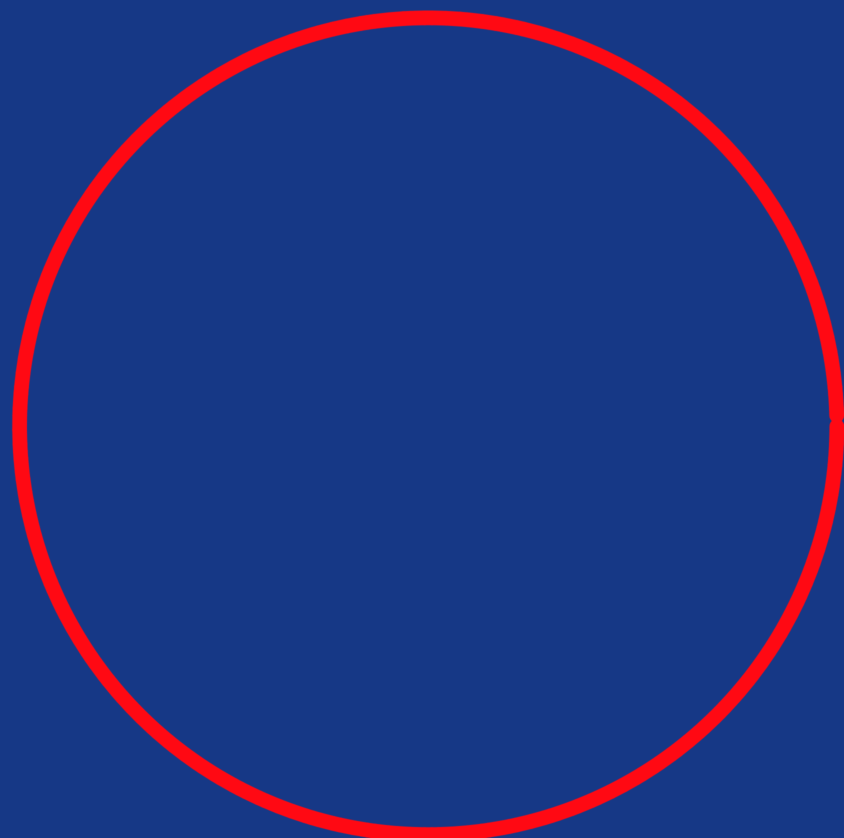
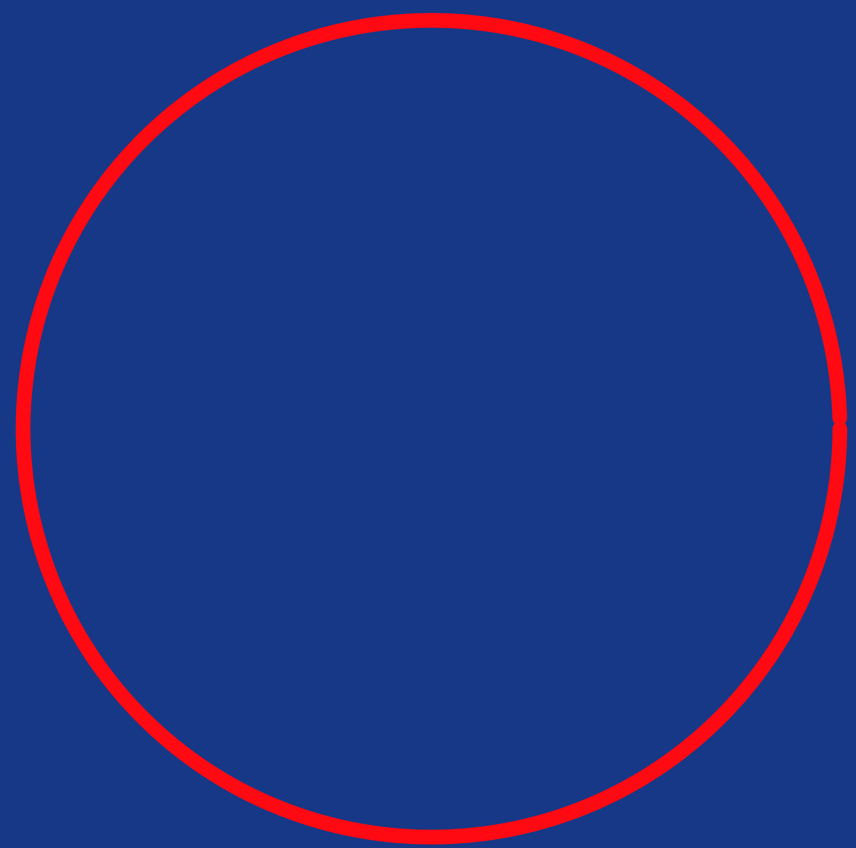
TCJ - CIMAT
Curso de Matemáticas
Ricardo A. Sáenz
19 de enero de 2021

