

<http://www.cienciaonline.com/2012/11/02/%C2%BFcomo-llego-balmer-a-la-ecuacion-de-las-lineas-del-espectro-de-hidrogeno/>

El espectro atómico más sencillo es el del átomo de hidrógeno. En la zona visible del espectro aparecen solo cuatro líneas espectrales, como se puede observar en las imágenes anteriores, cuyas longitudes de onda fueron medidas con gran precisión en 1884 por el sueco [Anders Ångström](#). Al año siguiente intervino Johann Balmer, un profesor de matemáticas que daba clases en escuelas técnicas y colegios femeninos de Basilea, su ciudad natal. El científico suizo decía a sus amigos y colegas que si le daban una serie de números, podía encontrar una fórmula matemática que los relacionara. Un colega suyo lo retó a que lo hiciera con las recientes medidas del espectro de hidrógeno y Balmer lo consiguió.

¿Qué hizo Balmer?

Balmer partió de los valores, en nanómetros, de las cuatro longitudes de onda:

- **656,21**
- **486,07**
- **434,01**
- **410,12.**

Si dividimos por el número más pequeño (410,12), sin escribir todos los decimales, obtenemos:

$$1,6 : 1,185 : 1,058 : 1.$$

Ahora usamos las matemáticas para escribirlos de manera racional, es decir, cocientes de dos números enteros.

Recordatorio:

Para convertir un Decimal a una Fracción sigue estos pasos:

- Paso 1: Escribe el decimal dividido por 1.
- Paso 2: Multiplica los números de arriba y abajo por 10 una vez por cada número luego de la coma. (Por ejemplo, si hay dos números después del decimal, multiplicamos por 100, si hay tres por 1000, etc.)
- Paso 3: Simplifica (reduce) la fracción.

Para simplificar hay que sacar factores. Para eso puede utilizar [esta web](#).

Si lo hacemos con cada uno:

$$1,6 \implies \frac{1,6}{1} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$
$$1,185 \implies \frac{1185}{1000} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 79}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{237}{200}$$

$$1,058 \implies \frac{1,058}{1} = \frac{1058}{1000} = \frac{2 \cdot 23^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{529}{500}$$

Tendremos entonces:

$$\frac{8}{5} : \frac{237}{200} : \frac{529}{500} : 1$$

Ahora, si multiplicamos los cuatro números por 9/8:

$$\frac{72}{40} : \frac{2133}{1600} : \frac{4761}{4000} : \frac{9}{8}$$

Simplificando:

$$\frac{9}{5} : \frac{4}{3} : \frac{25}{21} : \frac{9}{8}$$

Si queremos que los denominadores aparezcan en orden creciente, podemos multiplicar el segundo y el cuarto por 4/4, que es simplemente multiplicar por 1. Así obtenemos:

$$\frac{9}{5} : \frac{16}{12} : \frac{25}{21} : \frac{36}{32}$$

Balmer se dio cuenta de que los numeradores son cuadrados de números enteros sucesivos (3,4,5,6) y los denominadores se obtienen restando a los numeradores el número 4, convenientemente escrito como el cuadrado de 2.

Por tanto, podemos escribir las fracciones anteriores de la siguiente forma:

$$\frac{3^2}{3^2-2^2} : \frac{4^2}{4^2-2^2} : \frac{5^2}{5^2-2^2} : \frac{6^2}{6^2-2^2}$$

Si a cada línea espectral se le asocia un número entero n , las longitudes de onda son proporcionales al cociente donde n toma valores, 3, 4, etc.:

$$\frac{n^2}{n^2-2^2}$$

Podemos calcular que la constante de proporcionalidad (k) es de 364,56 nm:

$$\frac{9}{5} \cdot k = 656,21 \implies k = \frac{5 \cdot 656,21}{9} = 364,56$$

$$\frac{16}{12} \cdot k = 486,07 \implies k = 364,56$$

$$\frac{21}{25} \cdot k = 434,01 \implies k = 364,56$$

$$\frac{9}{8} \cdot k = 410,12 \implies k = 364,56$$

Como es natural, **esta expresión no contiene ninguna información física, es simplemente un juego con números. Pero como el propio Balmer conjeturó, se pudo extender a otras líneas espectrales al reemplazar 2^2 por los cuadrados de los siguientes enteros.**

Si se quiere considerar las frecuencias, dado que son inversamente proporcionales a las longitudes de onda, se obtiene que, salvo por una constante global, vienen dadas por la serie:

$$\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}$$

La serie de Balmer, cuyas líneas caen en la zona visible del espectro, representan los tránsitos desde $n = 3, 4, 5, \dots$ a $n=2$.

