenta una vista aérea del tráfico que circula por una intersección de autopistas. Bajo circunstancias normales, la velocidad de los vehículos es función del tipo de vehículo: camiones pesados avanzarán más lentamente que los autos familiares y estos a su vez irán un poco más lento que los autos deportivos. Contrastemos esta situación con la que vemos en la figura 8. En este caso tenemos un embotellamiento y todos los vehículos avanzan a la misma velocidad, exasperadamente lento en este caso. La diferencia crucial con el primer caso, es que en el segundo caso, la causa que determina la velocidad del tráfico no está en los vehículos individuales, sino en la calle misma (*e.g.* existe un bache, hay un accidente o hay una cuadrilla de trabajadores). La conclusión anterior podría parecer trivial, sin embargo un razonamiento similar llevó a Einstein a la Teoría General de Relatividad.

Volviendo a la gravedad, si todos los objetos caen a la misma velocidad, independientemente de su tamaño, masa, color, textura, carga eléctrica o material del que están hechos, esto nos dice que la gravedad debe ser más bien una propiedad inherente del medio en que se mueven, el espacio en este caso. Así pues, ¡la gravedad debe consistir en “algo” que modifica al espacio mismo!

Einstein se dio cuenta de que la gravedad afecta de igual manera, no solo la velocidad de objetos en caída libre, sino que también hace que estos recorran trayectorias idénticas. Esto pudiese parecer absurdo, después de todo una pelota que es arrojada a gran velocidad seguirá una trayectoria más recta en el aire que

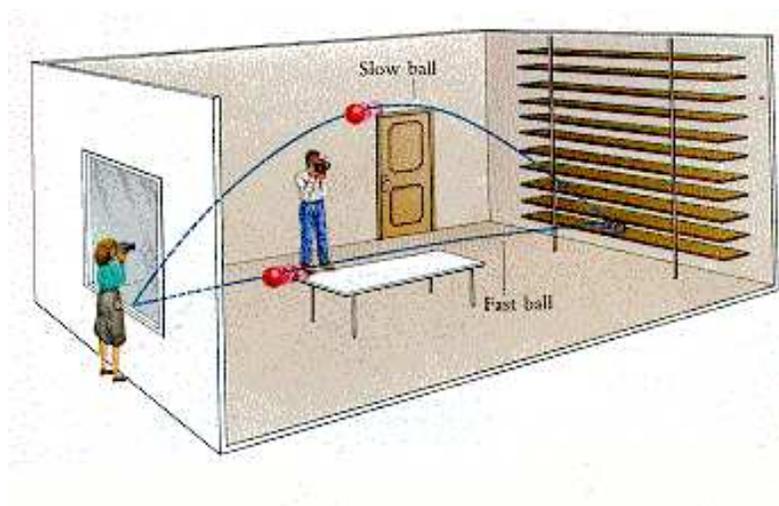


Figura 9. Se arrojan dos pelotas a velocidades diferentes, de un extremo a otro de un cuarto. La trayectoria de ambas es filmada contra el fondo de una pared con repisas horizontales que sirven de referencia espacial.

una pelota arrojada con menor ímpetu. Examinemos en detalle este ejemplo. En la figura 9 se muestran dos pelotas que son arrojadas con velocidades distintas de un extremo a otro de un cuarto. En las paredes del cuarto existen una serie de repisas horizontales que nos sirven de referencia y el vuelo de las pelotas es filmado. En la figura es aparente que la trayectoria de la pelota lenta es más curva que la de la pelota rápida. ¿Cómo puede entonces Einstein afirmar que ambas trayectorias son idénticas? En base al trabajo anterior en Relatividad Especial, Einstein sabía que es necesario analizar los fenómenos, no en términos espaciales y temporales por separado, sino de manera conjunta en lo que llamamos ahora el “espacio-tiempo”. En la figura 10 se muestra el resultado de la filmación del vuelo de ambas pelotas. Se presentan una serie de cuadros que representan la posición de las pelotas en el cuarto a un instante dado. Poniendo cuadros sucesivos, uno al lado del otro, podemos examinar la trayectoria en el espacio-tiempo. Cuando comparamos la secuencia seguida por la pelota rápida (serie inferior), vemos que esta es idéntica al segmento central de la trayectoria seguida por la pelota lenta (secuencia superior). ¡Es sólo la proyección de las trayectorias en las coordenadas espaciales las que aparecen diferentes a la vista!

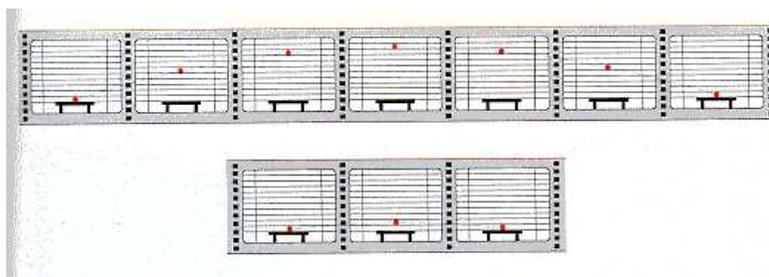


Figura 10. Análisis de la forma de las trayectorias seguidas por las pelotas del experimento de la figura 9 en el espacio-tiempo. Para esto examinamos cuadros sucesivos de la filmación que nos indican, como función del tiempo, la posición de las pelotas.

El resultado anterior se resume en la figura 11. Aquí se muestran las trayectorias espacio-temporales de la pelota rápida (línea gruesa verde) y la pelota lenta (línea gruesa roja), en el espacio tridimensional formado por los ejes espaciales x (distancia a lo largo del piso), z (altura) y el eje temporal t . Aunque las proyecciones de estas trayectorias en las coordenadas espaciales (trazos delgados) son muy diferentes, la

trayectoria espacio-temporal de la pelota rápida es idéntica al segmento central de la trayectoria correspondiente de la pelota lenta. Así pues aunque nuestra percepción espacial nos hace ver trayectorias diferentes, el genio de Einstein lo hizo descubrir que la Naturaleza es más sencilla cuando consideramos el tiempo junto con el espacio.

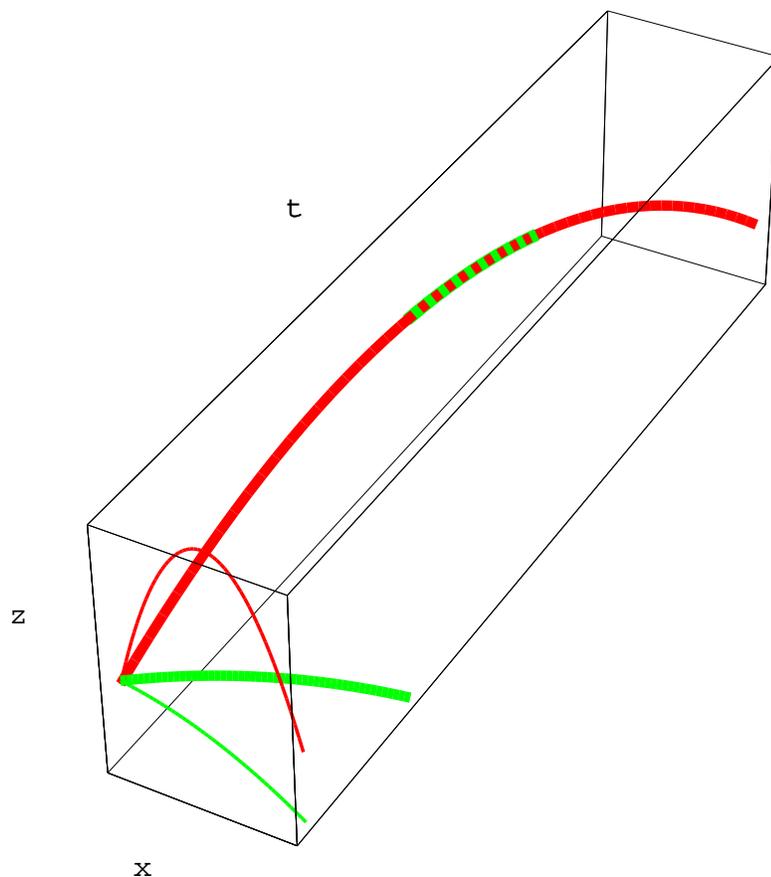


Figura 11. Trayectoria en el espacio-tiempo de las pelotas del experimento de la figura 9. Aunque las proyecciones de las trayectorias de las pelotas en los ejes espaciales x y z son muy diferentes, cuando consideramos el eje temporal resultan idénticas: La trayectoria de la pelota rápida (trazo verde) es idéntica al segmento central de la trayectoria de la pelota lenta (trazo combinado rojo y verde).

De lo anterior, Einstein concluyó que la gravedad debía ser una propiedad del espacio-tiempo producida por todas las masas y que afecta de manera idéntica las trayectorias de todos los objetos que pasan por la misma región. No tomó mucho tiempo a Einstein deducir que esta propiedad es la curvatura del espacio-tiempo. Para ver como una curvatura afecta las trayectorias de objetos examinemos el caso de un avión que vuela de la Cd. de México a Moscú. En la figura 12 se muestra en la izquierda un mapa de la Tierra en el que se ha superpuesto una trayectoria que une ambas ciudades. Esta trayectoria resulta extraña e inusualmente larga. ¿Porqué no simplemente unir ambas ciudades por medio de una línea recta? La respuesta es que al ser la Tierra un objeto esférico, la proyección plana que vemos en este mapa es engañosa. Cuando vemos a la Tierra directamente desde arriba del Polo Norte, vemos que la trayectoria indicada es el camino más corto entre ambas ciudades.

El ejemplo anterior nos lleva a la pregunta: ¿Cuál es el camino más corto que une dos puntos arbitrarios sobre una superficie curva? Una trayectoria recta no es la respuesta, ya que la trayectoria debe seguir la

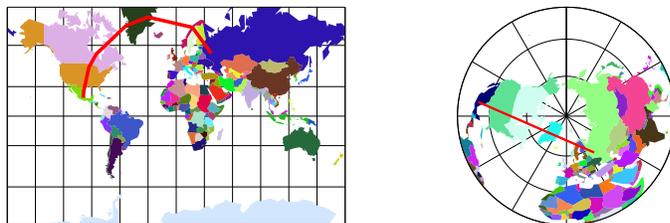


Figura 12. La trayectoria de distancia mas corta que une a las ciudades de México y Moscú es mostrada con un trazo rojo en una proyección plana de la Tierra (panel izquierdo), y en una vista de la Tierra desde un punto arriba del Polo Norte (panel derecho). Nótese como la curvatura de la trayectoria depende de la proyección empleada.

superficie curva. En el caso de una esfera, la respuesta es el segmento de círculo que une a ambos puntos y cuyo centro coincide con el centro de la esfera. A estas trayectorias que minimizan distancias se les conoce como *geodésicas*.

Einstein descubrió que las trayectorias que siguen los objetos cuando se mueven sujetos a fuerzas gravitacionales son geodésicas del espacio-tiempo. Si el espacio-tiempo estuviese vacío, éste no tendría curvatura y las trayectorias serían rectas. La presencia de una masa curva el espacio-tiempo y las geodésicas se apartan de una trayectoria recta. Esto se muestra en la figura 13, donde se hace una representación del espacio-tiempo como una superficie, en principio plana, en la que la presencia de un objeto masivo crea una depresión. La trayectoria de un objeto se ve desviada de la que hubiese seguido en línea recta si el espacio-tiempo hubiese permanecido plano.

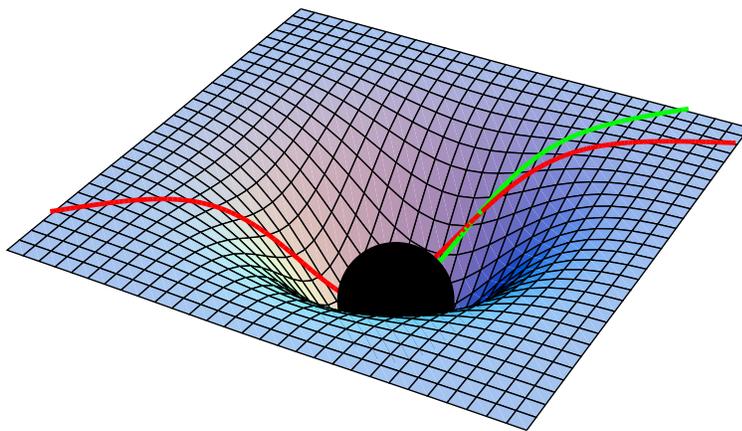


Figura 13. Ilustración del efecto producido por un objeto masivo en las trayectorias de objetos que se mueven en su vecindad, cuando interpretamos a la fuerza de gravedad como una curvatura del espacio-tiempo. La trayectoria del objeto (línea roja) se desvía de la trayectoria que hubiese seguido en ausencia del objeto masivo (línea verde).