Simetrías continuas

Simetrías del círculo

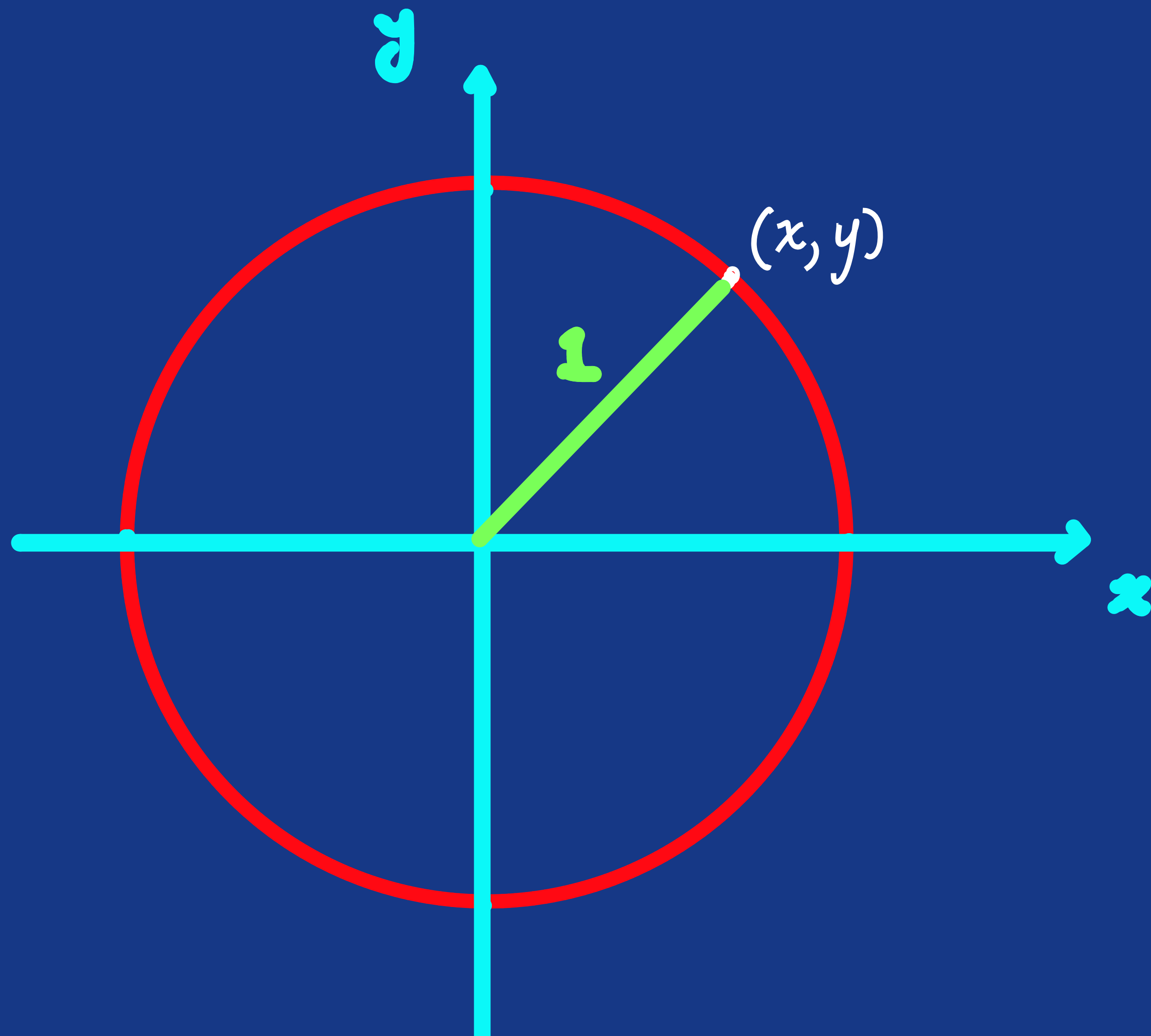


Simetrías del círculo



- Rotaciones
- Reflexiones

Rotaciones

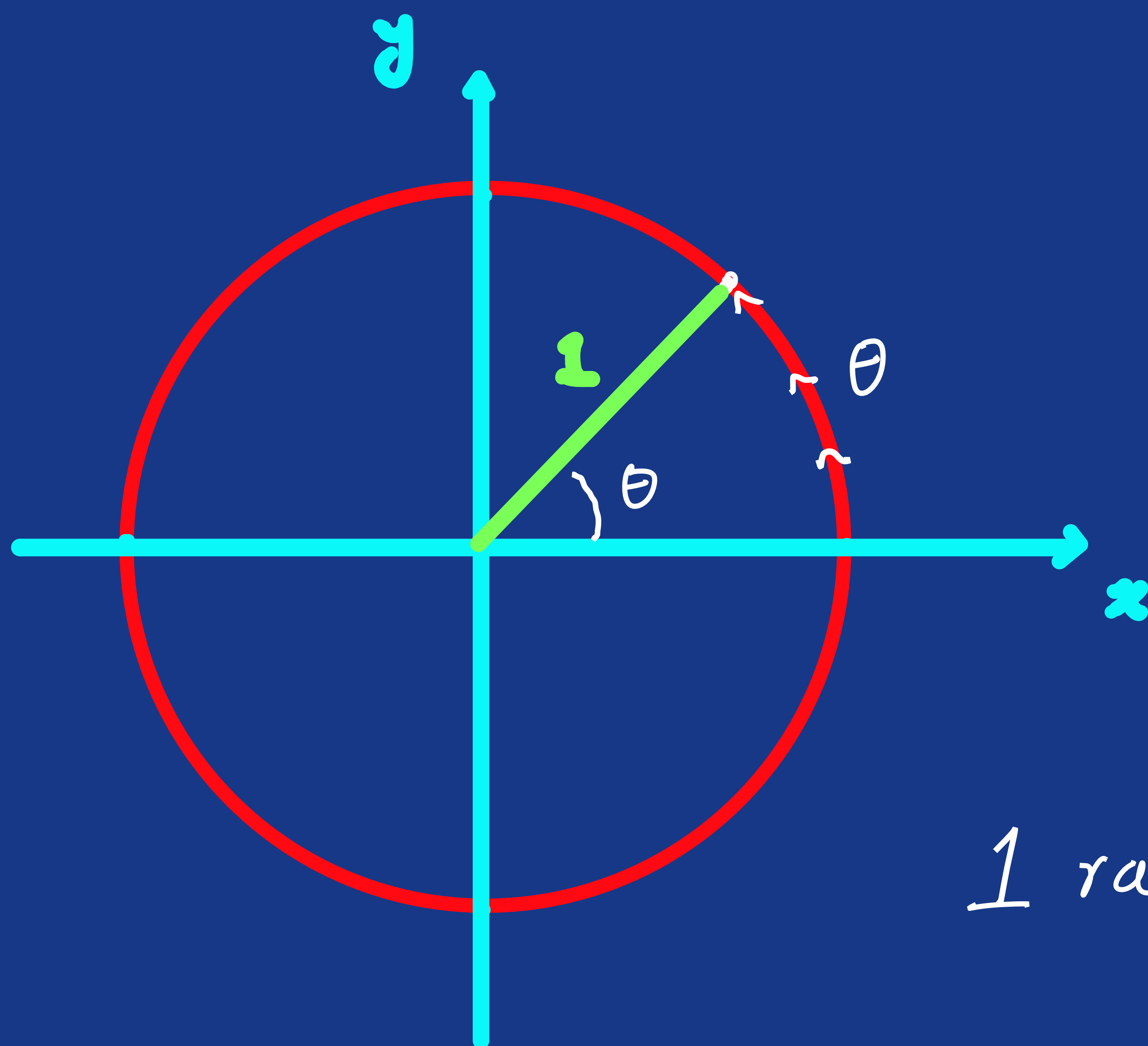


Círculo unitario

$$x^2 + y^2 = 1$$

(Teorema de Pitágoras)