Este hallazgo fue muy afortunado y adquirió un interés mayor cuando otros científicos lo generalizaron y pudieron caracterizar el espectro completo del hidrógeno. Las frecuencias de las líneas espectrales son proporcionales a las inversas de dos números enteros al cuadrado. La expresión matemática, conocida como relación de Rydberg-Ritz, es

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

donde $R_H = (1,09677576 \pm 0,00000012) \cdot 10^7 m^{-1}$

El éxito del modelo de Bohr reside en que pudo explicar teóricamente, proponiendo un modelo de átomo, los resultados experimentales. Aquí os dejo una imagen sobre los fundamentos del modelo de Bohr y cómo llegamos matemáticamente a la expresión de Rydberg-Ritz.

(Pinchar en la imagen para ampliar.)

Fundamentos Físicos: Modelo de Bohr del átomo

El modelo de Niels Bohr de 1913, plantea cuatro postulados que, entre otros resultados, permiten explicar el espectro de emisión del átomo de hidrógeno^{[5],[4]}:

1. un electrón se mueve en una órbita circular debido a su interacción coulombiana con el núcleo y, además, las leyes clásicas son válidas;
2. al trasladarse en una órbita dada no emite radiación electromagnética;
3. las órbitas permitidas son aquellas en las que el momento angular del electrón es $L = \frac{h}{2\pi} n$, donde n es un número natural y h es la constante de Planck;
4. si el electrón realiza un salto desde una órbita de energía E_i a otra de menor energía (E_f), emite radiación de frecuencia $\nu = \frac{E_i - E_f}{h}$.

Siguiendo estos postulados para el caso especial del átomo de hidrógeno, la fuerza F que mantiene al electrón de carga e y masa m_e moviéndose en su órbita de radio r , a una velocidad v , es la de coulomb entre él y el protón del núcleo:

$$F = \frac{k_e e^2}{r^2} = m_e \frac{v^2}{r} \implies \frac{k_e e^2}{2r} = \frac{m_e v^2}{2} \quad (1)$$

La energía total del electrón (E), corresponde a la sumas de las energías cinética (último término de la ecuación anterior) y potencial eléctrica:

$$E = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{k_e e^2}{r} = \frac{k_e e^2}{2r} - \frac{k_e e^2}{r} = -\frac{k_e e^2}{2r} \quad (2)$$

Conviene ahora recordar que el momento angular se encuentra cuantizado o, análogamente, sólo puede tomar ciertos valores:

$$L = n \frac{h}{2\pi} = m_e r v \implies v = \frac{n h}{2\pi m_e r} \quad (3)$$

Reemplazando la ecuación (3) en (1), se pueden obtener los radios permitidos para las órbitas:

$$\frac{k_e e^2}{2r} = \frac{m_e \left(\frac{n h}{2\pi m_e r} \right)^2}{2} \implies r = \left(\frac{n h}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{m_e e^2 k_e} \quad (4)$$

Este valor conduce rápidamente a la cuantización en la energía del electrón:

$$E_n = -\frac{k_e e^2}{2} \left(\frac{2\pi}{n h} \right)^2 m_e e^2 k_e = -\left(\frac{2\pi}{h} \right)^2 \frac{m_e e^4 k_e^2}{2} \frac{1}{n^2} = -w eV \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3... \quad (5)$$

Finalmente, la frecuencia ν y la longitud de onda λ de la radiación emitida por un electrón al trasladarse de una órbita de energía E_i a otra E_f , se calcula utilizando la siguiente ecuación; en ella, c es la velocidad de la luz en el vacío:

$$\begin{aligned} \frac{c}{\lambda} = \nu &= \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{w}{h} \left(\frac{1}{f^2} - \frac{1}{i^2} \right) \implies \\ \implies \frac{1}{\lambda} &= \frac{w}{h c} \left(\frac{1}{f^2} - \frac{1}{i^2} \right) = R_H \left(\frac{1}{f^2} - \frac{1}{i^2} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

La constante $R_H = (1,09677576 \pm 0,00000012) 10^7 \text{ m}^{-1}$ es llamada constante de Rydberg para el hidrógeno, nombre asignado en honor al descubridor empírico de la ecuación (6), Johannes Rydberg.