En la sección anterior, mencionamos que una consecuencia de la Teoría Especial de la Relatividad es que, al ser la energía equivalente a la masa, esta es afectada también por la gravedad. Las ondas electromagnéticas,

al ser un desplazamiento de energía, son afectadas por la gravedad y siguen geodésicas del espacio-tiempo al igual que los objetos masivos. Sólo que al ser su velocidad muy alta, la curvatura aparente de su proyección espacial resulta ser muy pequeña y difícil de medir (recordar el ejemplo de la figura 11). Una predicción de la Teoría General de Relatividad es que la luz deben ser desviada al pasar cerca de objetos masivos. A mayor masa del objeto, mayor será el efecto. Una situación ideal para detectar este efecto ocurre cuando observamos estrellas que se encuentran muy cerca del Sol en el cielo. Normalmente el brillo del Sol nos impide ver estrellas en su vecindad. Sin embargo, durante un eclipse total de Sol, la Luna bloquea el brillo del Sol y nos permite examinar el cielo aledaño. Una comparación de las posiciones relativas de las estrellas cercanas al Sol ocultado, con sus posiciones cuando el Sol no está presente, nos permite medir desviaciones. Los astrónomos ingleses Arthur Eddington y Andrew Crommelin realizaron estas observaciones durante un eclipse de Sol en 1918. Aunque pobres en su precisión, los resultados eran congruentes con la predicción de Einstein. Esto fue la primera prueba de validez de la Teoría General de Relatividad. Observaciones más modernas han confirmado esta predicción con una gran precisión. A finales de la década de los setentas se descubrió un nuevo fenómeno en el cielo: el primer *lente gravitacional*. En este caso se observan dos imágenes muy cercanas entre sí en el cielo del mismo objeto estelar. La presencia de un objeto masivo muy cerca de la línea de la visual entre el observador y el objeto, desvía rayos de luz que pasan a ambos lados del objeto masivo y los desvía de manera que convergen en el observador, produciendo así dos imágenes en el cielo.

IV. LA TEORIA DE LA GRAN EXPLOSION

“Existe una teoría que dice que si alguien alguna vez descubre que exactamente es el Universo y por qué existe, este desaparecerá inmediatamente y será reemplazado por algo mucho mas extraño e inexplicable.

Hay otra teoría que dice que esto ya ha ocurrido.”

*Douglas Adams,
El Restaurant al Fianl del Universo.*

IV.1 El Nacimiento de la Cosmología Moderna

Toda descripción moderna del Universo y su evolución parte de las llamadas *ecuaciones de campo* de la Relatividad General. En el contexto de esta teoría, el espacio-tiempo es un entorno de cuatro dimensiones cuya curvatura esta determinada por la masa y energía que contiene. Las ecuaciones de campo describen esta situación:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (3)$$

La curvatura del espacio-tiempo esta dada por el tensor de curvatura $\mathcal{R}_{\mu\nu}$. El llamado tensor métrico $g_{\mu\nu}$ determina distancias e intervalos temporales. El tensor $T_{\mu\nu}$ describe el contenido de masa y energía. La constante de gravedad es G y la velocidad de la luz c . Λ es la *constante universal* que mencionaremos mas adelante. Este es un sistema de ecuaciones obviamente complicado que no pretendemos estudiar aqui. Nos limitaremos a presentarlo y hacer notar que este sistema establece la relación matemática entre la presencia de masa y energía por un lado, y la curvatura del espacio-tiempo por la otra.

Inmediatamente después de la publicación de su trabajo sobre la Teoría General de Relatividad, Einstein aplicó las ecuaciones de campo a la tarea de describir el Universo como un todo. En 1917 publicó un artículo titulado “Consideraciones Cosmológicas de la Teoría General de Relatividad”. Al realizar este trabajo, Einstein descubrió que las ecuaciones de campo, en su forma original, no admitían como solución un Universo estacionario. Al igual que Newton, Einstein estaba convencido de que el Universo era estacionario e inmutable en el tiempo. Ante esta situación, Einstein modificó las ecuaciones de campo introduciendo el llamado *término cosmológico*, que describe una fuerza universal de repulsión que tiene la propiedad de aumentar en magnitud con la distancia. De esta manera, la descripción del Universo en el entorno vecino no es modificada, mientras que a grandes distancias, la repulsión cosmológica se opone a la gravedad y permite obtener un Universo estacionario. La magnitud de esta repulsión esta dada por la constante cosmológica Λ que aparece en la ecuación 1. Cabe hacer notar que, aunque motivado por un deseo ajeno a la motivación original de la Teoría General de Relatividad, el término cosmológico es consistente con esta teoría y representa una generalización natural.

Ajustando cuidadosamente el valor de la constante cosmológica, Einstein pudo obtener una solución que describe un Universo estático, que además resulta ser homogéneo e isotrópico. Lo primero nos dice que el Universo aparece igual desde cualquier punto que lo observemos, lo segundo nos indica que el Universo aparece igual en cualquier dirección que lo miremos. Sin embargo, el *Universo estático de Einstein* tiene un serio problema del que Einstein no se percató: es inestable. Imaginemos que perturbamos este Universo haciendo la distancia entre las Galaxias ligeramente mayor; al aumentar la separación, la repulsión cosmológica (que recordemos aumenta en magnitud con la distancia), dominará a la gravedad y hará que las galaxias se separen aún mas produciendo así un Universo en expansión. Si por el contrario, imaginamos que reducimos ligeramente las distancias entre galaxias, la gravedad (que recordemos disminuye con la distancia), dominará y hará que las galaxias se acerquen aún mas, produciendo así un Universo en contracción. Así pues, la única solución estacionaria de la ecuaciones de campo resulta ser inestable. La inestabilidad de este modelo fué discutida por el astrónomo inglés Arthur Eddington. Este resultado implica que debemos renunciar a la noción de un Universo estático.

Entre 1922 y 1924 apareció en una revista científica alemana el trabajo de Alexander Friedmann (1888–1925), un meteorólogo y matemático Ruso poco conocido. Friedmann renunció desde un principio a la idea de un Universo estacionario, sin embargo, retuvo las condiciones de homogeneidad e isotropía del Universo. Con estas condiciones, Friedmann descubrió que las ecuaciones de campo se reducían a un sistema mas simple, que en el caso en que no incluimos el término cosmológico, sólo admiten dos tipos de soluciones. La primera familia de soluciones describe un Universo inicialmente en expansión pero en el que la fuerza de gravedad eventualmente detiene dicha expansión para eventualmente producir un colapso y regresar a un estado singular de densidad infinita. Este tipo de Universos tienen una *curvatura positiva*, análoga a la que presenta en dos dimensiones la superficie de una esfera. En este caso el Universo es finito mas no tiene frontera; las geodésicas en este Universo convergen. La segunda familia de Universos presentan una *curvatura negativa*, análoga a la que presenta una silla de montar. En este caso el Universo se expande para siempre, siendo infinito y sin frontera; en este caso las geodésicas divergen. Existe una tercera solución que Friedmann no consideró pero que es fácil obtener como el caso intermedio entre las dos familias de soluciones anteriores. En este caso la fuerza de gravedad y la expansión se encuentran equilibradas, y aunque el Universo se expande para siempre, lo hace a una velocidad que tiende a cero. En este caso la curvatura es cero, lo cual implica que el espacio-tiempo es plano. Las curvaturas y propiedades geodésicas de las tres familias de soluciones son ilustradas en la figura 14.

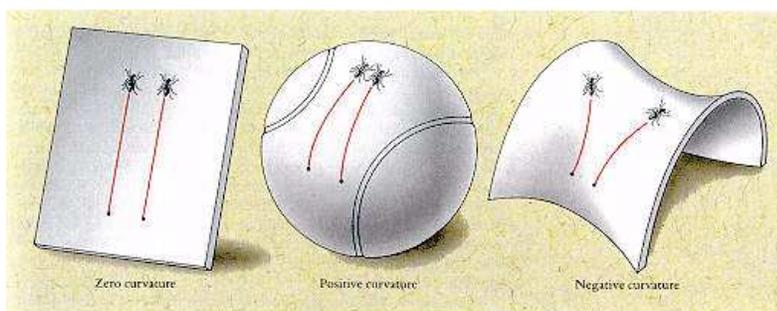


Figura 14. Las propiedades de una superficie con curvatura nula (izquierda), positiva (centro) y negativa (derecha) son ilustradas y las propiedades de sus geodésicas correspondientes mostradas con el camino seguido por dos insectos sobre la superficie.

Independientemente de estos esfuerzos teóricos para describir el Universo, en 1912, Vesto M. Slipher (1875–1969) había descubierto y medido un desplazamiento en la posición de ciertas líneas producidas por ciertos elementos en el espectro de la luz visible de algunas galaxias. Los elementos químicos en estado gaseoso, emiten luz de ciertos colores o longitudes de onda muy específicos. En este sentido son como diapasones que al ser perturbados emiten una sola nota musical. Las longitudes de onda, o posición en el espectro electromagnético, de estas líneas espectrales depende de la estructura atómica del elemento emisor y pueden ser calculadas teóricamente o medidas en un laboratorio. El desplazamiento medido por Slipher es debido a un movimiento entre la fuente emisora de luz y el observador. Volviendo al caso de la figura 6, el movimiento de los observadores con respecto a la fuente que produjo la explosión hace que la longitud de onda del sonido se alargue para el observador O y disminuya para el observador O' . En el primer caso, el sonido tiene que alcanzar a un observador que se aleja de la fuente, aumentando así la distancia recorrida y por tanto la longitud de onda. En el segundo caso, el observador se acerca a la fuente, produciéndose el efecto contrario. Este fenómeno, llamado *efecto Doppler*, es el causante de un efecto bastante familiar: cuando escuchamos una fuente sonora, como una ambulancia o el motor de un auto de carreras, el sonido es agudo cuando la fuente se acerca (longitud de onda menor) y cambia súbitamente a un sonido mas grave una vez que la fuente se aleja (longitud de onda mayor). El mismo fenómeno afecta a la luz, produciendo un desplazamiento hacia longitudes de onda mayores (región roja del espectro visible) para fuentes que se alejan, y un desplazamiento hacia longitudes de onda menores (región azul del espectro) cuando la fuente se acerca. La velocidad entre la fuente y el observador puede ser calculada en base a la magnitud del desplazamiento espectral.

En 1917, Slipher había acumulado mediciones para 15 galaxias, todas las cuales, con excepción de dos, mostraban corrimientos al rojo en sus líneas espectrales. Once años mas tarde, Slipher tenía datos para 40 galaxias, los cuales mostraban una tendencia muy clara: las galaxias se alejaban de nosotros. El año de 1929 es probablemente uno de los mas importantes en la historia de la cosmología moderna. En ese año, el astrónomo Norteamericano Edwin Hubble (1899–1953) publicó el diagrama que aparece en el recuadro de la izquierda de la figura 15. Aquí aparecen las distancias y velocidades de un grupo de Galaxias. En todos los casos, las galaxias se alejan de nosotros; muy significativamente, la velocidad con que se alejan parece aumentar linealmente con la distancia. Esta tendencia es confirmada en el recuadro derecho de la misma figura, que representa una versión mas moderna del mismo diagrama, donde aparecen galaxias a distancias mil veces mayores.