Rotaciones



θ es la longitud del arco abarcado por el ángulo

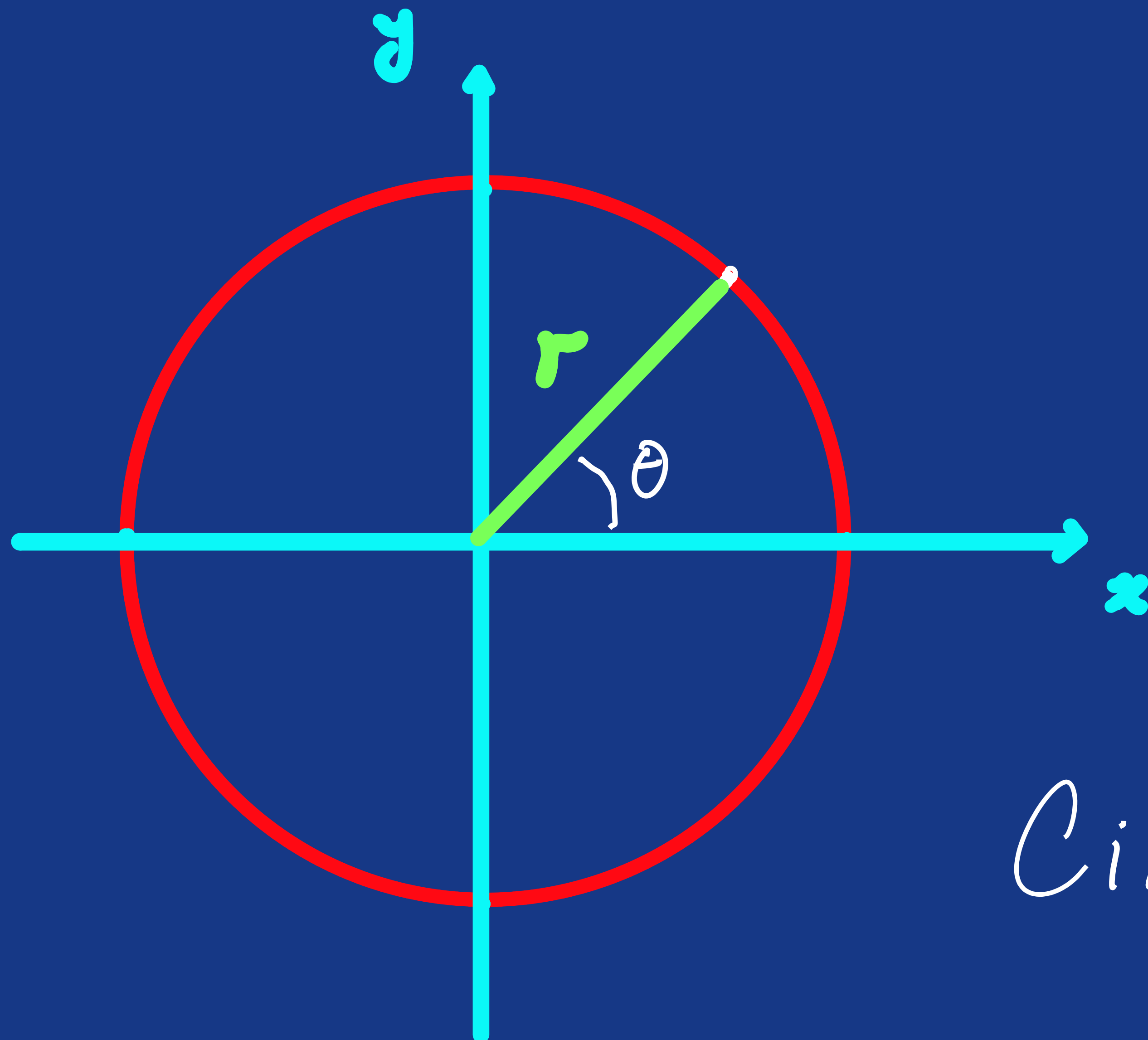
$\longrightarrow$ Unidades = radianes

1 radián = ángulo que abarca un arco de longitud 1

Radianes

- Vuelta completa: 2π
- Media vuelta (ángulo llano): π
- Cuarto de vuelta (recto): $\pi/2$

Longitud de arco

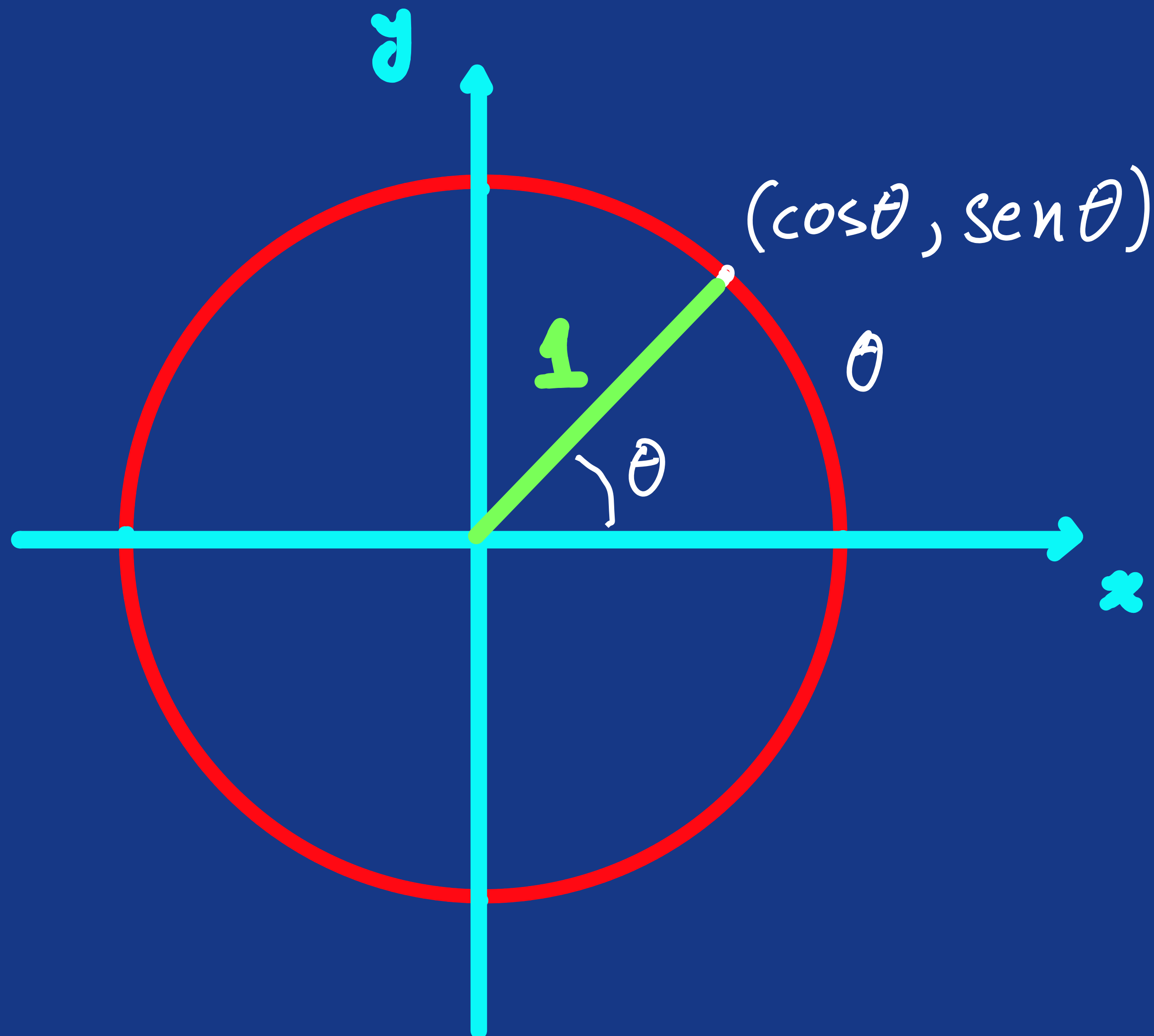


Longitud del arco abarcado por θ

$$r\theta$$

$$\text{Circunferencia} = 2\pi r$$

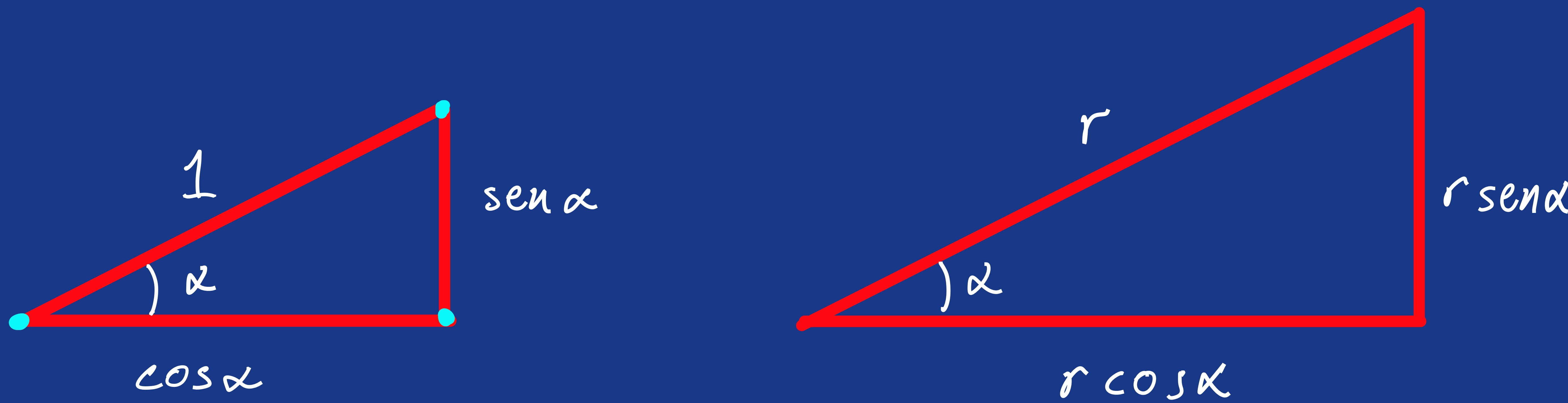
Funciones circulares (trigonométricas)



$(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ son las coordenadas del punto al que llegamos al avanzar θ sobre el círculo unitario

$\rightarrow (\cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2 = 1$

Trigonometría



→ Las proporciones entre los lados no cambian

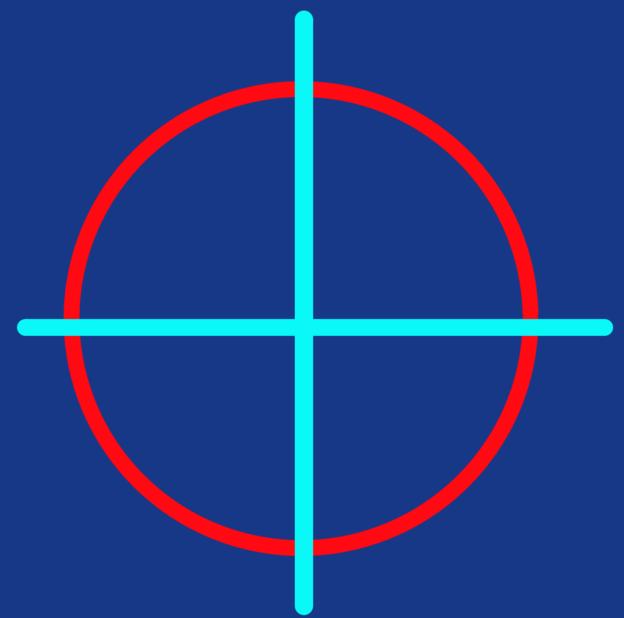
Cosenos y senos

$$\cos 0 = 1, \quad \operatorname{sen} 0 = 0$$

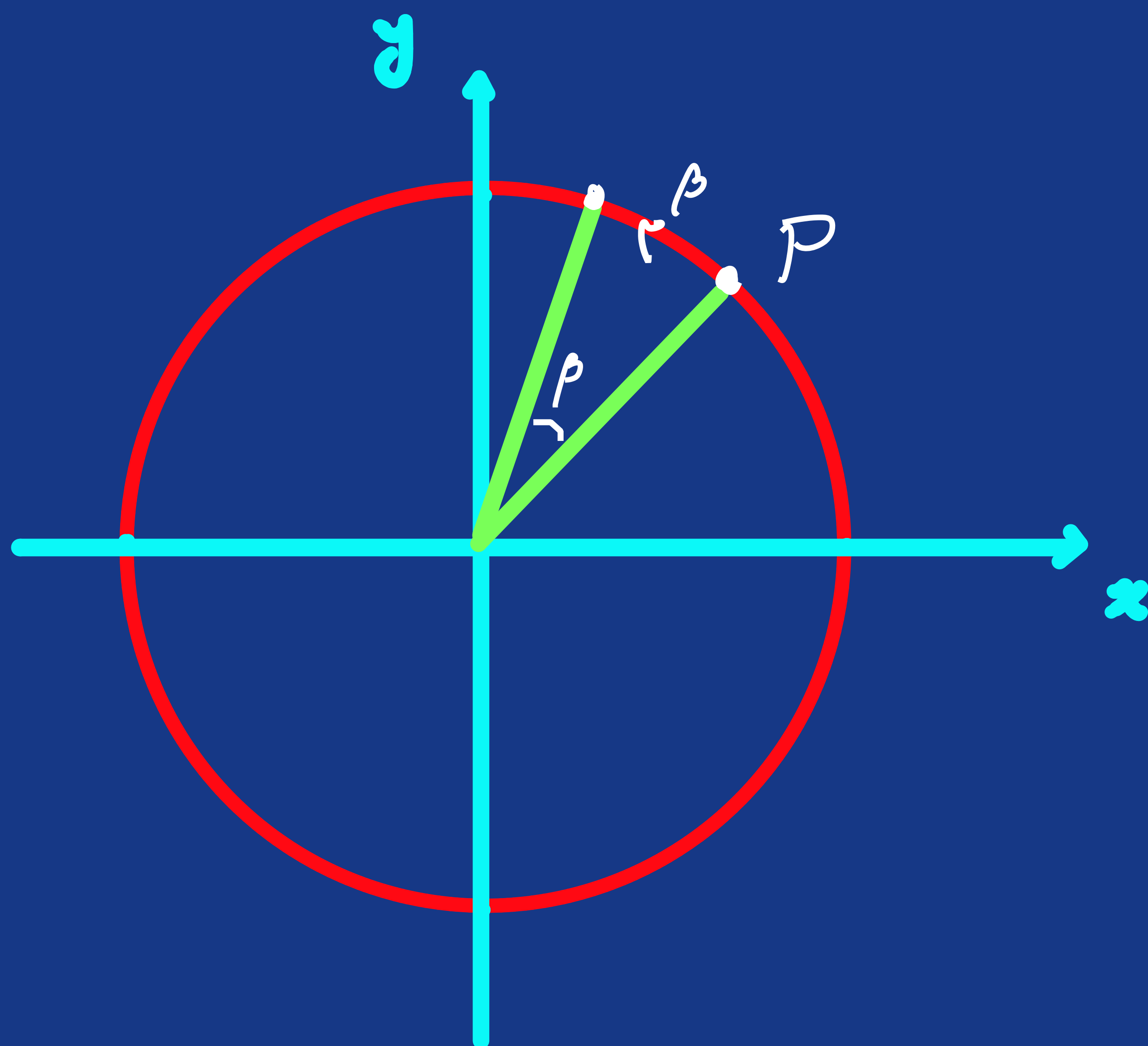
$$\cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos \pi = -1, \quad \operatorname{sen} \pi = 0$$

$$\cos \frac{3\pi}{2} = 0, \quad \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1$$