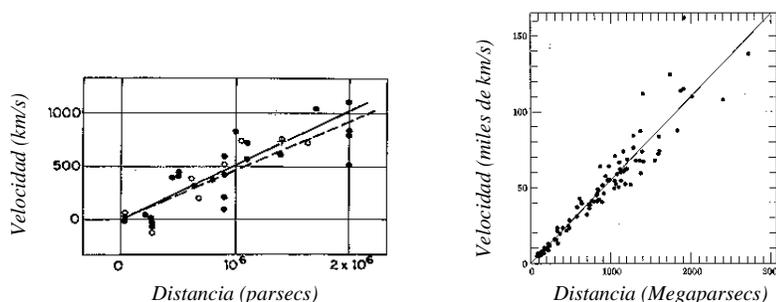


Figura 15. La gráfica de la izquierda es el diagrama original de Hubble en el que descubre la expansión del Universo. En este diagrama, la distancia a varias galaxias (medida en *parsecs*, ver apéndice I), es graficada contra la velocidad a la que estas galaxias se alejan (medida en *km/s*). Las dos rectas representan dos ajustes a los datos. La gráfica de la derecha representa una versión mas moderna. Nótese que los datos modernos extienden los resultados a una distancia mil veces mayor.

La conclusión es clara: el Universo está en expansión siguiendo una ley de expansión lineal:

$$v = Hr \tag{4}$$

la constante de proporcionalidad, que es una medida de la tasa de expansión presente del Universo, se le conoce como *constante de Hubble* (es importante resaltar que H es una constante espacial, mas no temporal, a medida que evoluciona el Universo, su valor cambia). El valor moderno de esta constante esta entre 15 y 30 *km/s* por cada millón de años–luz (en el sistema MKS esto corresponde a $(1.5-3) \times 10^{-18} s^{-1}$). El descubrimiento de la expansión del Universo terminó por completo los intentos de Einstein y otras personas por obtener soluciones estáticas para el Universo. Se dice que al enterarse del descubrimiento de Hubble, Einstein dijo que la introducción de la constante cosmológica constituía “el error mas grande de mi vida”.

El hecho de que la ley de expansión sea lineal es de gran importancia. La razón se ilustra en la figura 16. Supongamos un observador O que observa puntos vecinos alejarse de acuerdo a una ley lineal (diagrama superior). Este observador pensará que su posición constituye el centro de expansión. Veamos ahora la misma situación desde el punto de vista del observador O' , vecino de O . Para pasar a su marco de referencia, debemos restar la velocidad de O' a la situación que observa O . Al hacer este ejercicio para cada flecha en el diagrama, obtenemos lo que percibe O' (diagrama inferior). La situación es completamente análoga a la anterior, pudiendo O' afirmar que es su posición constituye el centro de una expansión lineal. De esta manera, todos los observadores son equivalentes. Sólo una ley de expansión lineal tiene esta propiedad. Esto es mostrado en la figura 17, donde se comparan una ley lineal y una ley cuadrática de expansión. La figura muestra una gráfica de distancia *vs* velocidad, análoga a la figura de Hubble. Si ahora pasamos al marco de referencia de otro observador (segundo conjunto de ejes en la figura), es claro que la situación es idéntica cuando se trata de la ley lineal de expansión, mas no para el caso de la ley cuadrática.

El hecho de que el Universo se expanda de acuerdo a una ley lineal es muy importante, ya que garantiza un Universo homogéneo, acorde a los modelos de Friedmann. Ante el descubrimiento de Hubble, los modelos de Friedmann pasaron a ocupar un papel central en la cosmología moderna. Es lamentable el hecho de que la muerte prematura de Friedmann le haya impedido conocer el resultado de Hubble que trajo reivindicación a su trabajo, mismo que había generado una gran controversia al ser publicado. De hecho, al aparecer publicado el trabajo de Hubble, las soluciones de Friedmann debieron ser redescubiertas. Este trabajo lo realizó George Lemaître (1894–1966), un sacerdote Belga con un gran interés en la cosmología. Cabe hacer notar que una propiedad nueva y radical de las soluciones de Friedmann, el hecho de que tienen un origen temporal, atrajo la atención de autoridades religiosas que veían en este origen un principio creador.

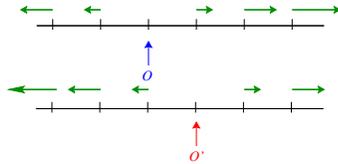


Figura 16. Invarianza traslacional de una ley de expansión lineal. El observador O ve que todos los objetos a su alrededor se alejan de él, siendo la velocidad proporcional a la distancia (diagrama superior). Para ver lo que observa O' , vecino de O , es necesario restar la velocidad de O' . El resultado se muestra en el diagrama inferior. Es claro que ambos observadores crean que ellos son el centro de expansión y medirán la misma ley lineal de expansión.

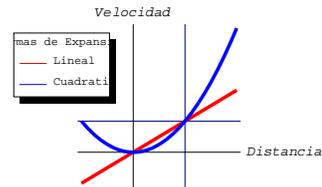


Figura 17. Comparación de una ley lineal (trazo rojo) y una ley cuadrática (trazo azul) de expansión. Es claro que un segundo observador, cuyo marco de medición es indicado por el segundo conjunto de ejes, medirá la misma expansión en el primer caso, pero una expansión diferente en el segundo caso.

IV.2 Los Modelos de Friedmann y Lemaître

Aunque la obtención de los modelos de Friedmann se hace a partir de las ecuaciones de campo de Einstein, es posible obtener muchas de sus propiedades a partir de un tratamiento puramente clásico. Esto es posible gracias al llamado *Teorema de Birkhoff*. Este resultado de la Teoría General de Relatividad obtenido por G. Birkhoff en 1923, es equivalente a los dos teoremas de Newton que vimos en la sección II y apéndice II. Recordemos que el primer teorema de Newton nos dice que podemos despreciar la fuerza de gravedad ejercida por toda distribución esférica de masa *exterior* al punto de interés; el segundo teorema nos dice que la fuerza de gravedad ejercida por una distribución esférica de masa *interior* al punto de interés es equivalente a la producida por un punto de igual masa situado en el centro de dicha distribución (figura 2). Este resultado pudiese parecer que introduce un punto privilegiado en nuestra descripción del Universo (el centro de la distribución esférica), sin embargo recordemos que en los modelos de Friedmann, cualquier punto es equivalente a otro. El hecho de que un resultado equivalente a los dos teoremas de Newton exista en Relatividad General es bastante sorprendente, debido a la diferencia enorme entre ambas teorías. Para nosotros resulta afortunado, pues podemos realizar la siguiente derivación.

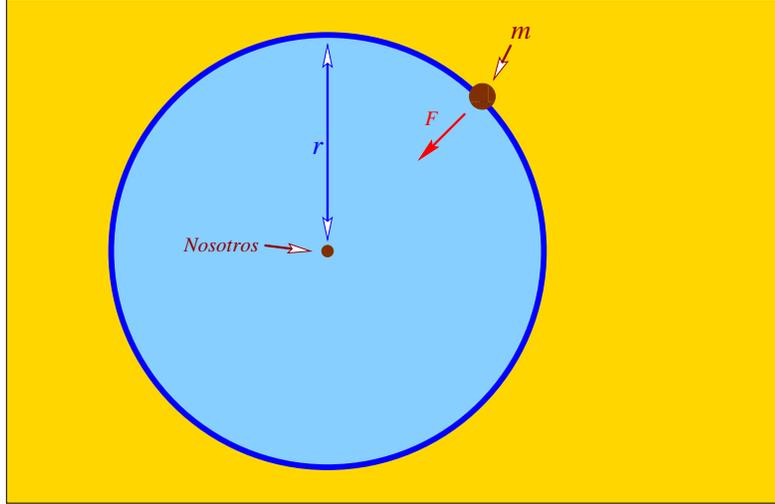


Figura 18. Teorema de Birkhoff. El movimiento con respecto a nosotros de un objeto de masa m y situado a una distancia r , solo depende de la masa del Universo contenida en una esfera de radio r centrada en nosotros (azul pálido). Todo el resto del Universo (amarillo) puede ser ignorado.

Consideremos un objeto de masa m situado a una distancia r de nosotros en un Universo de densidad constante ρ (figura 18). El teorema de Birkhoff nos dice que sólo es necesario considerar la masa interior a una esfera de radio r centrada en nosotros para obtener el movimiento de m visto por nosotros. La fuerza F ejercida sobre m esta dada por (ecuación 1),

$$F = G \frac{Mm}{r^2}, \quad (5)$$

donde la masa M contenida en la esfera de radio r esta dada por

$$M = (\text{Volumen de la esfera}) \times (\text{densidad}) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho. \quad (6)$$

Las energías cinética y potencial de m estan dadas por

$$E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2, \quad E_{pot} = -G \frac{Mm}{r}. \quad (7)$$

La energía total es entonces

$$\begin{aligned} E_{tot} &= \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{r} \\ &= \frac{1}{2}m(Hr)^2 - \frac{GM}{r} \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho \right). \\ &= \frac{1}{2}mr^2 \left[H^2 - \frac{8\pi}{3}G\rho \right] \end{aligned} \quad (8)$$

donde hemos usado la ley de expansión Universal (ecuación 4) en el término de la energía cinética, y la ecuación 6 en el término de la energía potencial.

Si la energía total es mayor que cero, la partícula m se alejará para siempre de nosotros, esto corresponde al modelo de curvatura negativa de Friedmann; por el contrario, si esta energía es negativa, m caerá finalmente

sobre nosotros, esto corresponde al modelo de curvatura positiva. Veamos cual es el valor crítico ρ_c que corresponde al caso intermedio. Haciendo $E_{tot} = 0$ en la ecuación anterior obtenemos:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}; \quad (9)$$

usando los valores de G y H reportados en el apéndice I y sección IV.1, respectivamente, obtenemos $\rho_c = (4-16) \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3$. Esto es equivalente a la masa de entre 2.5 y 10 átomos de hidrógeno por metro cúbico. Esta es una densidad muy inferior al vacío mas grande alcanzado en laboratorios terrestres, o la densidad media del gas existente en el espacio entre las estrellas de nuestra Galaxia. Recordemos sin embargo, que ρ representa la densidad media del Universo, razón por la que es necesario promediar sobre los vastos espacios que hay entre galaxias.

El siguiente paso es obtener una ecuación que describa el movimiento de la masa m . Para esto es necesario conocer el concepto de derivada y saber obtener la derivada de polinomios. Para beneficio del lector que no esté familiarizado con estas nociones de Cálculo Diferencial, en el apéndice III se presentan de manera simplificada estas nociones.

Partimos del hecho de que una ley universal de expansión lineal e isotrópica no cambia las posiciones relativa de puntos en el espacio, sólo introduce un cambio de escala. Dicho de otra manera, si existen tres galaxias que forman un triángulo equilátero con cierta orientación, la expansión del Universo preservará la forma de triángulo equilátero y su orientación, variando únicamente la separación entre galaxias por un factor constante. Esto hace conveniente introducir un sistema de coordenadas llamado *coordenadas en co-movimiento* que especifican las posiciones de los objetos en el Universo a un tiempo dado que tomamos como referencia, y dar las coordenadas a cualquier otro tiempo como las coordenadas en co-movimiento multiplicadas por un llamado *factor de escala del Universo*, igual a la razón entre la distancia de dos puntos cualesquiera al tiempo de interés, y la distancia correspondiente al tiempo de referencia. Esto puede escribirse entonces como:

$$r(t) = R(t) s, \quad (10)$$

donde $r(t)$ es una distancia particular que mide la separación entre dos puntos al tiempo t , s es la coordenada en co-movimiento, igual al valor de r al tiempo adoptado como referencia, y $R(t)$ es el factor de escala del Universo, que nos da el cociente de r y s . La ventaja de esta representación, que pudiese parecer circular, es que nos permite expresar distancias físicas como el producto de dos factores, uno que varía en el tiempo y depende de la dinámica del Universo, y otro constante que sólo depende de la disposición relativa entre puntos.

Tomando la derivada temporal de la ecuación anterior obtenemos la velocidad de m con respecto a nosotros (derivadas temporales serán indicadas por medio de un punto en la parte superior, a la manera de Newton):

$$\dot{r}(t) = \dot{R}(t) s = \left[\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \right] [R(t)s] = \left[\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \right] r(t); \quad (11)$$

donde en el segundo paso hemos multiplicado y dividido entre $R(t)$ (R es una cantidad positiva), y en el último paso hemos usado la ecuación 8.