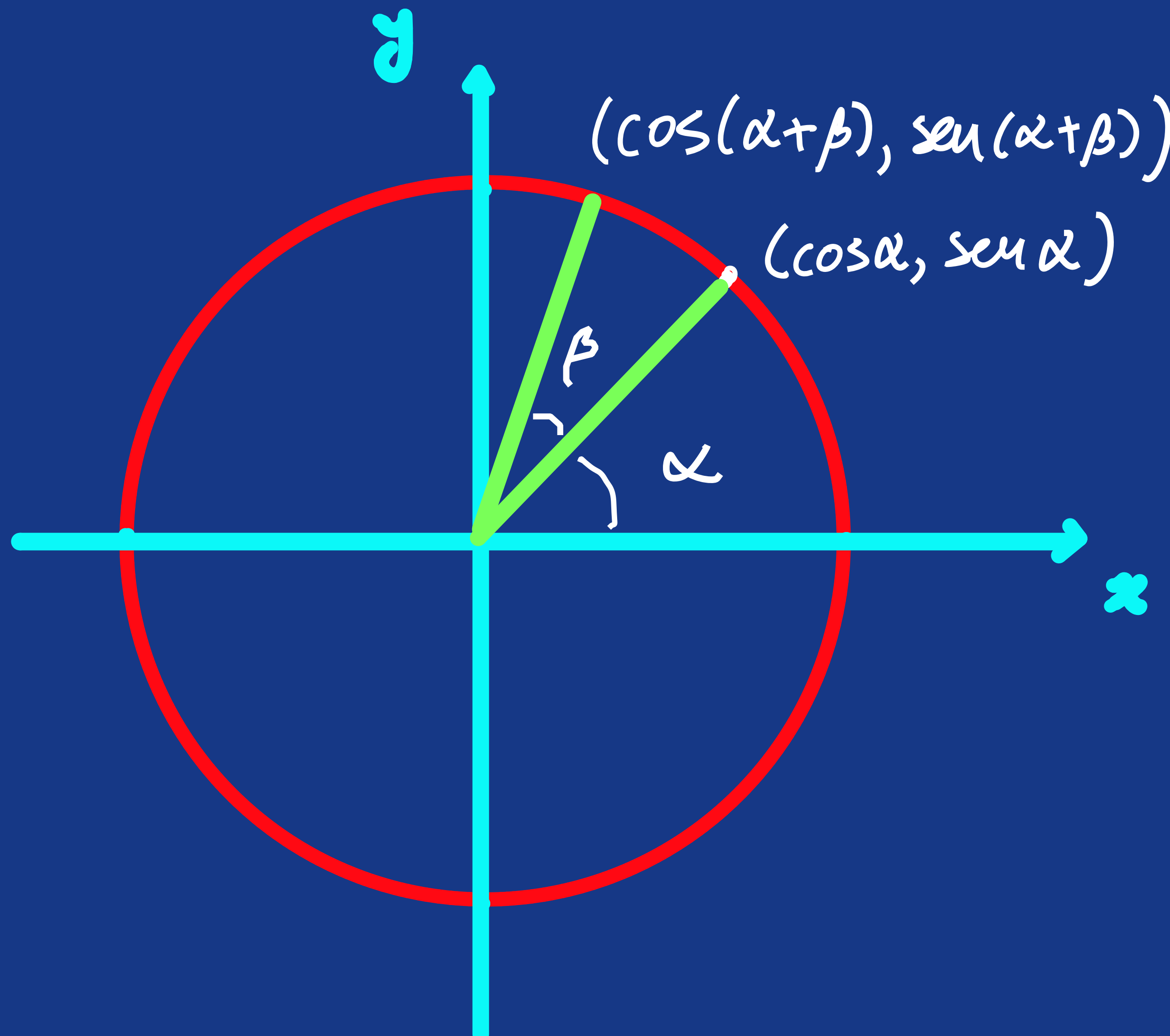


Rotaciones



Podemos definir una rotación, por un ángulo β, como la transformación que avanza cada punto una longitud β sobre el círculo unitario

Rotaciones



Una rotación por β envía un punto

$$(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$$

al punto

$$(\cos(\alpha+\beta), \operatorname{sen}(\alpha+\beta))$$

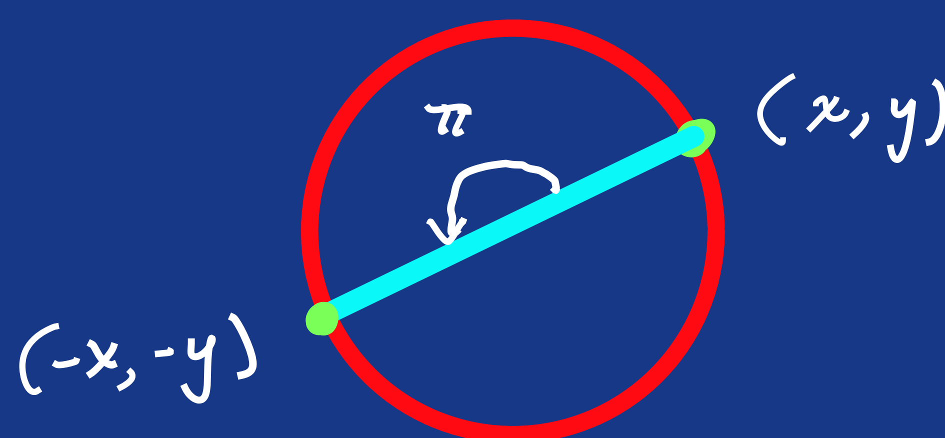
Rotaciones

- Rotación por 2π:

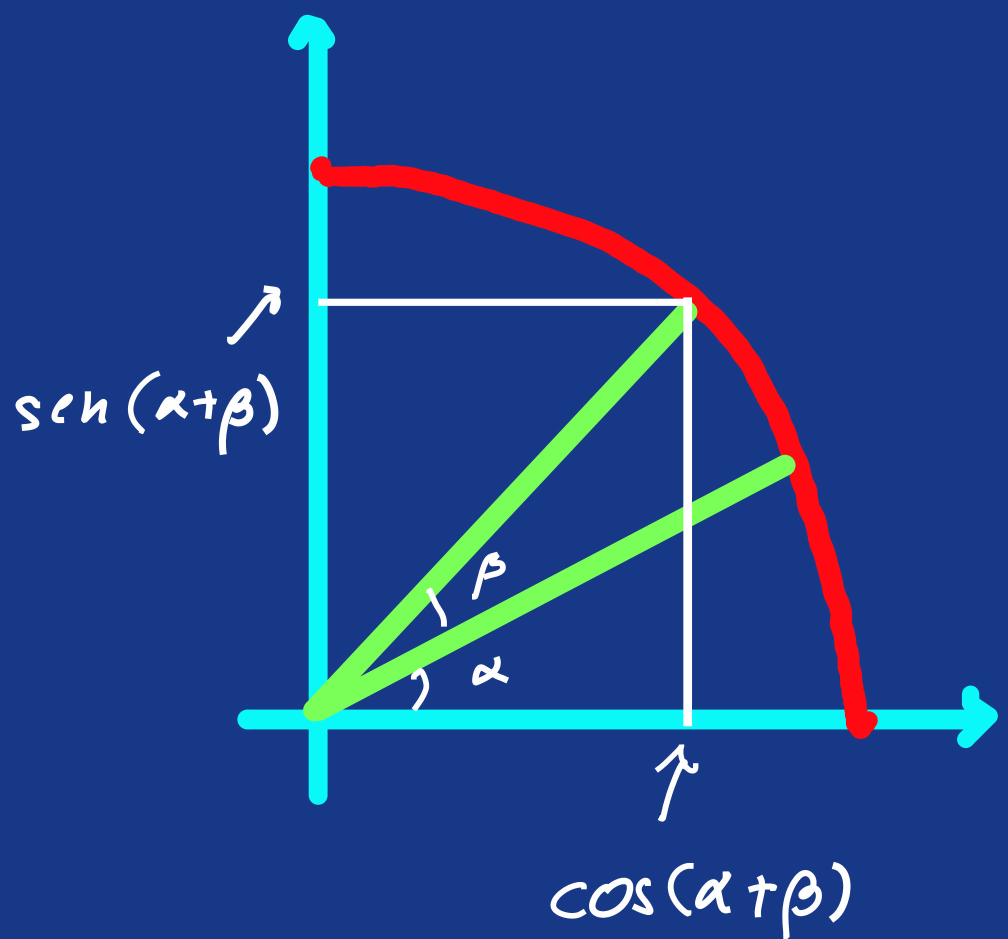
$$(\cos(\alpha+2\pi), \operatorname{sen}(\alpha+2\pi)) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$$

- Rotación por π:

$$(\cos(\alpha+\pi), \operatorname{sen}(\alpha+\pi)) = (-\cos\alpha, -\operatorname{sen}\alpha)$$

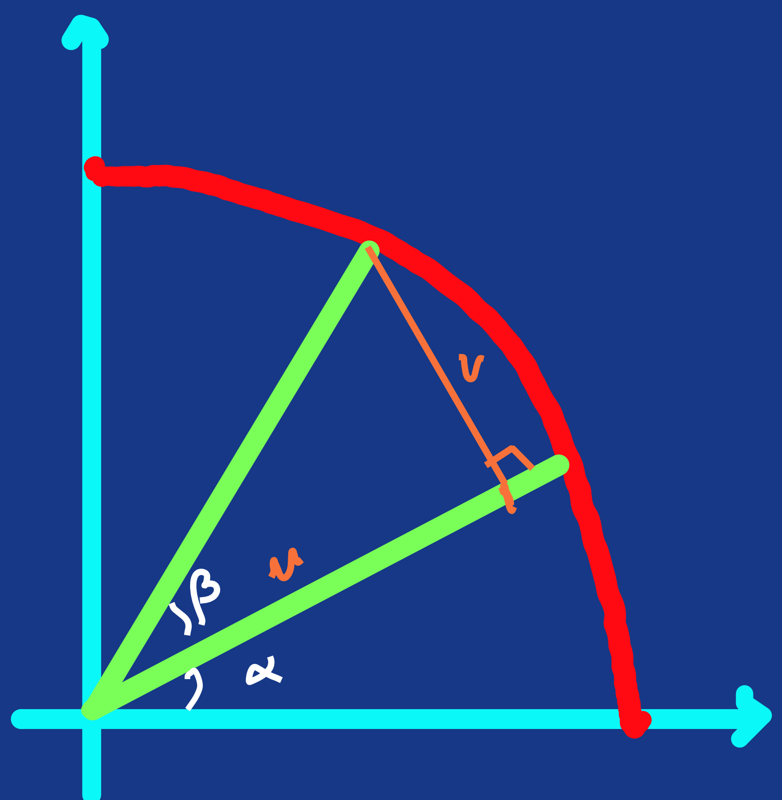


Rotaciones



Objetivo: Escribir $(\cos(\alpha+\beta), \mathrm{sen}(\alpha+\beta))$ en términos de α y β