La ecuación obtenida, nos dice que la velocidad a la que se aleja de nosotros el punto m es proporcional a la distancia r que nos separa, siendo el coeficiente de proporcionalidad dependiente sólo del tiempo. Comparando con la relación empírica obtenida por Hubble (ecuación 4), descubrimos que

$$H(t) \equiv \left[\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \right], \quad (12)$$

lo que confirma que la constante de Hubble es una constante espacial, mas no temporal.

Incorporando la descripción en términos de la coordenada en co-movimiento (ecuación 10) en la expresión obtenida para la energía total de m (ecuación 8), obtenemos

$$E_{tot} = \frac{1}{2} m s^2 R^2(t) \left[H^2(t) - \frac{8\pi}{3} G \rho(t) \right]. \quad (13)$$

Definimos ahora la siguiente cantidad:

$$k \equiv -\frac{2E_{tot}}{mc^2 s^2}; \quad (14)$$

lo primero que notamos es que, dado que la energía total del sistema se conserva y tanto c como s son constantes, k es independiente del tiempo. Empleando ahora la forma de E_{tot} dada por la ecuación 13, podemos escribir k como:

$$k = \frac{R^2(t)}{c^2} \left[\frac{8\pi}{3} G\rho(t) - H^2(t) \right]; \quad (15)$$

escrito de esta forma, vemos que k no varía con la posición, dado que todas las cantidades del lado derecho son constantes o funciones del tiempo unicamente. Así pues, k es una constante tanto espacial como temporal y la combinación de funciones que aparecen en la ecuación anterior debe cancelar su variación temporal.

Volviendo a la definición de k (ecuación 14), vemos que el caso del Universo que se colapsa finalmente ($E_{tot} < 0$), corresponde a k positiva; por el contrario, el Universo en expansión eterna ($E_{tot} > 0$), corresponde a k negativa. Dado que la coordenada en co-movimiento s que aparece en la definición de k depende de nuestra elección del tiempo de referencia, podemos escoger este de tal manera que $s^2 = 2E_{tot}/mc^2$, haciendo que k sea igual a 1 o -1. El caso intermedio del Universo de curvatura nula ($E_{tot} = 0$) corresponde a $k = 0$. Así pues k es una constante absoluta que indica la curvatura del modelo y se le conoce como *constante de curvatura*:

$$k = \begin{cases} +1, & \text{Universo de curvatura positiva que se expande y luego contrae;} \\ 0, & \text{Caso intermedio de curvatura nula;} \\ -1, & \text{Universo de curvatura negativa de expansión eterna.} \end{cases} \quad (17)$$

Al primer caso se le conoce como *Universo cerrado*, ya que es de extensión finita y acotado temporalmente (tiene un inicio y un fin). El segundo caso es el *Universo plano* que corresponde a un espacio no curvo o Euclidiano (el de nuestra intuición). El tercer caso es el *Universo abierto*, infinito en extensión y sin cota superior en el tiempo (tiene un origen, mas no un final).

El paso final para obtener la ecuación que describe la evolución temporal del Universo (a través del cambio en el tiempo del factor de escala) consiste en eliminar $H(t)$ de la ecuación 15, usando su definición (ecuación 12) y despejando $\dot{R}(t)$:

$$\left[\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \right]^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho(t) - \frac{kc^2}{R^2(t)} \quad (18)$$

Esta ecuación es la primera ecuación que describe las soluciones de Friedmann. Sin embargo, es necesario una ecuación adicional, ya que desconocemos la relación entre $\rho(t)$ y $R(t)$ por lo que tenemos una ecuación con dos incógnitas.

Obtendremos primero una relación entre ρ y R para el caso de la figura 18 (*e.g.* una expansión libre en un Universo clásico. Partiendo de la ecuación 6 que define la densidad,

$$\rho = \frac{3M}{4\pi r^3} = \frac{3M}{4\pi s^3 R^3} \quad (19)$$

donde hemos usado la definición de coordenada en co-movimiento (ecuación 10). Tomando la derivada temporal logarítmica (apéndice III) de esta relación y recordando que tanto M como s son constantes, obtenemos:

$$\dot{\rho} = -3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) \rho, \quad (20)$$

esta ecuación es la relación adicional que necesitamos.

La segunda ecuación de Friedmann es la ecuación que describe la aceleración del Universo, o segunda derivada temporal del factor de escala del Universo. Para obtenerla partimos de la primera ecuación de Friedmann. Despejando \dot{R} en la ecuación 18, obtenemos:

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho R^2 - kc^2, \quad (21)$$

derivando ahora con respecto al tiempo, obtenemos

$$\dot{R}\ddot{R} = \frac{8\pi}{3}G\rho\dot{R}R + \frac{4\pi}{3}G\dot{\rho}R^2; \quad (22)$$

despejando ahora \ddot{R} y manipulando un poco la expresión resultante:

$$\begin{aligned} \ddot{R} &= \frac{8\pi}{3}G\rho R + \frac{4\pi}{3}G\frac{R^2}{\dot{R}} \left[-3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) \rho \right] \\ &= \frac{8\pi}{3}G\rho R + \frac{4\pi}{3}GR(-3\rho) \\ &= \frac{4\pi}{3}G\rho R(2-3) = -\frac{4\pi}{3}G\rho R. \end{aligned} \quad (23)$$

Así pues, la ecuación que describe la aceleración de un Universo clásico y en expansión libre es:

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi}{3}G\rho(t)R(t) \quad (24)$$

Nótese que la aceleración resulta ser proporcional a la densidad en sentido negativo. Esto está de acuerdo a nuestra intuición, donde la aceleración es siempre negativa (desaceleración) y depende de la masa presente.

Consideremos ahora el caso de un Universo que se expande en presencia de una presión p , y en el que tomamos en cuenta el efecto de la gravedad sobre la masa y la energía. Si bien el primer efecto no es válido en el Universo actual, donde las Galaxias se expanden libremente, cuando el Universo era mucho más joven existía una densidad enorme de radiación electromagnética, cuyo efecto dominaba la dinámica del Universo y ejercía presión. El segundo efecto, la acción de la gravedad sobre materia y energía, es una consecuencia de la Teoría Especial de Relatividad.

El efecto de la presión es que la expansión del Universo se efectúa ahora en contra de la presión, lo cual requiere de un trabajo que será a costa del contenido energético de la región esférica que estudiamos. Examinemos la situación que se presenta en la figura 19. Se tiene una fuerza F que mueve un pistón una distancia Δl en contra de la presión p del material dentro de una cámara. El trabajo ΔW efectuado es igual al producto de la fuerza por el desplazamiento:

$$\Delta W = -F\Delta l, \quad (25)$$

donde el signo negativo es porque se trata de trabajo que tenemos que efectuar, lo cual nos resta energía. Dado que la presión es igual a la fuerza ejercida dividida entre el área de contacto: $P = F/A$, podemos escribir la ecuación 25 en función de p como:

$$\Delta W = -(pA)\Delta l = -p(A\Delta l) = -p\Delta V; \quad (26)$$

donde ΔV es el cambio en el volumen.

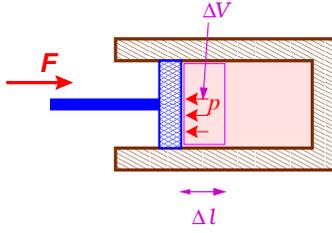


Figura 19. Fuerza que ejerce trabajo al mover un pistón en contra de una presión.

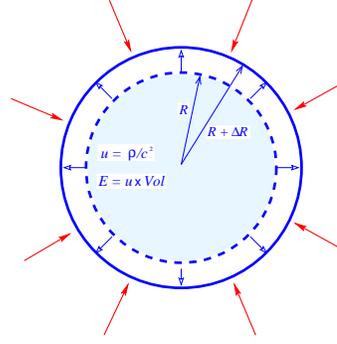


Figura 20. Universo en expansión contra una presión.

Pasemos ahora al caso de una región esférica del Universo de radio R , que se expande en contra de una presión p (figura 20). Al igual que toda longitud puede expresarse como el producto de una coordenada en co-movimiento por el factor de escala del Universo (ecuación 10), el volumen en unidades físicas a un tiempo t de la región de interés V_{fis} , puede escribirse como el producto de R^3 por un volumen en co-movimiento de referencia V_s :

$$V_{fis}(t) = R^3(t) V_s. \quad (27)$$

El cambio temporal del volúmen físico se obtiene derivando en el tiempo la ecuación anterior:

$$\dot{V}_{fis} = 3R^2 \dot{R} V_s = 3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) (R^3 V_s) = 3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) V_{fis}, \quad (28)$$

en donde hemos usado la ecuación 27 en el último paso.

Examinemos ahora la energía total contenida en la región de interés E . En el caso de expansión libre esta es constante, sin embargo en el caso presente, esta energía cambiará en el tiempo debido al trabajo que la expansión tiene que efectuar en contra de la presión. La energía total es igual al producto de la densidad de energía u y el volumen de la región:

$$E(t) = u(t) V_{fis}(t), \quad (29)$$

donde u esta relacionada con la densidad ρ por medio de la relación $u = \rho/c^2$ (recordemos que $E = mc^2$ y $\rho = m/V_{fis}$). Derivando con respecto al tiempo obtenemos:

$$\dot{E} = \dot{u} V_{fis} + u \dot{V}_{fis} = \dot{u} V_{fis} + 3u \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) V_{fis}, \quad (30)$$

donde hemos usado la ecuación 28 en el último paso. El primer término representa una variación en la densidad de energía y el segundo representa la dilución de la energía al aumentar el volumen. En el caso de expansión libre, el primer término se anula ($\dot{u} = 0$), y es solo el segundo término el que cuenta. En este caso obtenemos una expresión equivalente a la que obtuvimos para el Universo en expansión libre (ecuación 20).

Calculemos ahora \dot{E} en función del trabajo que es necesario efectuar en contra de la presión. Dado que el cambio en E es igual al trabajo efectuado (de algún lugar tuvo que salir la energía empleada al realizarse la expansión), podemos usar la ecuación 26 que ya habíamos obtenido para escribir:

$$\dot{E} = -p(t) \dot{V}_{fis}(t) = -3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) p V_{fis}, \quad (31)$$

donde en el último paso hemos usado de nuevo la ecuación 28.

Como las ecuaciones 30 y 31 se refieren a la misma cantidad, podemos igualarlas entre si y obtener:

$$\dot{u}V_{fis} + 3u \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) V_{fis} = -3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) pV_{fis}; \quad (32)$$

eliminando el término común V_{fis} obtenemos finalmente una expresión para la variación temporal de la densidad de energía en la región de interés:

$$\dot{u} = -3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) (u + p), \quad (33)$$

variación que toma en cuenta la dilución geométrica debida al incremento en volumen y el trabajo necesario para realizar la expansión en contra de la presión.

Podemos ahora escribir la ecuación de aceleración del Universo de manera similar al caso del Universo clásico y sin presión. Partimos de la ecuación 22 que habiamos obtenido en ese caso, pero sustituimos ρ y $\dot{\rho}$ por:

$$\rho = u/c^2, \implies \dot{\rho} = \dot{u}/c^2 = -\frac{3}{c^2} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) (u + p); \quad (34)$$

de esta manera obtenemos la versión análoga a la ecuación 23:

$$\begin{aligned} \ddot{R} &= \frac{8\pi}{3}GR \left(\frac{u}{c^2} \right) + \frac{4\pi}{3}G \frac{R^2}{R} \left[-\frac{3}{c^2} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) (u + p) \right] \\ &= \frac{8\pi}{3}GR \left(\frac{u}{c^2} \right) - \frac{4\pi}{3}G \frac{R}{c^2} (3u + 3p) \\ &= \frac{4\pi}{3}G \frac{R}{c^2} [2u - 3(u + p)] = -\frac{4\pi G}{3c^2} (u + 3p) R(t). \end{aligned} \quad (35)$$

Obtenemos así la segunda ecuación de Friedmann:

$$\ddot{R}(t) = -\frac{4\pi G}{3c^2} (u + 3p) R(t). \quad (36)$$

En el caso clásico (ecuación 24) obtuvimos que la aceleración es proporcional a la densidad en sentido negativo, dado que $\rho = u/c^2$, vemos que el primer término de esta ecuación corresponde a este caso; sin embargo, vemos que la presencia de una presión afecta la evolución del Universo y ¡su efecto resulta estar amplificado por un factor de 3! Esto tendrá consecuencias muy importantes como veremos mas adelante.