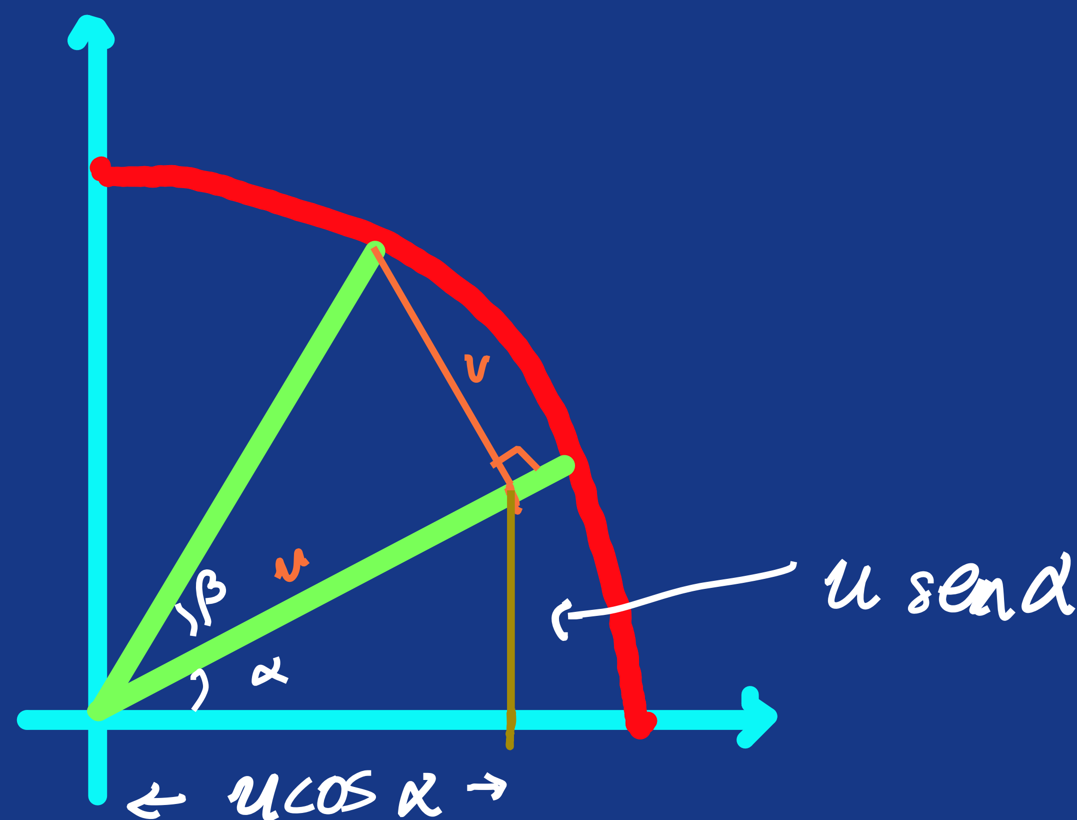
Rotaciones



$u = \cos \beta$,

$v = \text{sen } \beta$

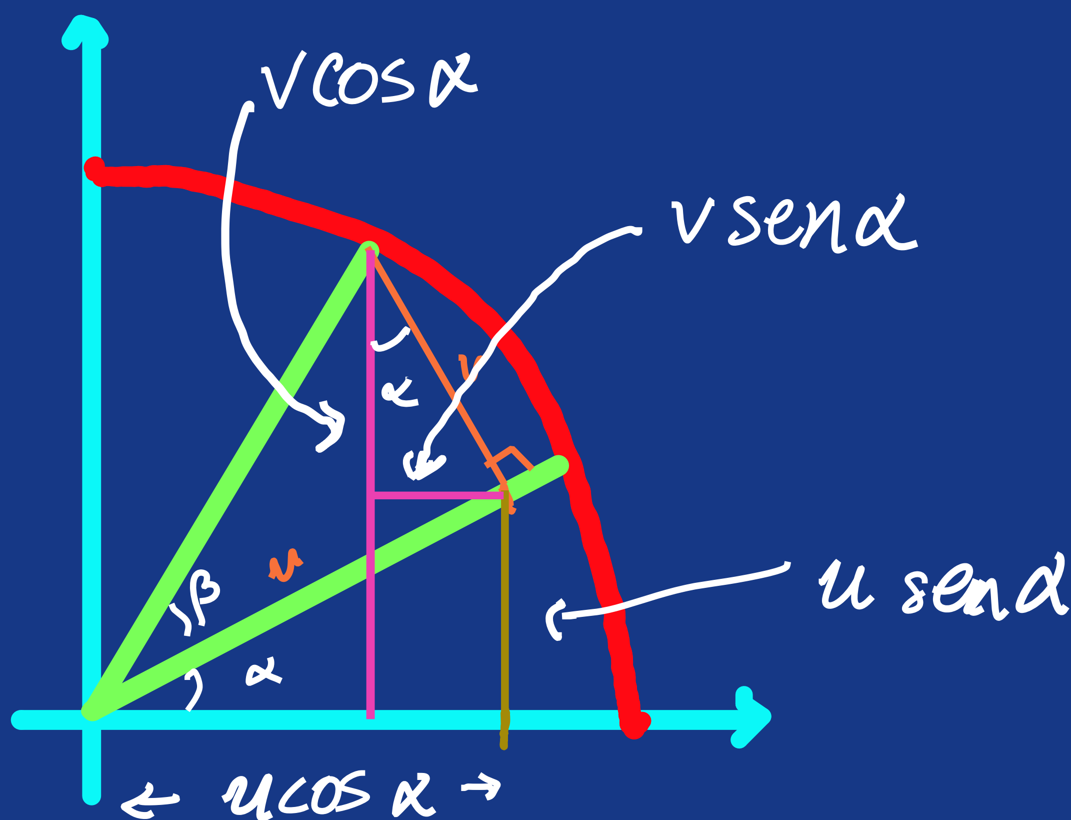
Rotaciones



$u = \cos\beta$,

$v = \operatorname{sen}\beta$

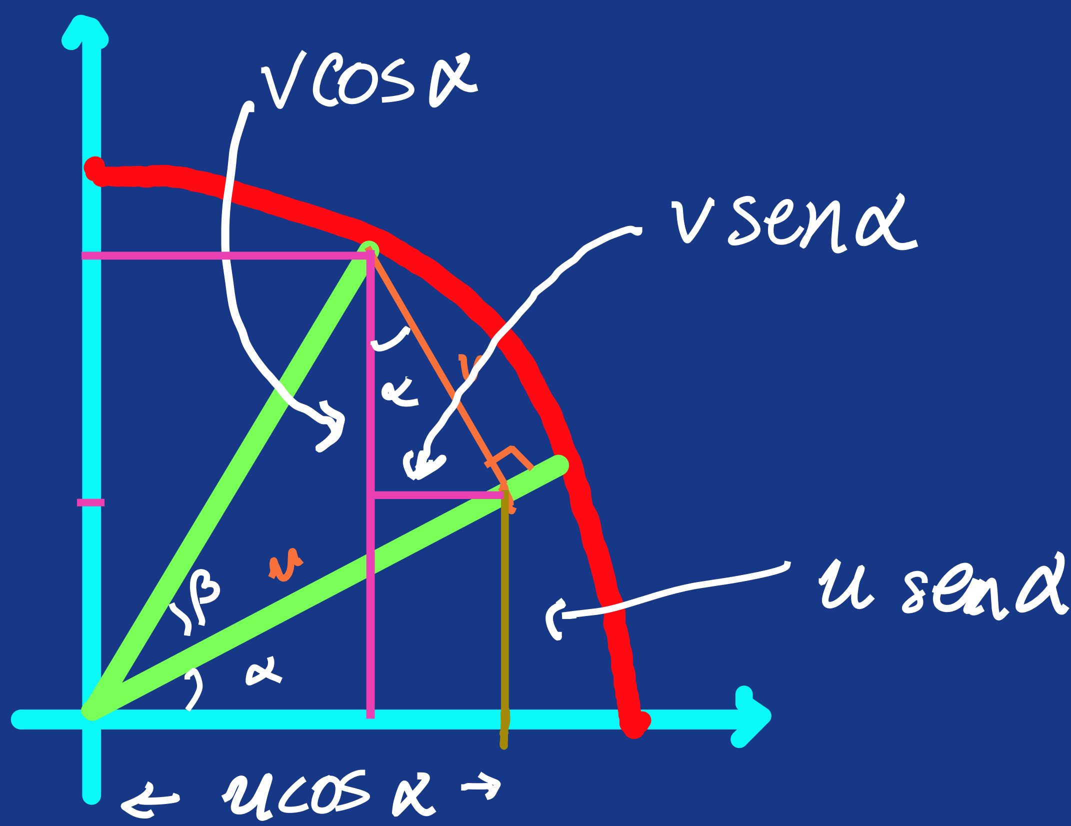
Rotaciones



$$u = \cos\beta$$

$$v = \operatorname{sen}\beta$$

Rotaciones



$$u = \cos\beta$$

$$v = \text{sen}\,\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = u\cos\alpha - v\,\text{sen}\,\alpha$$

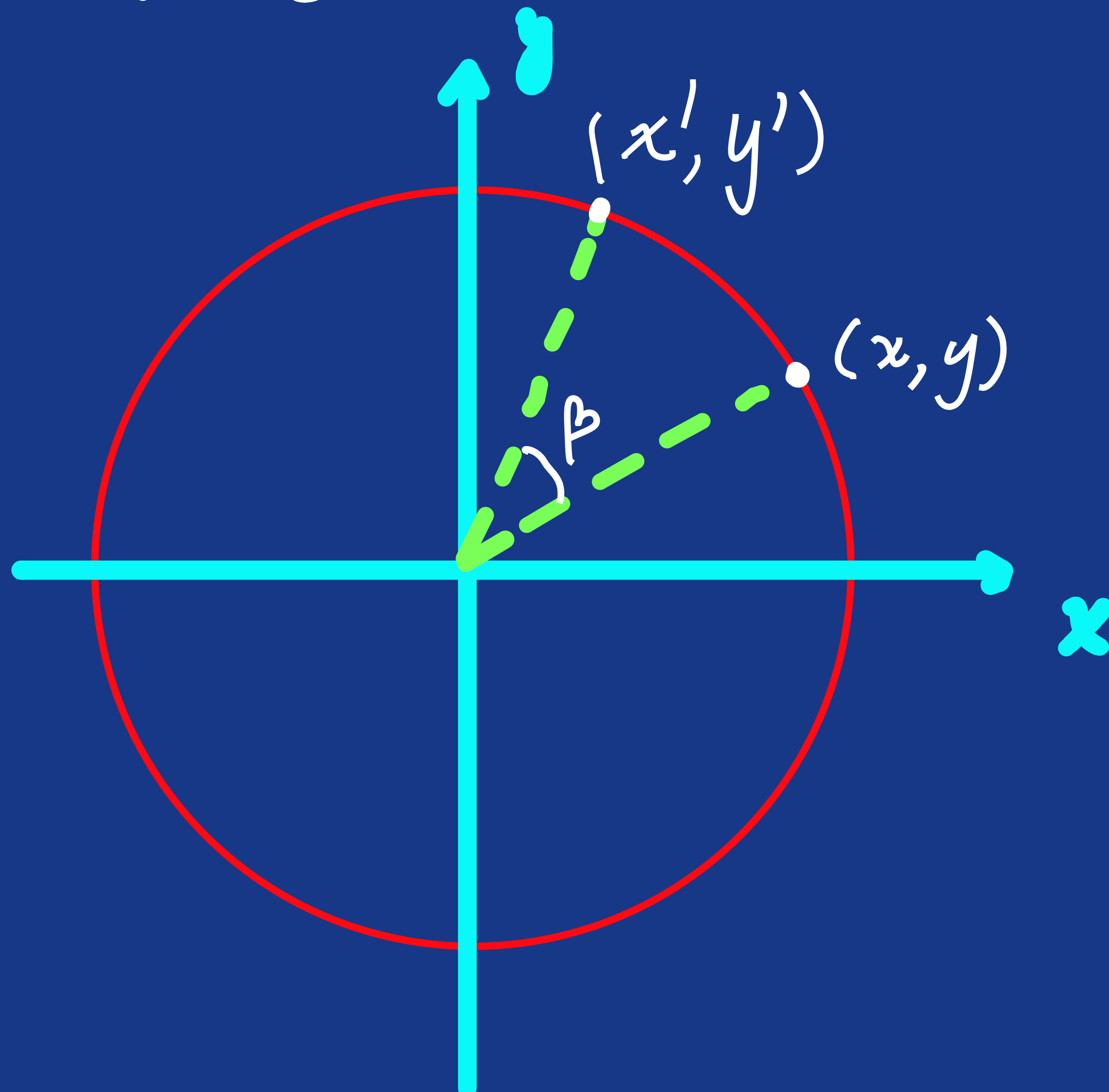
$$\text{sen}\,(\alpha+\beta) = u\,\text{sen}\,\alpha + v\cos\alpha$$

Sumas de ángulos

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Rotaciones



Teorema. El resultado de rotar el punto (x,y) por un ángulo β es

$$x' = x\cos\beta - y\,\text{sen}\,\beta$$
$$y' = x\,\text{sen}\beta + y\cos\beta$$

Ejercicios

i) Muestra que

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha$$

ii) Muestra que

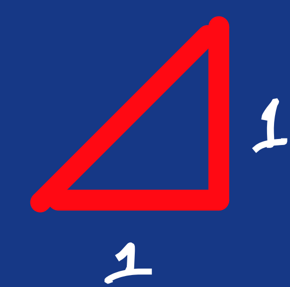
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