Para terminar esta sección, obtendremos la forma de las soluciones de Friedmann para el caso de un Universo sin presión, como es el Universo actual. Haciendo $p = 0$ en la ecuación 36,

$$\ddot{R}(t) = -\frac{4\pi G}{3c^2} u R(t), \quad (37)$$

multiplicando esta ecuación por -2 y dividiendo entre R ,

$$-2 \left(\frac{\ddot{R}}{R} \right) = \frac{8\pi G u}{3c^2}. \quad (38)$$

Sustituyendo $\rho = u/c^2$ en la primera ecuación de Friedmann (ecuación 18), obtenemos,

$$\left[\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \right]^2 = \frac{8\pi G u}{3c^2} - \frac{kc^2}{R^2(t)}; \quad (39)$$

sustituyendo ahora la ecuación 38 en esta ecuación, podemos eliminar u y obtener una ecuación en la que solo aparece $R(t)$ como incógnita:

$$\left[\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \right]^2 = -2 \left(\frac{\ddot{R}}{R} \right) - \frac{kc^2}{R^2}. \quad (40)$$

El último paso es multiplicar por R y pasar todo del lado izquierdo de la ecuación:

$$2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + kc^2 = 0 \quad (41)$$

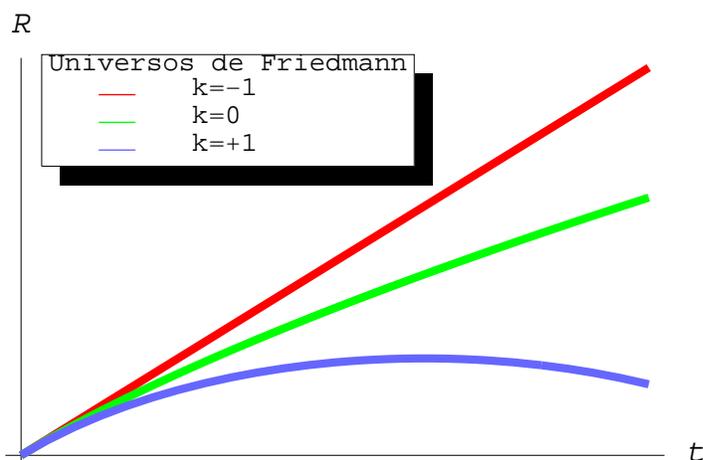


Figura 21. Universos de Friedmann. Se muestra el factor escala del Universo como función del tiempo, para un Universo abierto (línea roja), un Universo plano (línea verde) y un Universo cerrado (línea azul).

Esta es una llamada ecuación diferencial ordinaria de segundo orden que es posible resolver analíticamente. En el presente curso resolveremos esta ecuación para las 3 soluciones de Friedmann ($k = -1, 0, +1$) usando métodos numéricos. Las tres soluciones obtenidas de esta manera se muestran en la figura 21.

V. EL MODELO ESTÁNDAR DE PARTICULAS FUNDAMENTALES

Sinodal: ¿Qué es la electricidad?

*Estudiante: ¡Oh Profesor!, estoy seguro de que aprendí que era.
Estoy seguro que sabía que era, pero lo olvidé.*

*Sinodal: ¡Qué desafortunado!. Sólo dos personas han sabido jamás
lo que es la electricidad, el Autor de la Naturaleza y usted,
y ahora uno de ellos lo ha olvidado.*

*Examen de Física,
Universidad de Oxford (1890)*

Un principio que ha guiado a la ciencia moderna es la creencia de que la gran diversidad que presenta el Universo, puede ser explicada en base a unos cuantos bloques fundamentales y fuerzas de interacción entre ellos. Los esfuerzos unificadores han tenido un gran éxito y en la actualidad han culminado en una síntesis de la física en base a un modelo que describe toda la materia y fuerzas conocidas, excepto la gravedad. A este modelo se le conoce como el *Modelo Estándar de Partículas e Interacciones Fundamentales*. La fuerza de gravedad es descrita por la Teoría General de Relatividad, que describimos en la sección III.1.

Aunque pudiese parecer que la tarea de los físicos esta terminada, hay graves problemas con la situación actual: por un lado, aunque el Modelo Estándar y la Relatividad General han sido verificados innumerables veces, estas dos teorías son incompatibles entre sí a un nivel muy básico. Resulta muy poco satisfactorio pensar que después de un largo y exitoso camino de síntesis descriptiva, el Universo este construido de tal manera que sólo puede ser descrito por dos modelos incompatibles entre si. Einstein dedicó la mayor parte de su vida adulta intentando reconciliar estas dos descripciones sin éxito. Otro grave problema es el hecho de que existen en nuestra descripción actual, un gran número de parámetros, como las masas y cargas eléctricas de varias partículas fundamentales y las magnitudes de varias fuerzas, cuyos valores deben ser obtenidos a partir de mediciones de laboratorio, ya que nuestros modelos no ofrecen explicación alguna para estos valores. Uno podría cambiar los valores de estos parámetros sin violar la validez del modelo actual, mas claramente la descripción que se obtendría no corresponde al Universo que conocemos.

Este objetivo de unificación máxima de la física moderna se basa en la creencia de que el Universo es análogo a un rompecabezas: un rompecabezas sólo puede ser armado de una manera, ya que existen en la forma de sus piezas y en las figuras que aparecen en su superficie, elementos que hacen que sólo exista una configuración en la que el rompecabezas armado tenga sentido. Es el hecho de que esta configuración sea única, y de que toda la información necesaria para llegar a ella esté contenida en el rompecabezas mismo, lo que buscan los físicos en un modelo unificado del Universo. Claramente el Modelo Estándar no es esta descripción unificada. Aún así, el Modelo Estándar no debe ser menospreciado, pues su poder predictivo es enorme. Además, a partir de 1980, físicos enfrascados en la construcción de extensiones del Modelo Estándar descubrieron que su trabajo tenía implicaciones importantísimas en la Cosmología. Así pues, a partir de estas fechas, ha florecido una colaboración muy estrecha entre físicos dedicados a estudiar el Universo en escalas cada vez mas pequeñas, con cosmólogos, interesados en estudiar el Universo en sus escalas mas grandes. Es por esto que presentamos en esta sección una descripción, necesariamente breve, del Modelo Estándar, ya que existen varios conceptos y fenómenos que emplearemos en la extensión del modelo de la Gran Explosión que presentaremos en la siguiente sección.

En el caso de la descripción de la materia, la idea de que todas las propiedades de las sustancias pueden ser explicadas en base a la combinación de unos cuantos elementos químicos tiene una larga historia. Ya en 1661 el científico Inglés Robert Boyle había escrito:

*“ Por elementos, quiero decir ciertos cuerpos primitivos,
simples y perfectamente puros;*

*que al no estar hechos de ningún otro cuerpo, o unos de otros,
son los ingredientes en base a los que todos los demas cuerpos estan formados.”*

*Robert Boyle,
Sceptical Chymist (1661)*

Sin embargo, Boyle solo podía especular, pues no hab'ia en su época evidencia científica alguna que apoyase su especulación. Entre 1797 y 1807, el químico Francés J. Proust descubrió que en un gran número de sustancias compuestas, las sustancias que las componen, se mezclan solo en proporciones específicas. El químico Inglés John Dalton (1766–1844) utilizó este resultado para revivir una vieja especulación del filósofo Griego Democritus y proponer que existen sustancias químicas elementales constituidas por unidades indivisibles de materia y que se combinan en proporciones definidas para formar todas las demás sustancias. Con el trabajo de Dalton aparece la primera distinción entre compuesto y elemento químico. El químico Ruso Dimitri Mendeléev (1834–1907) y el químico Alemán Lothar Meyer (1830–1895), dieron un paso fundamental en 1869, cuando de manera independiente propusieron un esquema según el cual todas los elementos químicos conocidos podían escribirse en una tabla en la que sus propiedades químicas podían deducirse de sus posiciones en dicha tabla ahora conocida como la *tabla periódica de elementos*. El poder de esta descripción fué constatado al descubrirse nuevos elementos que ocupaban espacios vacíos en la tabla y cuyas propiedades se confromaban a lo esperado en dicha descripción. Con el tiempo la tabla periódica creció hasta llegarse a conocer los 92 elementos químicos que ocurren de manera natural en la Tierra. Con esta primera síntesis era posible explicar todas las sustancias conocidas como combinaciones de estos 92 elementos.

A finales del siglo XIX y principios del XX se suceden una serie de descubrimientos experimentales de gran importancia para la descripción de la materia. En 1899, J. Thompson (1856–1940) descubre el electrón, primera partícula fundamental en ser encontrada. Hacia mediados del siglo XX, el modelo aceptado postula que toda la materia se compone de moléculas, formadas de átomos, los cuales a su vez estan formados de electrones, protones y neutrones, la partículas fundamentales de la época.

VI. EL UNIVERSO INFLACIONARIO

“La Cosmología esta a menudo errada, mas nunca en duda”

Lev Landau

VII. EPILOGO

Los miembros de la Sociedad Filosófica del Pequeño Charco se encontraban enfrascados en un debate sobre la posibilidad de vida fuera del Pequeño Charco. El principal proponente de la tesis de que el ambiente local constituye el medio óptimo para la vida, un pequeño paramecio llamado Philo, hablaba. Esto lo hacía agitando tres de sus innumerables cilios, produciendo así ondas sonoras que se propagaban por el agua del Pequeño Charco.

“Es obvio que la vida es imposible fuera de los confines del Pequeño Charco,” argüía. “El ambiente que habitamos está optimamente diseñado para la vida. El agua permanece aproximadamente a la misma temperatura todo el tiempo, mientras que como bien sabemos, un pequeño cambio es mortal para nosotros. El balance que existe entre acidez y alcalinidad es justo el necesario para los seres vivos, gracias a las pequeñas cantidades de fosfatos y nitratos disueltos en el agua. El lodo que hay en el fondo del Pequeño Charco contiene la cantidad justa de sulfatos para proveernos de tan esencial elemento para nuestro metabolismo. De tiempo en tiempo se introducen en el Pequeño Charco pequeñas cantidades de agua que contienen compuestos de carbono disueltos en ella y que usamos en la construcción de nuestro cuerpos. Por si esto fuera poco, las formas inferiores de vida que existen en nuestro Charco, y que forman la base de nuestra alimentación, dependen de las mismas condiciones. ¿Cómo podrían existir las benéficas bacterias productoras de metano sin el lodo que las protege del origen externo y las provee de los materiales necesarios para su metabolismo? ¿Dónde irían las algas que viven en la superficie del Pequeño Charco si este fuera mucho más grande, de manera que su superficie estuviese mucho más alejada del fondo lodoso? Existen ciertamente muchos otros ambientes en el Universo, pero es imposible imaginar alguna forma de vida que se pudiese adaptar a las diferencias que existen entre esos ambientes y el Pequeño Charco.”

“Nosotros los paramecios estamos tan bien adaptados al Pequeño Charco,” continuaba, “que en cualquier otro ambiente que no tuviera todas las cualidades anteriores en exactamente las proporciones adecuadas, la vida de los paramecios no sería posible. Dado que somos una parte esencial en la ecología del Pequeño Charco, si nosotros no pudiesemos sobrevivir, tampoco podría la biósfera completa del Pequeño Charco.” “La conclusión es inescapable,” afirmó. “La vida sólo es posible en el Pequeño Charco, o en otros charcos idénticos. El resto del Universo debe estar inhabitado.”

Otro paramecio se levantó para apoyar a Philo y extender sus argumentos: “Dado que la conclusión es ineludible,” dijo el otro, “debe ser que el Universo entero está diseñado para asegurar la existencia de nuestro hogar. Si no existiera una pequeña depresión en la roca que nos rodea, el Pequeño Charco no se habría formado, y nosotros no estaríamos aquí para apreciarlo. Si el agua se congelase a una temperatura sólo ligeramente mayor, el Pequeño Charco se congelaría en su superficie y la lluvia de nutrientes que lo alimenta no llegaría a nosotros.

Usando una nueva idea que he dado en llamar el Principio Paramécico, puedo demostrar que las leyes de la naturaleza deben ser exactamente como son y no de alguna otra manera. Pues de lo contrario no habría paramecios que pudiesen descubrirlas. Por ejemplo, si el calor necesario para vaporizar agua fuese ligeramente menor, entonces después de que la Gran Lluvia creó el Pequeño Charco, este se habría evaporado horas antes del tiempo necesario para la aparición de la primera generación de paramecios.”

“Así pues,” concluyó, “si no hubiese sido por el providencial gran calor latente de vaporización del agua, el Universo estaría completamente vacío de vida que pudiese filosofar sobre el mismo.”

La audiencia aplaudió esta brillante muestra del poder del razonamiento paramérico, como igual hicieron todos los demás habitantes del Pequeño Charco, con excepción de unos cuantos insectos en su superficie que habían visto como algunos de sus compañeros habían sido devorados por un sapo que pasaba. Mientras tanto, fuera del Pequeño Charco, 10^{30} seres vivos proseguían con sus existencias en la gran variedad de ambientes existentes en la Tierra, ignorantes por completo de las pruebas paraméricas de la imposibilidad de sus existencias.

Traducido de "Vida mas allá de la Tierra" de Gerald Feinberg y Robert Shapiro. William Morrow and Co. Inc. (1980).

APENDICE I: Sistemas de Unidades

El sistema de unidades mas usado en la Física es el sistema MKS. Este sistema se define en base a tres unidades fundamentales: el *metro* como unidad de longitudes, el *kilogramo* como unidad de masa y el *segundo* como unidad de tiempo. Cualquier otra cantidad física (con excepción de algunas unidades del electromagnetismo), pueden expresarse en función de estas tres unidades fundamentales.

A continuación damos una tabla de las principales cantidades físicas que usaremos y las unidades en que se miden dentro del sistema MKS:

Cantidad Física	Unidad	Nombre de la unidad	Símbolo
Longitud	m	metro	m
Masa	kg	kilogramo	kg
Tiempo	s	segundo	s
Velocidad	m/s	—	m/s
Aceleración	m/s^2	—	m/s^2
Fuerza	$kg \times m/s^2$	Newton	N
Energía	$kg \times m^2/s^2$	Joule	J

De la ecuación de la gravitación universal (ecuación 1), vemos que la constante universal de gravitación G debe expresarse en unidades de fuerza por distancia al cuadrado dividido entre la unidad de masa al cuadrado: $N \times m^2/kg^2$. Expresando N en términos de las tres unidades fundamentales, vemos que las unidades de G son $m^3/(kg \times s^2)$

En la Astronomía se emplean otras unidades con gran frecuencia. Como unidades de longitud tenemos la *unidad astronómica*, denotada con el símbolo UA y que representa la distancia promedio entre la Tierra y el Sol. Su valor es $1 UA = 1.495 \times 10^{11} m$. El *año luz*, denotado como AL , es la distancia que un rayo de luz recorre en un año. Su valor es $1 AL = 9.46 \times 10^{15} m$. Existe también el *parsec*, cuyo origen esta en una técnica particular de determinación de distancias llamada paralaje y que no explicaremos. Baste decir que su valor es $1 pc = 3.0856 \times 10^{16} m$. En el ámbito galáctico, extragaláctico y cosmológico, es común usar kiloparsecs (kpc), megaparsecs (Mpc) y gigaparsecs (Gpc), que representan mil, un millón y mil millones de parsecs, respectivamente. Como unidad de masa es común usar la masa del sol cuyo valor es $1 M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30} kg$

APENDICE II: Demostración de los Teoremas de Newton.

La demostración de Newton es diferente a la que mostraremos aquí. La demostración del segundo teorema, en particular, es la más difícil y motivó que Newton retrasara diez años la publicación de los Principia. De hecho, la demostración de estos teoremas dió lugar a la invención del cálculo. Aquí demostraremos el primer teorema y parte del segundo.

Las demostraciones que aquí daremos tienen la ventaja de no requerir de conocimientos de cálculo. Estas son demostraciones ingeniosas que sólo usan argumentos de simetría y conocimientos de geometría y álgebra. Estas demostraciones han sido tomadas del libro de Binney y Tremaine (1987). El segundo Teorema es demostrado de manera parcial pues una demostración completa requiere de conocimientos de cálculo.

II.1 El Primer Teorema de Newton

El primer teorema nos dice que un cascarón esférico y uniforme de masa no ejerce fuerza sobre un objeto situado en cualquier punto de su *interior*.

Imaginemos un punto arbitrario p dentro de un cascarón esférico de masa uniforme (La figura AII.1 representa un corte por medio de un plano arbitrario que contiene al punto p). Imaginemos ahora dos conos muy delgados alineados y unidos por sus vértices en el punto p . Supongamos que el ángulo sólido de apertura de los conos es $\delta\Omega$. La intersección de los conos con el cascarón esférico define dos pequeñas porciones de masas δm_1 y δm_2 que se encuentran a distancias d_1 y d_2 del punto p .

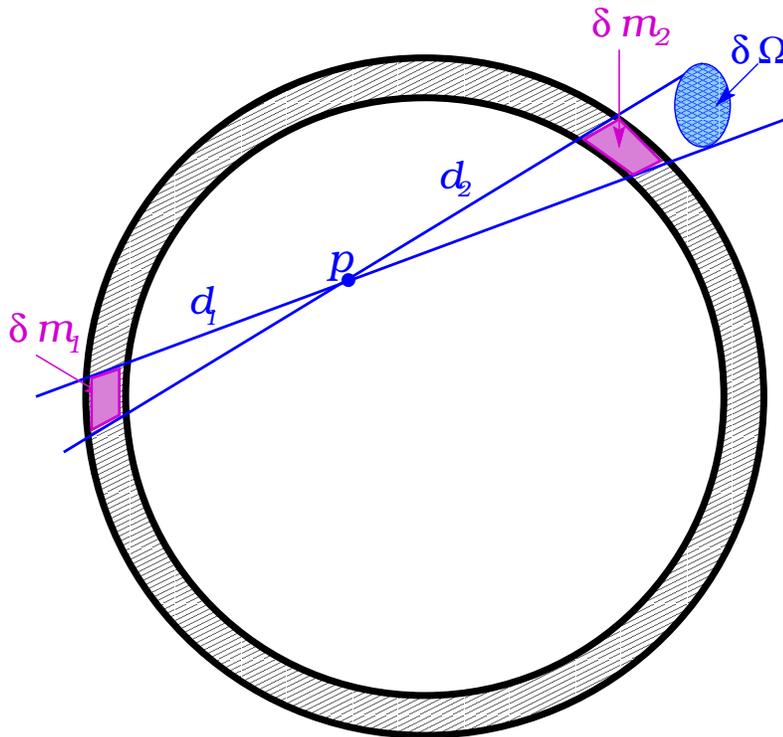


Figura AII.1.

Es claro que cada porción de masa ejercerá una atracción sobre el punto p , siendo las atracciones opuestas en dirección. A menos que el punto p se encuentre justo a la mitad entre las masas y por tanto las atracciones se cancelen, no es claro que las atracciones sean iguales. Supongamos que la masa δm_1 sea la más cercana a p . Al ser la distancia d_1 más pequeña que d_2 , esperamos que la atracción debida a δm_1 sea

mayor. Sin embargo, existe un argumento opuesto: dado precisamente que δm_1 esta mas cerca, el tamaño de la porción del cascarón que cortará el cono será más pequeño que en el caso del cono opuesto; razón por la que δm_1 será más pequeño que δm_2 y por tanto su fuerza de atracción menor. ¿Será posible que estos dos efectos se cancelen exactamente dando lugar a que las atracciones de δm_1 y δm_2 se cancelen?

Examinemos en detalle este argumento: Como la fuerza de gravedad depende de la masa del cuerpo que atrae y del inverso del cuadrado de la distancia, es claro que las fuerzas de atracción producida por δm_1 y δm_2 seran proporcionales a:

$$a_1 \propto \frac{\delta m_1}{d_1^2}, \quad a_2 \propto \frac{\delta m_2}{d_2^2}, \quad (AII.1)$$

en estas fórmulas podemos ver el primer argumento que dimos, al estar δm_1 mas cerca de p , $d_1 < d_2$ y esto nos hace pensar que $a_1 > a_2$.

Sin embargo, el tamaño del pedazo de cascarón esférico que corta cada cono es igual al producto del ángulo sólido por el cuadrado de la distancia del vértice del cono al lugar del corte:

$$\delta m_1 \propto d_1^2 \delta \Omega, \quad \delta m_2 \propto d_2^2 \delta \Omega, \quad (AII.2)$$

esto ilustra el segundo argumento, al ser $d_1 < d_2$, entonces $\delta m_1 < \delta m_2$ y por tanto pareciera que $a_1 < a_2$.

Juntemos ahora estas dos relaciones, sustituyendo la expresión para δm dada por AII.2 en la expresion para la atracción dada por AII.1:

$$a_1 \propto \frac{\delta m_1}{d_1^2} \propto \frac{d_1^2 d\Omega}{d_1^2} \propto d\Omega, \quad a_2 \propto \frac{\delta m_2}{d_2^2} \propto \frac{d_2^2 d\Omega}{d_2^2} \propto d\Omega, \quad (AII.3)$$

Es claro que los dos argumentos que hemos dado se cancelan exactamente (los dos dependen del cuadrado de la distancia a p pero con efectos opuestos) y por tanto las atracciones ejercidas serán iguales y opuestas, razón por lo que se cancelan. Como la dirección de los conos es completamente arbitraria, es claro que podemos cubrir todo el cascarón esférico con conos similares y en cada caso el resultado será el mismo. Por otro lado, el punto p es completamente arbitrario (excepto que es interior al cascarón), así pues queda demostrado el primer teorema de Newton.

11.2 El Segundo Teorema de Newton

El segundo teorema nos dice que un cascarón esférico y uniforme de masa ejerce una fuerza idéntica a la producida por un punto de masa igual al del cascarón y situada en su centro geométrico, sobre objetos que estan situados *fuera* del cascarón.

Aqui solo probaremos que la fuerza ejercida estará siempre dirigida hacia el centro del cascarón y es por tanto análoga a la producida por un punto masa situado ahi. Lo que no probaremos es que el punto masa que es equivalente tenga una masa igual a la del cascarón.

Examinemos la figura AII.2 que presenta un cascarón esférico de masa y un punto externo arbitrario p donde deseamos calcular la fuerza producida por el cascarón (al igual que en otras figuras similares, el cascarón ha sid ocortado para poder ver el interior, para la demostración del teorema el cascarón debe considerarse completo). Sea q un punto arbitrario en el cascarón. Es claro que si el punto q no esta sobre la línea que une el punto p con el centro del cascarón O , siempre podemos encontrar otro punto q' , que es simétrico a q con respecto a la línea \overline{pO} . Por simetría es claro que la suma de las atracciones individuales producidas por q y q' estará en dirección del punto medio entre los dos, es decir, sobre la línea \overline{pO} , y por tanto p sentirá la atracción hacia el centro del cascarón esférico. Como esto es válido para todo punto q sobre el cascarón esférico, es claro que al sumar las contribuciones de todas las partes del cascarón la atracción total apuntará en la misma dirección. Finalmente, notamos que dado que el punto p es arbitrario, podemos escoger un punto en otra dirección y llegar a la misma conclusión, razón por la que la atracción producida por el cascarón siempre apunta al centro del mismo y debe ser por tanto equivalente a la que produce un punto masa situado en O .

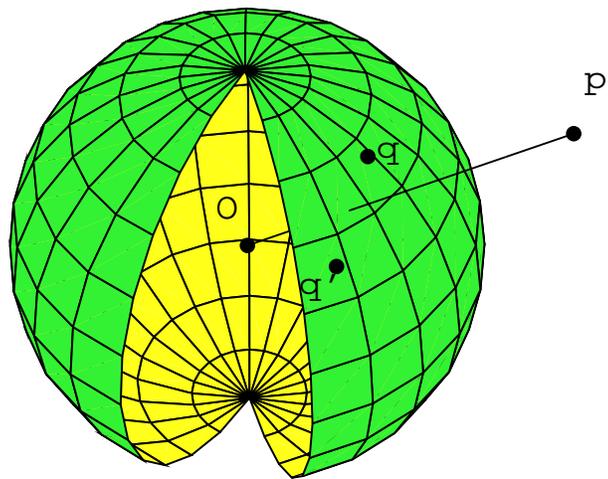


Figura AII.2.