NOTA: En general, $\cos n\alpha$ es un polinomio en $(\cos\alpha)$

Ejercicios

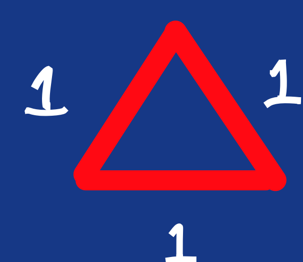
iii) Muestra que $\cos\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

→ Considera el triángulo

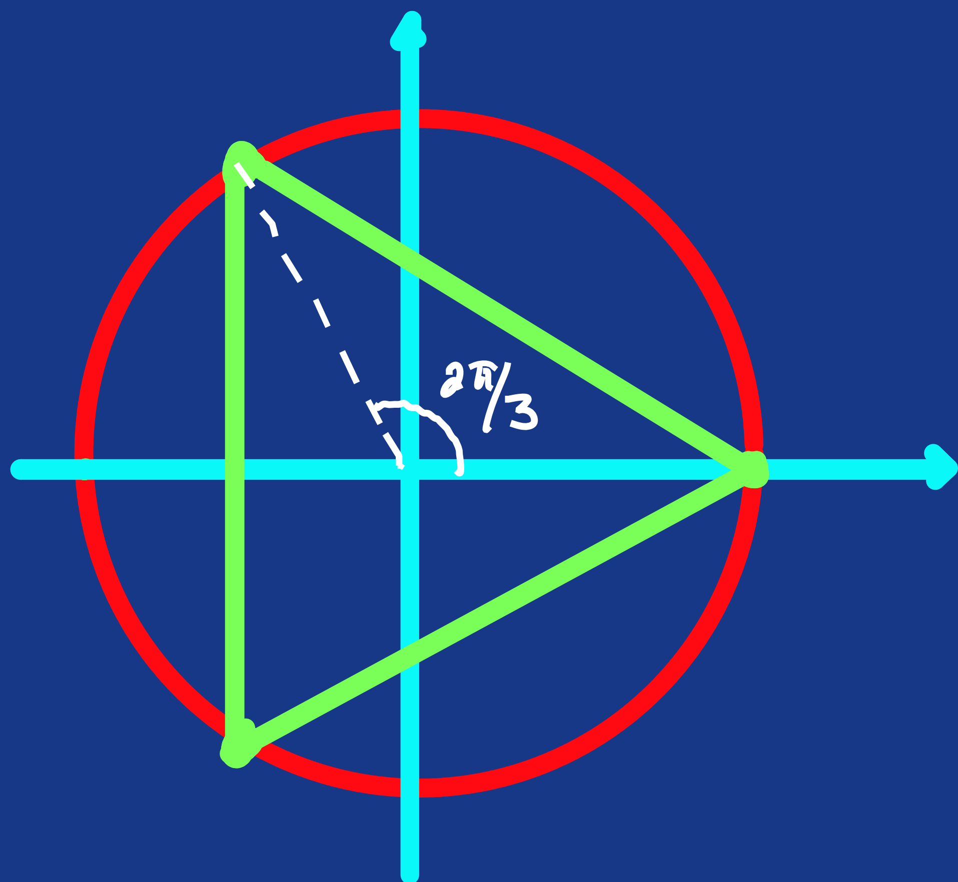


iv) Muestra que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

→ Considera



Rotaciones del triángulo



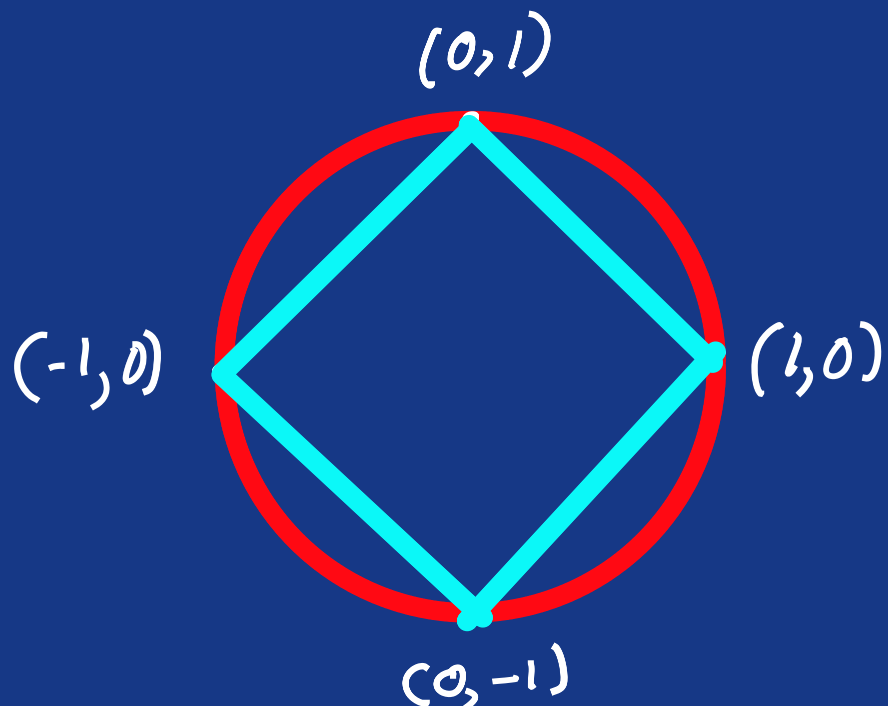
→ Las rotaciones por un ángulo $2\pi/3$, a partir de $(1,0)$, forman un triángulo equilátero:

$$(1,0) \to \left(\cos\frac{2\pi}{3}, \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$\to \left(\cos\frac{4\pi}{3}, \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right)$$

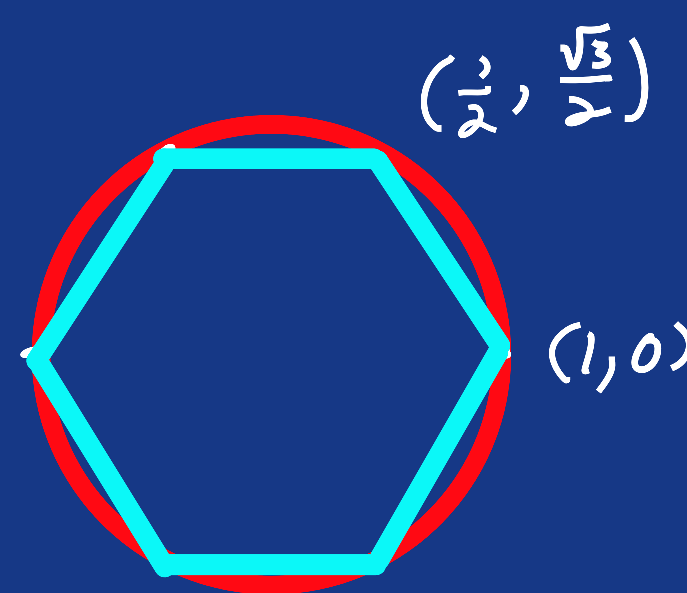
$$(1,0) \to \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \to \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$\mathbb{Z}_n$

En general, las rotaciones por $2\pi/n$ forman un n-ágono regular dentro del círculo



$n = 4$



$n = 6$

$\mathbb{Z}_n$

Corolario. $\mathbb{Z}_n$ es un subgrupo del círculo $\mathbb{S}^1$

MAÑANA: Las simetrías del plano

Ejercicios

v) Calcula $\cos\frac{2\pi}{5}$ y $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}$. Utiliza el triángulo