APENDICE III: Nociones Elementales de Cálculo Diferencial.

En este apéndice hacemos una presentación breve de los resultados de Cálculo Diferencial usados en este breviario. Los resultados son introducidos por medio de motivaciones geométricas y físicas, sin pretender tener rigor matemático; ya que lo que se busca es mostrar de manera sencilla el significado de los resultados sin desviarnos demasiado del tema cosmológico. La lectura de este apéndice es necesaria para aquellos lectores que no esten familiarizados con el Cálculo Diferencial. También puede servir como recordatorio.

III.1 El Concepto de Derivada

Supongamos que un automóvil viaja entre dos puntos A y B . Es claro que la velocidad promedio se obtiene dividiendo la distancia recorrida entre el tiempo empleado:

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{distancia total recorrida}}{\text{tiempo del viaje}},$$

sin embargo, a menos que el automóvil haya viajado a velocidad constante durante todo el trayecto, la velocidad instantánea, medida por el velocímetro del auto, no será igual en general a esta velocidad promedio.

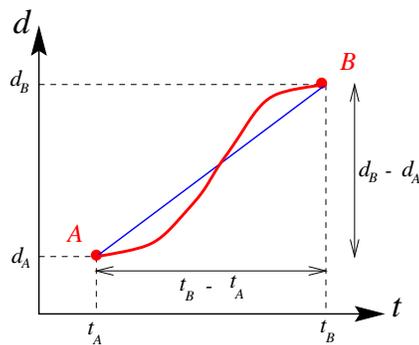


Figura AIII.1a Viaje de un auto entre los puntos A y B . El eje horizontal es el tiempo y el vertical la distancia recorrida. La curva roja es la trayectoria seguida. La línea azul representa un viaje a velocidad constante e igual a la velocidad promedio.

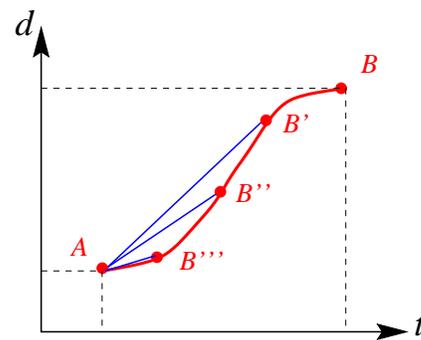


Figura AIII.1b La velocidad instantánea en el punto A puede aproximarse como la velocidad promedio entre este punto, y los puntos B' , B'' , B''' , etc; cada vez más cercanos al punto A . Nótese que nos acercamos a la tangente a la trayectoria en el punto A .

Examinemos de manera gráfica lo que sucede. En la figura AIII.1a hemos dibujado un diagrama donde el eje horizontal indica el tiempo transcurrido y el eje vertical la distancia recorrida. Los puntos terminales A y B del viaje se indican, siendo t_A el tiempo al momento de partir, t_B el tiempo al arribar, y d_A y d_B las posiciones de A y B . Como hemos visto, la velocidad promedio \tilde{v} esta dada por

$$\tilde{v} = \frac{d_B - d_A}{t_B - t_A}; \quad (\text{AIII.1})$$

viendo la figura vemos que la velocidad promedio resulta ser la pendiente de la recta \overline{AB} que une los puntos terminales.

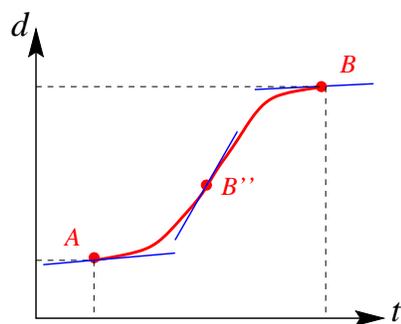


Figura AIII.1c La velocidad instantánea en un punto cualquiera de la trayectoria es igual a la pendiente de la tangente en el punto de interés. Así por ejemplo, es claro en la figura que el auto inicia con una velocidad pequeña en A, acelera hasta alcanzar una velocidad mayor en B'', para llegar a B con una velocidad pequeña de nuevo.

Intuitivamente, la velocidad instantánea puede verse como la velocidad promedio del automovil medida entre dos posiciones cada vez mas cercanas entre sí. Por ejemplo, si medimos la velocidad promedio entre el punto inicial A y los puntos B', B'', B''', etc; cada vez mas cercanos al punto A, nos iremos aproximando a la velocidad instantánea en el punto A. Viendo la figura III.1b vemos que este proceso nos da las pendientes de las rectas $\overline{AB'}$, $\overline{AB''}$, $\overline{AB'''}$, etc; y que estas se aproximan cada vez mas a la recta tangente a la trayectoria en el punto A. Así pues, vemos intuitivamente que la velocidad instantánea corresponde a la pendiente de la recta tangente a la curva descrita por el auto en un diagrama de distancia contra tiempo. En la figura III.1c se muestran las tangentes en tres puntos del recorrido: En el punto A el auto inicia con una velocidad pequeña y de ahí acelera hasta alcanzar una velocidad considerable en el punto B'', para luego empezar a desacelerar y llegar a B con una velocidad pequeña de nuevo.

Habiendo establecido que la velocidad instantánea corresponde a la pendiente de la recta tangente, ¿cómo podemos encontrar esta pendiente? El procedimiento de aproximación que hemos descrito en el párrafo anterior nos da la clave para su obtención: En la figura AIII.2 se tiene la gráfica de una función arbitraria $f(t)$ y nos interesa encontrar la pendiente de la recta tangente a esta función en el punto $t = t_0$. Nos fijamos en un punto cercano, $t = t_0 + \Delta t$, y trazamos la recta que une los dos puntos de la función evaluada en estas posiciones (panel izquierdo de la figura). La pendiente de esta recta esta dada por el cociente de los intervalos vertical y horizontal entre los dos puntos:

$$\text{pendiente} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \tag{AIII.2}$$

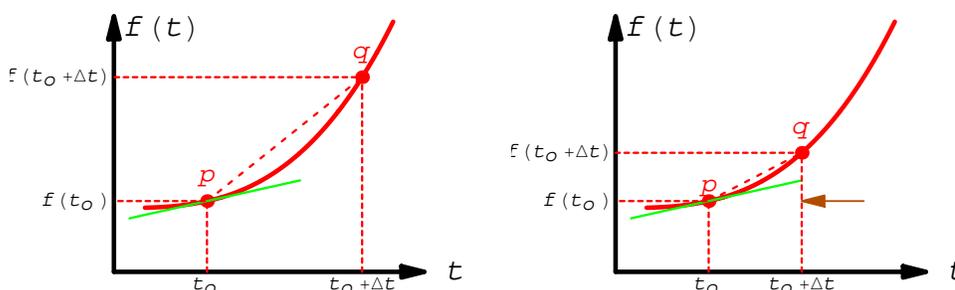


Figura AIII.2 Aproximación a la derivada de una función $f(t)$ en el punto p, como la pendiente de la recta que une este punto con otro punto q cercano (panel izquierdo). A medida que q se acerca a p, la recta que une estos dos punto tiende a la tangente a la función en p (panel derecho).

Imaginamos ahora que reducimos el valor de Δt manteniendo fija la posición $t = t_0$, con lo que la recta entre los puntos p y q se aproxima a la recta tangente a $f(t)$ en $t = t_0$ (panel derecho de la figura). En el

límite en que Δt tiende a cero, obtenemos la pendiente de la recta tangente:

$$\text{pendiente de la recta tangente} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}. \quad (\text{AIII.3})$$

¿Qué significa en la ecuación anterior el proceso de “tomar el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$ ”, que hemos indicado con la notación $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$? Obviamente no podemos evaluar el cociente dado por la ecuación AIII.2 en $\Delta t = 0$, ya que obtendríamos el cociente de 0 sobre 0 que es indeterminado. El concepto de tomar el límite es más sutil: indica que primero hacemos el cociente asumiendo un valor pequeño pero no nulo de Δt , y después vemos hacia que valor asintótico tiende la expresión resultante al hacer Δt tender a 0.

Veamos un ejemplo particular. Si $f(t) = t^2$, la ecuación AIII.2 es entonces:

$$\begin{aligned} \text{pendiente} &= \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = \frac{(t_0 + \Delta t)^2 - t_0^2}{\Delta t} \\ &= \frac{(t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2) - t_0^2}{\Delta t} = \frac{2t_0\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = 2t_0 + \Delta t; \end{aligned} \quad (\text{AIII.4})$$

habiendo calculado el cociente, procedemos ahora a obtener la forma asintótica a la que tiende este cuando Δt tiende a 0:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2t_0 + \Delta t) = 2t_0. \quad (\text{AIII.5})$$

Es claro que el primer término permanece constante mientras que el segundo desaparece, con lo que la pendiente de la recta tangente a $f(t) = t^2$ en $t = t_0$ resulta ser igual a $2t_0$. Nótese como al haber calculado y simplificado primero el cociente entre los incrementos en la función y la variable independiente, se han cancelado términos y hemos obtenido una expresión cuyo valor asintótico al tomar el límite está bien definido.

Sólo nos resta ahora introducir la notación adecuada. El procedimiento que hemos descrito para obtener la pendiente de la recta tangente es una operación que recibe el nombre de *derivada*. Específicamente, decimos que la derivada de la función $f(t)$ está dada por:

$$\frac{d}{dt}f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} \quad (\text{AIII.6})$$

donde t_0 ya no aparece explícitamente pues la expresión anterior es válida para cualquier valor de la variable independiente t en el que esté definida la función f .

Esta notación se la debemos al matemático Alemán G.W. Leibnitz (1646–1716), quien de manera independiente a I. Newton, sentó las bases del Cálculo. La lógica detrás de esta notación es que Δ representa un incremento mientras que d , llamada *diferencial*, es el resultado de obtener el límite de un incremento. Así pues, la notación para la derivada es el cociente de dos diferenciales. Aclarar ¿qué exactamente se entiende por “diferencial”? dió lugar al Análisis, que es una parte de las Matemáticas que dió rigor matemático al desarrollo del Cálculo hecho por Leibnitz y Newton. Esta parte está fuera de los objetivos de este breviarío, aunque hacemos la observación para que el lector esté consciente de que detrás de los procedimientos que hemos indicado se esconden conceptos sofisticados cuyo desarrollo necesitó del trabajo de muchos matemáticos. Leibnitz y Newton justificaron de manera más “operacional” y geométrica los conceptos aquí discutidos, siguiendo un espíritu similar al de este apéndice.

Una notación alternativa que a menudo usaremos es la notación de Newton, quien usa un pequeño punto directamente sobre una función para indicar su derivada:

$$\dot{f}(t) = \frac{d}{dt}f(t) \quad (\text{AIII.7})$$

Nosotros usaremos esta notación para indicar derivadas donde la variable independiente con respecto a la que hacemos la derivación es el tiempo.

El proceso de derivación puede efectuarse repetidas veces sobre la misma función, con lo que obtenemos la pendiente de la función que describe la variación de la pendiente de la función original y así sucesivamente. A la resultante de efectuar la derivación repetidas veces llamaremos derivadas segundas, terceras, etc. La segunda derivada se indica de la manera siguiente usando las dos notaciones:

$$\ddot{f}(t) = \frac{d^2}{dt^2}f(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt}f(t) \right) \quad (AIII.8)$$

III.2 Derivadas de algunas funciones elementales

Para obtener la derivada de una función aplicamos directamente la definición dada por la ecuación AIII.6. Empezaremos probando que la derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de las funciones individuales, ya que este resultado nos facilitará cálculos posteriores.

Séa $f(t) = g(t) + h(t)$ la suma de dos funciones. La derivada de esta función es entonces:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[g(t + \Delta t) + h(t + \Delta t)] - [g(t) + h(t)]}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} + \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{d}{dt}g(t) + \frac{d}{dt}h(t) \end{aligned} \quad (AIII.9)$$

donde en el primer paso aplicamos la definición de derivada, en el segundo paso aplicamos la definición de $f(t)$ y en el tercer paso redistribuimos los términos del numerador y partimos la expresión en dos fracciones. En el cuarto paso hemos usado el hecho, que no probaremos pero que es intuitivamente claro, de que el límite de una suma de términos es igual a la suma de los límites, ya que al tomar el límite, cada término en la suma tenderá a su límite individual y el límite global será simplemente la suma de los límites individuales.

Otro resultado útil es que la derivada del producto de una constante a y una función $f(t)$, es igual al producto de esa constante por la derivada de la función:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}af(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{af(t + \Delta t) - af(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a[f(t + \Delta t) - f(t)]}{\Delta t} \\ &= a \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \\ &= a \frac{d}{dt}f(t), \end{aligned} \quad (AIII.10)$$

en el tercer paso hemos usado el hecho de que el límite del producto de una constante por una función es igual al producto de esa constante por el límite de la función. De nuevo es claro que si al tomar el límite de un producto, uno de los factores se mantiene constante, la operación de tomar el límite solo afecta a la función.

Probaremos ahora que la derivada de una función constante es cero. Si $f(t) = a$, a constante, la derivada es entonces:

$$\frac{d}{dt}a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a - a}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 0 = 0 \quad (AIII.11)$$

Aunque parezca trivial, el cálculo de esta derivada es ilustrativa. El cociente que aparece es de la forma $0/\Delta t$, que evaluado en $\Delta t = 0$ es indefinido; sin embargo, para obtener la derivada se calcula el cociente para Δt diferente de cero y después se toma el límite $\Delta t \rightarrow 0$, que no es igual a evaluar en $\Delta t = 0$. Una gráfica del cociente como función de Δt nos daría en este caso una curva constante e igual a cero definida para todo valor de $\Delta t \neq 0$. Así pues, no es necesario que este definido el valor de una función en un punto dado de su gráfica para que tenga sentido el valor del límite de esta función al aproximarnos al punto en cuestión.

La derivada de una función lineal $f(t) = a_1t + a_0$, donde a_0 y a_1 son constantes, puede ser entonces calculada como la suma de las derivadas de a_1t y a_0 . Dado que ya sabemos que la derivada de a_0 es nula, basta obtener la derivada de a_1t :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}a_1t &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a_1(t + \Delta t) - a_1t}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(a_1t + a_1\Delta t) - (a_1t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a_1\Delta t}{\Delta t} = a_1 \end{aligned} \quad (AIII.12)$$

la derivada de una línea recta resulta ser constante, como era de esperarse, y su valor no es afectado por la ordenada al origen a_0 , ya que desplazar la función verticalmente no altera la pendiente de la función.

Calculemos ahora la derivada de la función cuadrática general $f(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$, donde a_2 , a_1 y a_0 son constantes, como la suma de las derivadas de los términos individuales. La derivada del término a_2t^2 es igual a a_2 por la derivada de t^2 que calculamos en la sección anterior (ecuación AIII.5). La derivada de a_1t es igual a a_1 y la derivada de a_0 es nula. De manera que

$$\frac{d}{dt}(a_2t^2 + a_1t + a_0) = 2a_2t + a_1 \quad (AIII.13)$$

Veamos si podemos encontrar ahora la derivada de un polinomio general $f(t) = a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_2t^2 + a_1t + a_0$, donde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$ y a_0 son constantes arbitrarias. Para calcular la derivada separamos el polinomio en sus términos y calculamos la derivada de cada término individual; así por ejemplo, la derivada del término de orden n es igual a:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}a_nt^n &= a_n \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(t + \Delta t)^n - t^n}{\Delta t} \\ &= a_n \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(t^n + nt^{n-1}\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)) - t^n}{\Delta t} \\ &= a_n \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{nt^{n-1}\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)}{\Delta t} \\ &= a_n \lim_{\Delta t \rightarrow 0} nt^{n-1} + \mathcal{O}(\Delta t) \\ &= nt^{n-1}; \end{aligned} \quad (AIII.14)$$

en el segundo paso hemos usado la fórmula del binomio* y $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ indica términos que contienen el factor Δt elevado al cuadrado o un exponente mayor. En el cuarto paso hemos dividido entre Δt y $\mathcal{O}(\Delta t)$ indica términos en Δt y potencias mayores. El paso fundamental es darnos cuenta de que todos los términos de la expansión $(t + \Delta t)^n$, excepto los dos primeros, contienen el factor Δt elevado al cuadrado o un exponente superior y por tanto tenderán a 0 al tomar el límite $\Delta t \rightarrow 0$. El primer término de la expansión será cancelado al restar la función evaluada en t y sólo sobrevivirá el segundo término de la expansión, que al ser de la forma $nt^{n-1}\Delta t$, nos dará nt^{n-1} como derivada.

* $(t + \Delta t)^n = t^n + C_1^n t^{n-1}\Delta t + C_2^n t^{n-2}\Delta t^2 + \dots + C_n^n \Delta t^n$, donde los coeficientes binomiales están dados por: $C_1^n = n$, $C_2^n = n(n-1)/2$, $C_k^n = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)/k!$

El resultado anterior es válido para cualquier n entero, positivo; en particular si aplicamos este resultado sustituyendo $n - 1$ en lugar de n obtenemos que $dt^{n-1}/dt = (n - 1)t^{n-2}$; si sustituimos $n - 2$ obtenemos $dt^{n-2}/dt = (n - 2)t^{n-3}$ y así sucesivamente. Sustituyendo $n = 1, 2$, recobramos los resultados obtenidos anteriormente para las funciones lineal y cuadrática. La derivada general de un polinomio es entonces:

$$\frac{d}{dt}(a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0) = n a_n t^{n-1} + (n - 1) a_{n-1} t^{n-2} + \dots + 2 a_2 t + a_1. \quad (AIII.15)$$

El resultado obtenido en la ecuación AIII.14 es válido también para valores de n fraccionales y negativos. Así por ejemplo se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} t^{-n} &= -n t^{-(n+1)}, \\ \frac{d}{dt} t^{p/q} &= (p/q) t^{(p/q)-1}; \end{aligned} \quad (AIII.16)$$

la demostración de esta generalización del resultado obtenido esta fuera del alcance de este breviario.

Encontraremos ahora la derivada de un producto de funciones. Sea $f(t) = g(t)h(t)$; usando la definición de derivada tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[g(t + \Delta t)h(t + \Delta t)] - [g(t)h(t)]}{\Delta t}, \end{aligned}$$

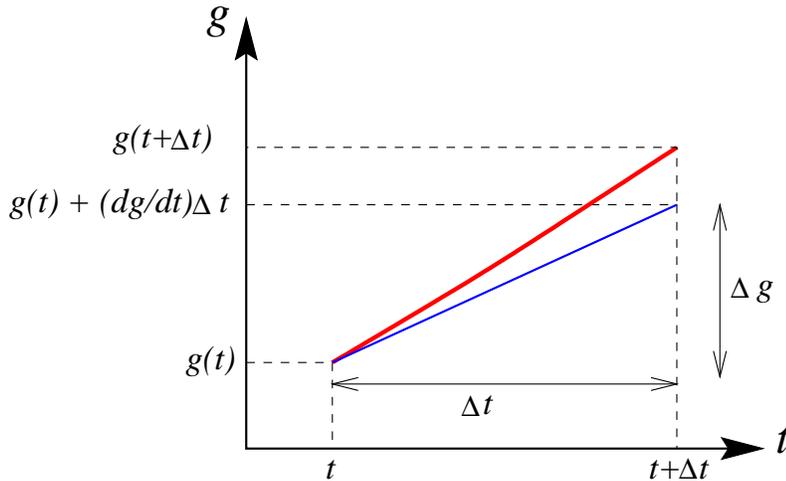


Figura AIII.3 Aproximación al valor de la función g (curva roja) evaluada en el punto $t+\Delta t$, por medio de una extrapolación a lo largo de la recta tangente (línea azul) a la función a partir del punto de interés ($\Delta g = (dg/dt)\Delta t$).

para continuar usaremos la aproximación $g(t + \Delta t) \approx g(t) + (dg/dt)\Delta t$; en la figura AIII.3 vemos que esto equivale a aproximar el valor de $g(t + \Delta t)$ como $g(t) + \Delta g$, donde Δg corresponde a una extrapolación a $t + \Delta t$ a lo largo de la recta tangente a g en t . En general, $g(t + \Delta t) \neq g(t) + \Delta g$, sin embargo, esta es una muy buena aproximación para Δt pequeño, que es el límite que nos interesa en el cálculo de la derivada.

Usando esta aproximación para las funciones g y h , el primer término del numerador del cociente que aparece en la expresión a la que habíamos llegado en el cálculo de la derivada de gh , queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} g(t + \Delta t) h(t + \Delta t) &\approx [g(t) + (dg/dt)\Delta t][h(t) + (dh/dt)\Delta t] \\ &= g(t)h(t) + g(t)(dh/dt)\Delta t + h(t)(dg/dt)\Delta t + (dg/dt)(dh/dt)\Delta t^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en el cálculo de la derivada del producto gh , obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(dh/dt)\Delta t + h(dg/dt)\Delta t + (dg/dt)(dh/dt)\Delta t^2}{\Delta t}, \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(g \frac{dh}{dt} + h \frac{dg}{dt} + \frac{dg}{dt} \frac{dh}{dt} \Delta t \right) \\ &= g \frac{dh}{dt} + h \frac{dg}{dt} \end{aligned} \tag{AIII.17}$$

Para terminar encontraremos la derivada de una función compuesta, es decir una función $f(g(t))$ que depende de otra función g que es a su vez función de la variable independiente t . Por ejemplo, la altura del nivel de agua en un tanque h es función del flujo de entrada de agua f , el cual a su vez puede ser función del tiempo t , en este caso el nivel de agua varía en el tiempo a través de la variación temporal del flujo de entrada de agua $h(t) = h(f(t))$. Para encontrar la derivada de una función compuesta procedemos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(g(t)) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta g} \frac{\Delta g}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta g} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta t} \\ &= \frac{d}{dg}f(g) \frac{d}{dt}g(t), \end{aligned} \tag{AIII.18}$$

donde Δf y Δg indican incrementos en las funciones f y g y en el tercer renglón hemos dividido y multiplicado por Δg , por lo que la expresión permanece inalterada. En la siguiente línea hemos distribuido la operación de tomar el límite dentro del producto, ya que el límite al que tiende un producto es igual al producto de los límites a los que tienden los factores individuales. Este resultado será usado frecuentemente en el capítulo IV usando la notación de Newton:

$$\dot{f} = \left(\frac{df}{dg} \right) \dot{g}. \tag{AIII.19}$$

El resultado anterior puede extenderse a funciones de funciones de funciones, etc.:

$$\frac{d}{dt}f_1(f_2(\dots f_n(t) \dots)) = \frac{df_1}{df_2} \dots \frac{df_n}{dt} \tag{AIII.20}$$

A continuación listamos todos los resultados de esta sección en forma de un formulario que puede ser consultado según se necesite al leer este breviario.

(i) Definición de derivada:

$$\frac{d}{dt}f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

(ii) Derivada de sumas y productos de funciones:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}af(t) &= a \frac{d}{dt}f(t), \\ \frac{d}{dt}[f(t) + g(t)] &= \frac{d}{dt}f(t) + \frac{d}{dt}g(t), \\ \frac{d}{dt}[f(t)g(t)] &= f(t) \frac{d}{dt}g(t) + g(t) \frac{d}{dt}f(t), \end{aligned}$$

(iii) Derivada de leyes de potencia y polinomios:

$$\frac{d}{dt}at^r = rat^{r-1}, \quad \text{donde } r \text{ es cualquier real}$$

$$\frac{d}{dt}(a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0) = na_n t^{n-1} + (n-1)a_{n-1} t^{n-2} + \dots + 2a_2 t + a_1.$$

(iv) Derivada de funciones compuestas:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(g(t)) &= \frac{d}{dg}f(g) \frac{d}{dt}g(t), \\ \frac{d}{dt}f_1(f_2(\dots f_n(t) \dots)) &= \frac{df_1}{df_2} \dots \frac{df_n}{dt} \end{aligned}$$